Mémoires
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 176
Nouvelle série

NOUVEAUX THÉORÈMES D'ISOGÉNIE

É. GAUDRON & G. RÉMOND

2 0 2 3

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Comité de rédaction

Christine BACHOC
Yann BUGEAUD
François DAHMANI
Béatrice de TILLIÈRE
Clotilde FERMANIAN
Wendy LOWEN
Laurent MANIVEL
Julien MARCHÉ
Kieran O'GRADY
Emmanuel RUSS
Eva VIEHMANN

Marc HERZLICH (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
commandes@smf.emath.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 38 € ($ 57)
Abonnement électronique : 113 € ($ 170)
Abonnement avec supplément papier : 167 €, hors Europe : 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
memoires@smf.emath.fr • http://smf.emath.fr/

© *Société Mathématique de France 2023*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN papier 0249-633-X; électronique : 2275-3230

ISBN 978-2-85629-948-7

doi:10.24033/msmf.484

Directeur de la publication : Fabien DURAND

MÉMOIRES DE LA SMF 176

NOUVEAUX THÉORÈMES D'ISOGÉNIE

Éric Gaudron
Gaël Rémond

Société Mathématique de France 2023

É. Gaudron

Université Clermont Auvergne, CNRS, LMBP, F-63000, Clermont-Ferrand, France.

Courriel : `Eric.Gaudron@uca.fr`

G. Rémond

Institut Fourier, UMR 5582, 100, rue des Maths, CS 40700, 38058 Grenoble Cedex 9, France.

Courriel : `Gael.Remond@univ-grenoble-alpes.fr`

Soumis le 13 février 2020, révisé le 19 octobre 2020, accepté le 23 février 2021.

***Classification mathématique par sujets* (2000). –** 11G10; 14K02, 11R54, 14K15.

***Mots-clefs*. –** Variété abélienne, isogénie, ordre maximal, ordre principal, anneau de Lefschetz, module de Tate, polarisation, groupe de Brauer, réseau des périodes, théorème des périodes.

***Key words and phrases*. –** Abelian variety, isogeny, maximal order, principal order, Lefschetz ring, Tate module, polarization, Brauer group, period lattice, period theorem.

NOUVEAUX THÉORÈMES D'ISOGÉNIE

Éric Gaudron, Gaël Rémond

***Résumé.* –** Étant donné une extension de type fini K du corps des nombres rationnels et une variété abélienne C sur K, nous considérons la classe de toutes les variétés abéliennes sur K isogènes (sur K) à une sous-variété abélienne d'une puissance de C. Nous expliquons comment définir, dans cette classe et de manière naturelle, une variété abélienne $C^\flat$ dont l'anneau des endomorphismes contrôle toutes les isogénies entre éléments de la classe, au sens suivant : si d désigne le discriminant de l'anneau des endomorphismes de $C^\flat$ alors, pour tout couple de variétés abéliennes isogènes dans la classe, il existe une isogénie entre elles dont le noyau est d'exposant au plus d. En outre, nous montrons que ce nombre d permet de majorer plusieurs invariants attachés à un élément quelconque A de la classe, comme le plus petit degré d'une polarisation sur A, le discriminant de son anneau d'endomorphismes ou le cardinal de la partie invariante sous Galois du groupe de Brauer géométrique de A. Lorsque K est un corps de nombres, le théorème des périodes appliqué à $C^\flat$ et à sa période canonique fournit une borne explicite pour d en termes du degré de K, de la dimension de $C^\flat$ et de la hauteur de Faltings de C. Nous en déduisons donc des majorations explicites des quantités mentionnées ci-dessus pour les isogénies, polarisations, endomorphismes et groupes de Brauer, qui améliorent considérablement les résultats antérieurs.

***Abstract* (New isogeny theorems). –** Given a finitely generated field extension K of the rational numbers and an abelian variety C over K, we consider the class of all abelian varieties over K which are isogenous (over K) to an abelian subvariety of a power of C. We show that there is a single, naturally constructed abelian variety $C^\flat$ in the class whose ring of endomorphisms controls all isogenies in the class. Precisely, this means that if d is the discriminant of this ring then for any pair of isogenous abelian varieties in the class there exists an isogeny between them whose kernel has exponent at most d. Furthermore we prove that, for any element A in the class, the same number d governs several invariants attached to A such as the smallest degree of a polarisation on A, the discriminant of its ring of endomorphisms or the size of the invariant part of its geometric Brauer group. All these are bounded only in terms of d and the dimension of A. In the case where K is a number field we can go further

© Mémoires de la Société Mathématique de France 176, SMF 2023

and show that the period theorem applies to $C^\flat$ in a natural way and gives an explicit bound for d in terms of the degree of K, the dimension of $C^\flat$ and the stable Faltings height of C. This in turn yields explicit upper bounds for all the previous quantities related to isogenies, polarisations, endomorphisms, Brauer groups which significantly improve known results.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1. Motivation

Un théorème d'isogénie a pour objet de répondre à la question : étant donné deux variétés abéliennes isogènes A et B sur un corps K, comment contrôler le plus petit degré d'une isogénie $\varphi\colon A \to B$ entre elles ? Dans les années 90, Masser et Wüstholz (voir **[19]**) ont montré que, lorsque K est un corps de nombres, on peut borner $\deg \varphi$ en fonction du degré $[K : \mathbb{Q}]$ de K, de la dimension de A et de sa hauteur de Faltings stable $h_F(A)$. Dans un travail précédent (voir **[11]**), nous avons donné une version explicite de ce résultat. La démonstration repose de façon cruciale sur un énoncé appelé le théorème des périodes mais le passage de celui-ci au théorème d'isogénie était très indirect.

Nous proposons ici une approche nouvelle de ce passage que nous pouvons décomposer en deux étapes : (1) nous introduisons une quantité naturelle Υ qui contrôle le degré d'isogénie et (2) nous montrons que le théorème des périodes donne de manière directe une majoration de Υ. Le premier avantage de cette démarche est de fournir de meilleures bornes mais un autre atout est que la partie (1) s'exprime de manière bien plus générale : le corps de base n'a pas besoin d'être un corps de nombres, notre construction est valide pour tout corps K de caractéristique nulle sur lequel une certaine classe d'isogénie est finie. Par exemple, on sait d'après Faltings que c'est le cas si K est une extension de corps de type fini de $\mathbb{Q}$. En outre, notre quantité Υ s'exprime aussi de façon intrinsèque en termes de l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ sur les modules de Tate ℓ-adiques.

Enfin, si nous n'avons parlé jusqu'ici que de degré d'isogénie, nous donnerons en fait toute une série de résultats montrant que Υ contrôle aussi d'autres invariants associés à une variété abélienne A sur K comme le plus petit degré d'une polarisation sur A, le volume (ou discriminant) de son anneau d'endomorphismes $\mathrm{End}\,A$ ou le cardinal de la partie invariante de son groupe de Brauer géométrique. Nous verrons qu'ils sont tous majorés uniquement en fonction de Υ et de $\dim A$.

Dans la suite de cette introduction, nous définissons Υ de la façon la plus économique pour énoncer nos résultats dans la généralité ci-dessus. Ensuite, nous nous spécialiserons au cas des corps de nombres et, pour terminer, nous entrerons un peu plus dans les détails pour donner d'autres descriptions de Υ. Le lecteur intéressé seulement par les majorations explicites dans le cas des corps de nombres peut se reporter directement au théorème 1.9 ci-dessous.

1.2. Notations et conventions

Dans ce texte, le corps de base de référence pour nos variétés abéliennes s'appellera toujours K, si bien que lorsque cela ne sera pas précisé une variété abélienne sera toujours une variété abélienne sur K. Plus occasionnellement, nous serons amenés à considérer, pour un corps L contenant K, l'extension des scalaires A_L d'une variété abélienne A sur K à L. Cependant, nous ne confondrons jamais A avec son extension de sorte que, par exemple, l'anneau des endomorphismes de A, noté $\operatorname{End} A$, est bien formé uniquement des morphismes $A \to A$ de schémas en groupes au-dessus de $\operatorname{Spec} K$. De la même façon, si B est une seconde variété abélienne sur K, nous notons $\operatorname{Hom}(A, B)$ l'ensemble des morphismes $A \to B$ de variétés abéliennes et A et B sont dites isogènes si cet ensemble contient une isogénie. En toute cohérence, ceci s'applique aussi à la notion de sous-variété abélienne de A (un sous-schéma en groupes connexe de A, pas d'une quelconque extension) ou de simplicité (A est simple si ses deux seules sous-variétés abéliennes sont 0 et A).

Considérons maintenant un corps de caractéristique nulle K et une variété abélienne non nulle C sur K. Nous lui associons l'ensemble $\mathcal{C}$ de toutes les variétés abéliennes qui sont isogènes à une sous-variété abélienne d'une puissance de C. En d'autres termes, il existe des variétés abéliennes simples $C_1, \ldots, C_t$ deux à deux non isogènes et des entiers $q_1, \ldots, q_t \geq 1$ tels que C est isogène à

$$C_1^{q_1} \times \cdots \times C_t^{q_t}$$

et $\mathcal{C}$ est alors l'ensemble de toutes les variétés abéliennes isogènes à l'un des produits

$$C_1^{m_1} \times \cdots \times C_t^{m_t},$$

où $m_1, \ldots, m_t$ parcourent tous les entiers naturels. Nous notons aussi $\mathcal{C}'$ l'ensemble des variétés isogènes à un tel produit où les m_i sont tous non nuls. Notre objectif est de contrôler la totalité de l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}$ à l'aide d'une unique classe d'isogénie $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$ que nous introduisons maintenant.

Comme K est de caractéristique nulle, le rang du $\mathbb{Z}$-module $\operatorname{End} C_i$ satisfait $\operatorname{rg} \operatorname{End} C_i \mid 2 \dim C_i$. Nous pouvons donc définir $\mathcal{C}_0$ comme la classe d'isogénie de

$$C_1^{2 \dim C_1 / \operatorname{rg} \operatorname{End} C_1} \times \cdots \times C_t^{2 \dim C_t / \operatorname{rg} \operatorname{End} C_t}.$$

Pour alléger, nous notons dans cette introduction n la dimension commune des éléments de $\mathcal{C}_0$ c'est-à-dire

$$n = \sum_{i=1}^{t} \frac{2(\dim C_i)^2}{\operatorname{rg} \operatorname{End} C_i}.$$

Nous faisons maintenant l'hypothèse cruciale que

$$\mathcal{C}_0 \text{ est finie.}$$

Comme nous l'avons déjà mentionné ci-dessus, ceci est automatique si le corps K est une extension de type fini de $\mathbb{Q}$ (voir [**8**, p. 211]).

Pour une variété abélienne A et un nombre premier ℓ, nous notons $T_\ell(A)$ le module de Tate ℓ-adique de A. Si $A \in \mathcal{C}_0$, on vérifie que $T_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est un module libre de rang 1 sur la $\mathbb{Q}_\ell$-algèbre $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q}_\ell$. Nous notons $\mathcal{C}_{0,\#}$ la partie de $\mathcal{C}_0$ formée des variétés abéliennes A telles que, pour tout nombre premier ℓ, le module de Tate $T_\ell(A)$ est un module libre (nécessairement de rang 1) sur $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Z}_\ell$. Nous verrons plus bas que $\mathcal{C}_{0,\#}$ est non vide. La finitude de $\mathcal{C}_0$ entraîne celle de $\mathcal{C}_{0,\#}$ et permet d'introduire la quantité suivante.

Notation 1.1. – *Nous posons* $d = \max\{\operatorname{disc}(\operatorname{End} A) \mid A \in \mathcal{C}_{0,\#}\} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Nous rappelons que, lorsque $\mathcal{O}$ est un anneau et un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini, son discriminant $\operatorname{disc}(\mathcal{O})$ est la valeur absolue du déterminant de la matrice de terme général $\operatorname{Tr}_{\mathcal{O}}(x_i x_j)$ pour une base $x_1, \dots, x_s$ de $\mathcal{O}$ sur $\mathbb{Z}$ où $\operatorname{Tr}_{\mathcal{O}}$ est la trace intrinsèque sur $\mathcal{O}$ c'est-à-dire que $\operatorname{Tr}_{\mathcal{O}}(x)$ est la trace de l'endomorphisme $\mathcal{O} \to \mathcal{O}$, $y \mapsto xy$. Lorsque $\mathcal{O} = \operatorname{End} A$, ce discriminant est à rapprocher du volume $\operatorname{vol}(\mathcal{O})$ défini à travers une métrique de Rosati (voir les parties 2 et 3 de [**11**]) : en effet $\operatorname{vol}(\mathcal{O})^2$ est donné par la même formule que $\operatorname{disc}(\mathcal{O})$ à ceci près que $\operatorname{Tr}_{\mathcal{O}}$ est remplacée par la trace Tr relative à la variété abélienne A (voir page 2067 de [**11**]). Dans le cas particulier où $A \in \mathcal{C}_0$ on vérifie que ces deux traces coïncident de sorte que $\operatorname{disc}(\operatorname{End} A) = \operatorname{vol}(\operatorname{End} A)^2$. En général, il n'y a pas égalité (on pourra consulter le lemme 2.10 de [**26**] ou la partie 3 de [**23**] pour des comparaisons) et nous utiliserons dans la suite le volume qui a l'avantage de vérifier par exemple $\operatorname{vol}(\operatorname{End} A^m) = \operatorname{vol}(\operatorname{End} A)^{m^2}$ pour tout $m \geq 1$.

Le nombre d suffirait à énoncer tous nos résultats mais pour avoir des bornes un peu meilleures (en particulier pour le degré des isogénies) nous utiliserons une seconde quantité Υ. Elle fait intervenir les analogues de n et d pour une partie finie non vide $T \subset \{1, \dots, t\}$: en effet, la finitude de $\mathcal{C}_0$ entraîne celle de la classe d'isogénie $\mathcal{C}_0^{(T)}$ de

$$\prod_{i \in T} C_i^{2 \dim C_i / \operatorname{rg} \operatorname{End} C_i}$$

et nous notons n_T la dimension des éléments de $\mathcal{C}_0^{(T)}$ et

$$d_T = \max\{\operatorname{disc}(\operatorname{End} A) \mid A \in \mathcal{C}_{0,\#}^{(T)}\}$$

où $\mathcal{C}_{0,\#}^{(T)}$ est défini comme $\mathcal{C}_{0,\#}$ par liberté des modules de Tate.

Notation 1.2. – *Nous posons* $\Upsilon = \max\{d_T^{1/2n_T} \mid \emptyset \neq T \subset \{1, \dots, t\}\}$.

Bien entendu, cette définition fournit immédiatement l'encadrement $\Upsilon^2 \leq d \leq \Upsilon^{2n}$ et donc toute borne en fonction de Υ entraîne une borne en fonction de d et réciproquement.

Lorsque A est une variété quelconque de $\mathcal{C}$, donc isogène à $C_1^{m_1} \times \cdots \times C_t^{m_t}$ pour des entiers $m_1, \ldots, m_t \geq 0$, nous posons

$$e(A) = \sum_{i=1}^{t} \frac{2m_i(\dim C_i)^2}{(\operatorname{rg} \operatorname{End} C_i \cdot \operatorname{rg} Z(\operatorname{End} C_i))^{1/2}}$$

où $Z(\operatorname{End} C_i)$ est le centre de l'anneau $\operatorname{End} C_i$. Comme $\operatorname{End} C_i \otimes \mathbb{Q}$ est un corps, sa dimension sur son centre $Z(\operatorname{End} C_i) \otimes \mathbb{Q}$ est un carré. Ceci montre que la racine carrée au dénominateur est un entier, qui divise $\operatorname{rg} \operatorname{End} C_i$ donc $2 \dim C_i$. Par suite, $e(A)$ est également un entier et l'on vérifie que l'on a $\dim A \leq e(A) \leq 2(\dim A)^2$ ainsi que $e(A) \leq n \dim A$.

Nous appelons exposant d'une isogénie φ l'exposant du groupe fini $\operatorname{Ker} \varphi$ et nous notons $\exp \varphi = \exp \operatorname{Ker} \varphi$. Nous dirons qu'une variété abélienne A est à multiplication maximale ou en abrégé que A est MM lorsque l'anneau $\operatorname{End} A$ est un ordre maximal (voir chapitre 2). Cette notion, qui a été étudiée dans [**25**] (sans introduire la terminologie), joue un rôle fondamental dans le présent travail. Rappelons ses propriétés les plus utiles. Si A est une variété abélienne MM alors toute sous-variété abélienne B de A est également MM et est de plus facteur direct de A [**25**, théorème 1.2]. Ceci entraîne directement que A est un produit de variétés abéliennes simples. En regroupant les facteurs isogènes, nous constatons aussi que toute variété abélienne MM est le produit de ses composantes isotypiques (voir le chapitre 3 pour des rappels sur celles-ci). Enfin, toute variété abélienne est isogène à une variété abélienne MM [**25**, théorème 1.1]. Cette dernière propriété entraîne que la classe d'isogénie $\mathcal{C}_0$ contient une variété abélienne MM. De plus, si $A \in \mathcal{C}_0$ est MM, alors $A \in \mathcal{C}_{0,\#}$ car, pour tout nombre premier ℓ, l'ordre $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Z}_\ell$ est principal (voir le corollaire 2.4). Nous en déduisons en particulier que $\mathcal{C}_{0,\#}$ est non vide.

1.3. Résultats

Voici comment nous contrôlons isogénies, polarisations et endomorphismes en fonction de Υ et d.

THÉORÈME 1.3. – *Soit A une variété abélienne dans la classe $\mathcal{C}$, de dimension g.*

(1) *Si B est une variété abélienne isogène à A, il existe deux isogénies $A \to B$ et $B \to A$ toutes deux de degré au plus $\Upsilon^{2e(A)}$ et d'exposant au plus d.*
(2) *Il existe un faisceau inversible ample et symétrique $\mathcal{N}$ sur A avec $h^0(A, \mathcal{N}) \leq (8g)^{g/4}\Upsilon^{3e(A)/2}$.*
(3) *L'entier* $\operatorname{vol}(\operatorname{End} A)^2$ *divise* $d^{\operatorname{rg} \operatorname{End} A}$.

Toutes les bornes peuvent être améliorées si nous supposons que A est à multiplication maximale.

Théorème 1.4. – *Soit A une variété abélienne MM dans $\mathcal{C}$, de dimension g.*

(1) *Si B est une variété abélienne isogène à A, il existe deux isogénies $A \to B$ et $B \to A$ toutes deux de degré au plus $\Upsilon^{e(A)}$ et d'exposant au plus $d^{1/2}$.*
(2) *Il existe un faisceau inversible ample et symétrique $\mathcal{N}$ sur A avec $h^0(A, \mathcal{N}) \leq (8g)^{g/4}\Upsilon^{e(A)}$.*
(3) *Nous avons* $\mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A) \leq \Upsilon^{\mathrm{rg}\,\mathrm{End}\, A/2}$.

Notre résultat suivant fait intervenir, pour une variété abélienne A de $\mathcal{C}$, l'action du groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ sur les points de m-torsion de $A(\overline{K})$ (notés $A[m]$), sur le module de Tate ℓ-adique de A (noté $T_\ell(A)$) et sur le groupe de Brauer géométrique (noté $\mathrm{Br}(A_{\overline{K}}) = H^2_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$). Par un léger abus de langage, nous disons qu'un entier naturel divise $d^{1/2}$ (respectivement $2d^{3/2}$) si son carré divise l'entier d (respectivement $4d^3$).

Théorème 1.5. – *Soit A une variété abélienne dans $\mathcal{C}$, de dimension g.*

(1) *Pour toute variété abélienne B de $\mathcal{C}$ et tout entier $m \geq 1$ l'exposant du conoyau de l'application naturelle*
$$\mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)}(A[m], B[m])$$
divise $d^{1/2}$.
(2) *En notant G_ℓ l'image de la représentation*
$$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(A)$$
pour un nombre premier ℓ et $\mathbb{Z}_\ell[G_\ell]$ la sous-$\mathbb{Z}_\ell$-algèbre de $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(A)$ engendrée par G_ℓ, nous avons
$$\prod_\ell \mathrm{disc}(\mathbb{Z}_\ell[G_\ell]) \mid d.$$
Si $A \in \mathcal{C}'$, il y a égalité.
(3) *Si $\mathrm{End}\, A_{\overline{K}} = \mathrm{End}\, A$ alors l'exposant du groupe fini $\mathrm{Br}(A_{\overline{K}})^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)}$ divise $2d^{3/2}$ et son cardinal divise $(4d^3)^{g^2-1}$.*

Dans l'assertion (2), le discriminant d'une $\mathbb{Z}_\ell$-algèbre libre de rang fini est défini comme sur $\mathbb{Z}$ par le déterminant de la forme trace mais en prenant l'inverse de la valeur absolue ℓ-adique (de sorte à obtenir une puissance entière positive de ℓ). Le cas d'égalité dans cette assertion (2) fournit une autre définition possible de d en termes galoisiens.

1.4. Divisibilité

Nous verrons que, si A et B sont deux variétés abéliennes isogènes sur K, il existe deux variétés abéliennes A_1 et B_1 et une suite d'isogénies

$$(\star) \qquad A \xrightarrow{\varphi} A_1 \xrightarrow{\psi} B_1 \xrightarrow{\chi} B$$

de sorte que :

- A_1 et B_1 sont MM ;
- A_1 et B_1 sont similaires ce qui signifie qu'il existe un entier $m \geq 1$ tel que A_1^m et B_1^m sont isomorphes [**25**, p. 1174] ;
- l'isogénie φ engendre le $\operatorname{End} A_1$-module à gauche $\operatorname{Hom}(A, A_1)$;
- l'isogénie χ engendre le $\operatorname{End} B_1$-module à droite $\operatorname{Hom}(B_1, B)$.

Nous exprimerons la condition sur φ en disant que l'isogénie φ est nucléaire à gauche (et dualement χ est nucléaire à droite). Cette notion sera étudiée en détails dans le chapitre 5. Remarquons déjà que si φ est nucléaire (à gauche ou à droite) elle est de degré minimal. Ainsi, dans le cas où une telle isogénie existe (ce n'est pas vrai en général), le théorème d'isogénie consiste à majorer son degré. Dans le cas général, nous utiliserons la factorisation $(\star)$ pour majorer, de deux manières très différentes, d'une part les degrés nucléaires $\deg\varphi$ et $\deg\chi$ et d'autre part le degré entre similaires $\deg\psi$. Les autres assertions du théorème 1.3 s'établissent aussi en se ramenant au cas MM par une isogénie nucléaire (ce qui explique que les bornes soient plus petites si nous partons d'une variété qui est déjà MM).

Ici, nous nous intéressons au fait que les isogénies nucléaires satisfont des propriétés supplémentaires de divisibilité.

THÉORÈME 1.6. – *Soit $\mathcal{C}_1$ une classe d'isogénie contenue dans $\mathcal{C}$. Il existe deux isogénies nucléaires à gauche φ_1 et φ_2 entre éléments de $\mathcal{C}_1$ telles que, pour toute isogénie nucléaire à gauche ψ entre éléments de $\mathcal{C}_1$, on ait $\deg\psi \mid \deg\varphi_1$ et $\exp\psi \mid \exp\varphi_2$. De plus $\exp\varphi_2 \mid d$.*

Un exemple de Masser [**18**] montre qu'un résultat de ce type est impossible sans l'hypothèse de nucléarité. Dans son texte, il établissait une divisibilité (pour le degré) en supposant que l'anneau des endomorphismes de la variété abélienne était de la forme

$$\prod_{i=1}^{s} M_{a_i}(\mathbb{Z})$$

pour des entiers $s, a_1, \ldots, a_s \geq 1$. En remarquant que ceci est un exemple d'ordre principal (au sens qui sera précisé dans le chapitre 2), nous pouvons donner une généralisation de son énoncé.

THÉORÈME 1.7. – *Soit A une variété abélienne dans la classe $\mathcal{C}$.*

(1) *Si $\operatorname{End} A$ est principal, il existe deux isogénies $\varphi_1\colon B_1 \to A$ et $\varphi_2\colon B_2 \to A$ telles que, pour toute variété abélienne B isogène à A, il existe une isogénie $\psi\colon B \to A$ avec $\deg\psi \mid \deg\varphi_1 \leq \Upsilon^{e(A)}$ et $\exp\psi \mid \exp\varphi_2 \mid d^{1/2}$.*

(2) *S'il existe un ordre principal* $\mathcal{O}$ *tel que* $\mathcal{O} \otimes \mathbb{Q} \simeq \operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q}$ *alors il existe un entier* $c \leq \Upsilon^{2e(A)}$ *de sorte que, pour tout couple* B, B' *de variétés abéliennes isogènes à* A, *il existe une isogénie* $\psi \colon B \to B'$ *avec* $\deg \psi \mid c$ *et* $\exp \psi \mid d$.

Nous déduirons ceci du même principe que le théorème précédent car l'hypothèse de principalité permet d'assurer qu'une isogénie de degré minimal est nucléaire (voir lemme 5.5). Pour retrouver un résultat qui étend exactement le théorème 2 de [**18**], il convient bien sûr, dans le cas des corps de nombres, de combiner ces divisibilités avec la majoration de Υ (et donc de d) que nous donnons ci-dessous.

1.5. Cas des corps de nombres

Nous supposons dans ce paragraphe que K est un corps de nombres. L'hypothèse de finitude de la classe d'isogénie $\mathcal{C}_0$ faite plus haut est donc automatique ici (par le théorème de Faltings). Nous faisons à nouveau intervenir la variété abélienne C fixée initialement et qui n'avait servi qu'à définir la classe $\mathcal{C}$. Nous utilisons sa hauteur de Faltings stable $h_F(C)$ (avec la normalisation initiale de Faltings) dont on trouvera par exemple une définition au paragraphe 2.3 de [**10**].

THÉORÈME 1.8. – *Lorsque* K *est un corps de nombres, nous avons*

$$\Upsilon \leq 241(en)^{2n} n^5 [K : \mathbb{Q}] \max\left(1, \log[K : \mathbb{Q}], h_F(C) + \frac{3}{2}\dim C\right).$$

Cette estimation, jointe à $d \leq \Upsilon^{2n}$, se combine directement avec les théorèmes 1.3 à 1.7 pour donner des versions explicites de tous ces énoncés dans le cas des corps de nombres. Nous obtenons de cette façon des majorations brutes assez pointues. Nous allons maintenant formuler des résultats un peu moins fins mais plus simples d'emploi et qui nous permettront aussi de comparer avec les estimations connues jusqu'ici. L'idée consiste à majorer toutes les quantités impliquées uniquement en fonction de $[K : \mathbb{Q}]$ et de la dimension et la hauteur de Faltings de la variété abélienne A qui nous intéresse. Essentiellement, il s'agit de choisir $C = A$ comme variété de référence puis de majorer n et $e(A)$ par $2(\dim A)^2$. De façon précise, nous posons lorsque A est une variété abélienne sur K de dimension g

$$\Xi(A) = \left((7g)^{8g^2}[K : \mathbb{Q}] \max(1, \log[K : \mathbb{Q}], h_F(A))\right)^{2g^2}.$$

Nous allons donc énoncer nos résultats en fonction de cette quantité. En fait, nous pouvons aussi autoriser dans certains cas une extension du corps de base. En effet, alors que dans les paragraphes précédents une telle extension était impossible parce que le paramètre Υ était très sensible aux extensions (même la valeur de n pouvait changer), ici en revanche l'influence du corps n'apparaît qu'à travers son degré. Concrètement, nous utilisons les résultats de [**27**] pour atteindre des isogénies qui n'apparaissent qu'après extension des scalaires ou pour supprimer l'hypothèse sur les endomorphismes dans le cas du groupe de Brauer.

THÉORÈME 1.9. – *Soient A une variété abélienne de dimension g sur le corps de nombres K et L/K une extension quelconque de K.*

(1) *Si B est une variété abélienne sur K telle que A_L et B_L sont isogènes, il existe deux isogénies $A_L \to B_L$ et $B_L \to A_L$ toutes deux de degré au plus $\Xi(A)^2$ (respectivement $\Xi(A)$ si A_L est MM).*
(2) *Il existe un faisceau inversible ample et symétrique $\mathcal{N}$ sur A avec $\deg_{\mathcal{N}} A \leq \Xi(A)^{3/2}$ (respectivement $\deg_{\mathcal{N}} A \leq \Xi(A)$ si A est MM).*
(3) *Nous avons $\mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A_L) \leq \Xi(A)^{g/2}$ et, lorsque A_L est MM, nous avons $\mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A_L) \leq \Xi(A)^{1/2}$.*
(4) *Pour tout entier $m \geq 1$, l'exposant du conoyau de l'application naturelle*
$$\mathrm{End}\, A \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)}(A[m])$$
est au plus $\Xi(A)$.
(5) *Nous avons*
$$\prod_{\ell} \mathrm{disc}(\mathbb{Z}_\ell[\mathrm{Im}(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(A))]) \leq \Xi(A)^2.$$
(6) *L'exposant du groupe fini $\mathrm{Br}(A_{\overline{K}})^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)}$ est majoré par $\Xi(A)^3$ et son cardinal par $\Xi(A)^{6g^2-3g-3}$.*

L'assertion (1) améliore le théorème 1.4 de [**11**] où la borne $\Xi(A)^2$ était remplacée par
$$\kappa(A) = \Big((14g)^{64g^2}[K:\mathbb{Q}]\max(1, \log[K:\mathbb{Q}], h_F(A))^2\Big)^{1024g^3}$$
qui elle-même améliorait les résultats antérieurs de Masser et Wüstholz (non totalement explicites). L'assertion (2) raffine quant à elle le théorème 1.1 de [**11**] qui donnait $\deg_{\mathcal{N}} A \leq \kappa(A)$. Dans le cadre de (3), nous pouvions montrer $\mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A_L) \leq \kappa(A)^g$ à partir des méthodes de [**11**] : voir la proposition 2.12 de [**26**] qui est énoncée avec le discriminant mais dont la démonstration s'applique aussi au volume.

Les majorations (4), (5) et (6) sont les premières versions explicites dans cette généralité. Pour (4), Masser et Wüstholz avaient obtenu dans [**20**] une première majoration avec un exposant exponentiel en g (et la constante n'était pas explicite). Cantoral-Farfán, Tang, Tanimoto et Visse ont considéré (4) et (6) dans [**6**] lorsque A est une surface abélienne ($g = 2$) principalement polarisée : ils montrent alors que des bornes explicites existent mais sans donner de formule compacte ; à titre d'exemple, leur théorème 2.13 fournit (si $\mathrm{End}\, A_{\overline{K}} = \mathbb{Z}$) un exposant de 512 pour la hauteur de Faltings dans (4) là où nous obtenons 8. Enfin, disons que l'assertion (6) (et avant elle l'assertion (3) du théorème 1.5) est inspirée par les travaux de Skorobogatov et Zarhin [**30**] qui ont montré la finitude du groupe $\mathrm{Br}(A_{\overline{K}})^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)}$ et plus particulièrement par leur article [**23**] avec Orr.

Répétons que, si les majorations du théorème 1.9 sont plus simples à énoncer, la combinaison des théorèmes 1.3 à 1.5 avec le théorème 1.8 fournit la plupart du temps de bien meilleures estimations surtout si des propriétés supplémentaires de A sont connues. Illustrons brièvement ceci sur deux exemples (pour les isogénies). Tout d'abord si A est une courbe elliptique, on distingue deux cas : si $\operatorname{End} A = \mathbb{Z}$ alors A est MM et $e(A) = 2$; si $\operatorname{End} A \neq \mathbb{Z}$ alors $e(A) = 1$; de cette façon, les théorèmes 1.3 et 1.4 donnent la borne Υ^2 dans les deux cas pour le degré d'isogénie ce qui conduit à un exposant 2 pour la hauteur de Faltings alors que le théorème 1.9 fournit l'exposant 4 dans le cas le pire. Remarquons que cet exposant 2 est le même que celui obtenu dans le théorème 1.4 de [**10**] car la méthode que nous développons ici redonne exactement l'argument elliptique de cet article (son intérêt est d'amener le cas général au niveau de précision du cas elliptique). Comme second exemple, considérons $A = A_0^m$ où $m \geq 1$ et A_0 est une surface abélienne avec $\operatorname{rg} \operatorname{End} A_0 = 2$ mais non MM. L'exposant de la hauteur dans le théorème d'isogénie du théorème 1.9 est $4(\dim A)^2 = 16m^2$ alors que si nous revenons au théorème 1.3 il est abaissé à $2e(A) = 8m$. Nous détaillerons d'autres cas particuliers dans le chapitre 17 ci-dessous.

Mentionnons pour conclure ce paragraphe la conjecture de Coleman qui fait l'objet de [**26**] et [**23**]. Elle affirme que si K est un corps de nombres alors pour toute variété abélienne A sur K le volume $\operatorname{vol}(\operatorname{End} A)$ est borné uniquement en fonction de $[K : \mathbb{Q}]$ et de $\dim A$. Nous remarquons ici que cette conjecture équivaut à dire que Υ est borné uniquement en termes de $[K : \mathbb{Q}]$ et de n. En effet si Υ est ainsi contrôlé alors l'assertion (3) du théorème 1.3 montre que $\operatorname{vol}(\operatorname{End} A)$ l'est tandis que dans l'autre sens on utilise la majoration $\Upsilon \leq d^{2n}$ puisque d lui-même est un volume d'endomorphismes. En particulier, toutes les majorations du théorème 1.9 deviennent uniformes si la conjecture de Coleman est vraie (pour le groupe de Brauer ceci était déja établi dans [**23**]). On pourrait même se demander s'il est raisonnable de conjecturer que Υ est borné uniquement en fonction de $[K : \mathbb{Q}]$.

1.6. Principe des démonstrations

Nous esquissons dans ce paragraphe les constructions fondamentales de notre article autour de deux objets centraux notés $\Lambda(A)$ et $A^{\#}$ associés à une variété abélienne A. Ceux-ci permettent de montrer les propriétés suivantes de Υ (ou de d), déjà évoquées plus haut, qui conduisent à nos théorèmes principaux.

(P1) Υ contrôle le degré des isogénies nucléaires entre éléments de $\mathcal{C}$,

(P2) Υ contrôle le degré minimal d'une isogénie entre deux éléments MM similaires de $\mathcal{C}$,

(P3) Υ est contrôlé de manière directe par un théorème des périodes lorsque K est un corps de nombres.

Nous supposons que K est un sous-corps de $\mathbb{C}$ (on se ramène facilement à ce cas). Pour une variété abélienne A sur K, nous notons simplement Ω_A le réseau des périodes du tore complexe $A_{\mathbb{C}}$ obtenu par extension des scalaires de K à $\mathbb{C}$. Il s'agit d'un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $2 \dim A$ qui possède aussi une structure naturelle de $\operatorname{End} A$-module à gauche (conformément à nos conventions générales, nous parlons bien de $\operatorname{End} A$ et non de $\operatorname{End} A_{\mathbb{C}}$ même si celui-ci agit aussi sur Ω_A).

Nous appelons anneau de Lefschetz de A l'anneau

$$\Lambda(A) = \mathrm{End}_{\mathrm{End}\,A}\,\Omega_A.$$

Nous étudierons les propriétés remarquables de cet anneau. Par exemple, si A et B sont deux variétés abéliennes dans l'ensemble $\mathcal{C}'$ introduit au paragraphe 1.2, alors il y a un isomorphisme canonique entre $\Lambda(A) \otimes \mathbb{Q}$ et $\Lambda(B) \otimes \mathbb{Q}$ qui permet d'identifier ces deux $\mathbb{Q}$-algèbres. Puisque dans ce cas nous avons $A \times B \in \mathcal{C}'$, $\Lambda(A \times B) \otimes \mathbb{Q}$ est aussi canoniquement isomorphe à $\Lambda(A) \otimes \mathbb{Q}$. Par identification, nous voyons donc $\Lambda(A)$, $\Lambda(B)$ et $\Lambda(A \times B)$ comme trois ordres d'une même $\mathbb{Q}$-algèbre et nous avons alors $\Lambda(A \times B) = \Lambda(A) \cap \Lambda(B)$. Une autre conséquence de cette identification est que, comme la définition fait de Ω_A un $\Lambda(A)$-module à gauche, nous obtenons une action de $\Lambda(A) \otimes \mathbb{Q}$ sur $\Omega_B \otimes \mathbb{Q}$ qui donne un sens à $\Lambda(A)\Omega_B$, le sous-$\Lambda(A)$-module de $\Omega_B \otimes \mathbb{Q}$ engendré par Ω_B.

Lorsque $\varphi\colon B \to A$ est une isogénie nucléaire à gauche et que A est MM nous établirons que φ induit un isomorphisme entre $\Lambda(A)\Omega_B$ et Ω_A (lemme 9.9). Ceci donne un isomorphisme entre le noyau de φ et $\Lambda(A)\Omega_B/\Omega_B$. On en déduit facilement la divisibilité des exposants

$$\exp \varphi = \exp(\Lambda(A)\Omega_B/\Omega_B) \mid \exp(\Lambda(A)/\Lambda(A \times B))$$

(il suffit de vérifier que $\Lambda(A \times B) = \Lambda(A) \cap \Lambda(B)$ est formé des éléments de $\Lambda(A)$ qui laissent stable Ω_B). Nous avons donc un contrôle de l'exposant de φ en termes des anneaux de Lefschetz. Comme $\deg \varphi \mid (\exp \varphi)^{2 \dim A}$, nous en déduisons pour le degré

$$\deg \varphi \mid [\Lambda(A) : \Lambda(A \times B)]^{2 \dim A}$$

(nous montrerons en fait, par un argument un peu plus technique, un résultat plus fin pour le degré mais cette version suffit ici pour expliquer la démarche).

La caractéristique la plus importante de l'anneau $\Lambda(A)$ est qu'il s'incarne dans une variété abélienne : nous montrerons en effet (théorème 9.5) l'existence d'une variété abélienne $A^{\#}$ sur K avec

$$\Omega_{A^{\#}} \simeq \Lambda(A), \qquad \Lambda(A^{\#}) \simeq \Lambda(A) \quad \text{et} \quad \mathrm{End}\,A^{\#} \simeq \Lambda(A)^{\mathrm{op}}.$$

Ici, $\mathcal{O}^{\mathrm{op}}$ désigne l'anneau opposé d'un anneau $\mathcal{O}$, les deux derniers isomorphismes sont des isomorphismes d'anneaux et, modulo ceux-ci, le premier est compatible aux deux structures de module de $\Omega_{A^{\#}}$ sur $\Lambda(A^{\#})$ et $\mathrm{End}\,A^{\#}$. En fait la variété $A^{\#}$ est uniquement déterminée à isomorphisme près et est donc canoniquement associée à la variété abélienne A (le seul choix sous-jacent est celui d'un plongement de K dans $\mathbb{C}$). La construction montre aussi que $A^{\#}$ est isomorphe à une sous-variété abélienne de $A^{2 \dim A}$.

Lorsque A parcourt $\mathcal{C}'$, toutes les variétés $A^{\#}$ obtenues sont isogènes entre elles. Elles sont donc contenues dans une unique classe d'isogénie qui est exactement la classe $\mathcal{C}_0$ et elles se trouvent même dans la partie $\mathcal{C}_{0,\#} \subset \mathcal{C}_0$ introduite pour définir d car la liberté du $\mathrm{End}\,A^{\#}$-module $\Omega_{A^{\#}}$ entraîne celle des modules de Tate $T_\ell(A^{\#}) \simeq \Omega_{A^{\#}} \otimes \mathbb{Z}_\ell$ (si $A \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}'$ alors $A^{\#} \in \mathcal{C}_{0,\#}^{(T)}$ pour T une partie stricte de $\{1, \ldots, t\}$ comme dans la définition de Υ). En particulier si $A \in \mathcal{C}'$ alors $\dim A^{\#} = n$, $\operatorname{rg} \Lambda(A) = 2n$ et $\operatorname{disc} \Lambda(A) = \operatorname{vol}(\operatorname{End} A^{\#})^2 \leq d$ (cette dernière inégalité vaut même pour tout $A \in \mathcal{C}$).

Lorsque $A, B \in \mathcal{C}'$, il existe une isogénie canonique $\theta\colon (A \times B)^{\#} \to A^{\#}$: c'est la seule qui induit sur les réseaux des périodes $\Omega_{(A\times B)^{\#}} \to \Omega_{A^{\#}}$ l'inclusion $\Lambda(A \times B) \subset \Lambda(A)$ de façon compatible aux actions des anneaux de Lefschetz (lemme 9.10). En particulier, l'indice $[\Lambda(A) : \Lambda(A \times B)]$ peut se lire comme le degré de cette isogénie θ. Revenons maintenant à la situation considérée précédemment où $\varphi\colon B \to A$ est une isogénie nucléaire à gauche avec A MM. Nous supposons $A \in \mathcal{C}'$ pour simplifier. Par ce qui précède, nous avons donc $\operatorname{disc}(\Lambda(A \times B)) = (\operatorname{vol} \operatorname{End}(A \times B)^{\#})^2 \leq d$ puisque $(A \times B)^{\#} \in \mathcal{C}_0$. Avec

$$\operatorname{disc}(\Lambda(A \times B)) = (\operatorname{disc} \Lambda(A))[\Lambda(A) : \Lambda(A \times B)]^2 = (\operatorname{vol} \operatorname{End} A^{\#})^2 (\deg \theta)^2,$$

nous trouvons pour l'isogénie nucléaire φ

$$\deg \varphi \mid (\deg \theta)^{2 \dim A} \leq d^{\dim A}.$$

Cette majoration montre que le degré d'une isogénie nucléaire à gauche est borné en termes de d (et donc de Υ), ce qui remplit notre objectif (P1) au moins si le but est MM.

Pour (P2), nous procédons complètement différemment. Nous utilisons la majoration $\operatorname{vol} \operatorname{End} A^{\#} \leq d^{1/2}$ pour une variété abélienne MM. En fait, puisque A est produit de variétés abéliennes simples, il suffit de traiter le cas simple c'est-à-dire de considérer deux variétés abéliennes MM simples A et B similaires et de contrôler le degré d'une isogénie $\psi\colon A \to B$ en fonction de $\operatorname{vol} \operatorname{End} A^{\#}$. Par simplicité, tout élément non nul de $\operatorname{Hom}(A, B)$ est une isogénie donc le premier théorème de Minkowski permet de trouver un ψ dont la norme de Rosati est majorée par le volume de $\operatorname{Hom}(A, B)$ pour cette même norme. Celle-ci dépend d'un choix de polarisations sur A et B mais nous montrerons qu'il est possible de renormaliser le volume pour qu'il devienne indépendant des polarisations (chapitre 10). Ceci conduit à une majoration de $\deg \psi$ en fonction de ce volume renormalisé $\widetilde{\operatorname{vol}} \operatorname{Hom}(A, B)$ (qui coïncide avec le volume usuel de $\operatorname{End} A$ si $A = B$). Ensuite, l'hypothèse de similarité donne l'existence d'un entier $m \geq 1$ avec $A^m \simeq B^m$ qui entraîne

$$\widetilde{\operatorname{vol}} \operatorname{Hom}(A, B) = \widetilde{\operatorname{vol}} \operatorname{Hom}(A, B^m)^{1/m} = \widetilde{\operatorname{vol}} \operatorname{Hom}(A, A^m)^{1/m} = \operatorname{vol} \operatorname{End} A.$$

Enfin, nous verrons aussi que lorsque A est simple et MM, la variété $A^{\#}$ est similaire à une puissance de A (lemme 9.7) donc $\operatorname{vol}(\operatorname{End} A^{\#})$ est une puissance de $\operatorname{vol} \operatorname{End} A$ et nous pouvons comme prévu écrire la majoration de $\deg \psi$ en fonction de $\operatorname{vol}(\operatorname{End} A^{\#})$. Ceci répond donc au problème (P2).

Jusqu'ici, nous avons employé la définition de d sous la forme $\operatorname{disc} \operatorname{End} A^{\#} \leq d$ dès que $A \in \mathcal{C}'$. En fait, nous pouvons préciser cette inégalité de deux façons : d'une part nous avons même la divisibilité $\operatorname{disc} \operatorname{End} A^{\#} \mid d$ et d'autre part il existe une variété abélienne pour laquelle l'égalité est atteinte. Le premier fait montre que la majoration $\deg \varphi \leq d^{\dim A}$ vue ci-dessus pour (P1) se raffine en $\deg \varphi \mid d^{\dim A}$ et nous voyons apparaître le principe des résultats du paragraphe 1.4 : les bornes pour les isogénies nucléaires s'améliorent en des divisibilités. En revanche, il n'est pas possible de transformer la majoration pour (P2) (basée sur le théorème de Minkowski) en une divisibilité.

Pour l'égalité, nous verrons qu'il existe une unique variété abélienne de $\mathcal{C}_0$ notée $C^\flat$ telle que $d = \operatorname{disc}\operatorname{End} C^\flat$ et $(C^\flat)^\# = C^\flat$. La variété abélienne $C^\flat$ est aussi caractérisée par

$$\Lambda(C^\flat) = \bigcap_{A\in\mathcal{C}'} \Lambda(A).$$

En particulier, si $A \in \mathcal{C}'$, il existe une isogénie canonique $\theta' \colon C^\flat \to A^\#$ (analogue à θ ci-dessus) qui correspond à l'inclusion $\Lambda(C^\flat) \subset \Lambda(A)$ sur les réseaux des périodes. Nous avons alors $\deg\theta' = [\Lambda(A) : \Lambda(C^\flat)]$ d'où la formule $d = \operatorname{disc}\Lambda(A)(\deg\theta')^2$ qui donne la divisibilité annoncée.

L'existence de $C^\flat$ est aussi à la base de la propriété (P3) car c'est à elle que nous appliquons le théorème des périodes. La raison est que toute variété abélienne de la forme $A^\#$ (et donc en particulier $C^\flat$) possède une période canonique notée id qui provient de l'identité $\Omega_A \to \Omega_A$ dans $\Lambda(A)$ à travers l'isomorphisme $\Omega_{A^\#} \simeq \Lambda(A)$ et celle-ci a la propriété fondamentale de n'être contenue dans le réseau des périodes d'aucune sous-variété abélienne stricte de $A^\#$ (lemme 9.6). L'application du théorème des périodes (voir l'introduction de **[10]**) donne donc une majoration de $h^0(A^\#, \mathcal{L})$ en fonction de la norme $\|\mathrm{id}\|_{\mathcal{L}}$ de la période canonique pour tout faisceau inversible ample $\mathcal{L}$ sur $A^\#$. Un argument de géométrie des nombres permet de construire $\mathcal{L}$ de sorte que $h^0(A^\#, \mathcal{L})$ soit de l'ordre de $\operatorname{vol}(\operatorname{End} A^\#)\|\mathrm{id}\|_{\mathcal{L}}^{2\dim A^\#}$ (sans entrer dans les détails, disons simplement que l'on traite d'abord le cas MM puis l'on se ramène au cas général par isogénie) et donc le théorème des périodes conduit après calculs à une majoration de $\operatorname{vol}\operatorname{End} A^\#$. Dans le cas de $C^\flat$ c'est la majoration de d souhaitée pour (P3).

Notons encore que cette application directe du théorème des périodes évite totalement le recours à l'astuce de Zarhin (polarisation principale sur $(A \times \widehat{A})^4$) qui intervenait dans **[19]** et **[11]** et expliquait en partie la taille de l'exposant dans $\kappa(A)$. D'un autre côté, le lecteur aura remarqué que nous avons esquissé les grandes lignes des démonstrations de (P1), (P2) et (P3) en ne faisant apparaître que le paramètre d. Nous les avons pourtant énoncées avec Υ car c'est sous cette forme qu'elles apparaîtront effectivement. Ce paramètre Υ correspond à l'usage d'une notion de degré pondéré (chapitre 4) qui permet de séparer les contributions des différentes composantes isotypiques. Bien que compliquant légèrement la formulation de certains énoncés intermédiaires dans le texte, cet outil est à l'origine de raffinements significatifs. Sans lui, par exemple, nous ne pourrions obtenir les exposants avec $e(A)$ dans le théorème 1.3 et, par suite, l'exposant dans $\Xi(A)$ serait un multiple de g^3 et non de g^2.

Pour conclure cette présentation, signalons encore que $C^\flat$ contient une information de nature galoisienne : nous verrons en effet que, pour tout nombre premier ℓ, nous avons $\Lambda(C^\flat) \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq \mathbb{Z}_\ell[G_\ell]$ avec les notations de l'assertion (2) du théorème 1.5 qui devient une conséquence facile de cet isomorphisme.

1.7. Organisation du texte

Passons à présent en revue le contenu de notre article. Nous commençons par des préliminaires algébriques sur les ordres (chapitre 2). Nous introduirons ensuite la notion de support d'une variété abélienne (chapitre 3) qui facilite la description des classes de variétés abéliennes qui nous intéressent : par exemple, les ensembles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ utilisés dans cette introduction deviendront simplement l'ensemble des variétés abéliennes de support contenu dans (pour $\mathcal{C}$) ou égal à (pour $\mathcal{C}'$) celui de la variété de référence C. Dans le chapitre 4, modulo le choix d'un ordre total sur le support et d'une fonction de poids sur celui-ci, nous définissons le degré pondéré d'une isogénie ou d'une polarisation. Nous étudions ensuite en détails les propriétés des isogénies nucléaires (chapitre 5) puis nous examinons (chapitre 6) différentes propriétés de factorisations de morphismes ou de familles de morphismes entre variétés abéliennes qui conduisent en particulier à la suite d'isogénies ($\star$) mentionnée plus haut. Le chapitre 7 développe quant à lui les manipulations de noyaux d'isogénies à la base du théorème 1.6 de divisibilité.

Le cœur technique du texte est formé par les chapitres 8 et 9. Dans le second, nous définissons $\Lambda(A)$ et $A^\#$ et étudions leurs propriétés jusqu'au théorème 9.12 qui est l'étape principale vers l'assertion (P1) décrite ci-dessus. Une partie de ces résultats sur $\Lambda(A)$ s'établissent par localisation et nous ont donc conduits à présenter d'abord (chapitre 8) un avatar ℓ-adique $\Lambda_\ell(A)$ de $\Lambda(A)$ défini en termes du module de Tate $T_\ell(A)$ et qui contient déjà l'essentiel de l'information sur $\Lambda(A)$ puisque $\Lambda(A) \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq \Lambda_\ell(A)$ pour tout nombre premier ℓ.

Le chapitre 10 décrit ensuite le volume normalisé utile pour montrer (P2) tandis qu'au chapitre 11 des arguments de géométrie des nombres (améliorant ceux de la partie 4 de [**11**]) fournissent une petite polarisation sur une variété abélienne simple. Le chapitre 12 contient les estimations pour les isogénies, polarisations et volumes qui sont regroupées dans les théorèmes 1.3 et 1.4. Les majorations du théorème 1.5 sont elles démontrées dans le chapitre 13 où nous établissons aussi l'existence de $C^\flat$ (à la notation près). Les trois chapitres suivants s'articulent autour du théorème des périodes. En guise de préliminaires, nous montrons l'existence du faisceau $\mathcal{L}$ sur $A^\#$ auquel nous l'appliquerons (chapitre 14). Nous énonçons ensuite (chapitre 15) le théorème des périodes précis que nous utilisons : basé sur celui de [**10**], il doit être un peu raffiné pour inclure le degré pondéré et surtout pour ne faire intervenir que les sous-variétés abéliennes de la variété A sur K à laquelle il est appliqué (alors que dans [**10**] toutes les sous-variétés abéliennes de l'extension $A_{\overline{K}}$ intervenaient). Enfin, nous employons le théorème au chapitre 16 pour montrer le théorème 1.8.

À ce stade, l'essentiel de nos résultats sont établis. Il nous reste, au chapitre 17, à les reformuler légèrement pour aboutir exactement aux théorèmes ci-dessus et à donner quelques calculs pour le théorème 1.9. Nous faisons aussi à ce moment-là le lien entre les notations de l'introduction et celles utilisées plus loin : l'usage de C, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}'$ disparaît au profit d'un support T, Υ se note plutôt $\Upsilon(T)$ et $C^\flat$ devient $T^\flat$; de la même façon, la lettre n n'est plus réservée à la dimension des éléments de $\mathcal{C}_0$ puisque celle-ci peut être notée $\dim T^\flat$. Nous mentionnons encore dans ce chapitre d'autres cas particuliers de nos théorèmes (comme les puissances des courbes elliptiques) en vue d'applications. Finalement, le dernier chapitre contient des exemples pour illustrer le calcul de $\Lambda(A)$ et $A^\#$ dans quelques cas de variétés abéliennes A.

Même si cela sera bien sûr reprécisé au cours du texte, signalons que l'hypothèse sur le corps de base des variétés abéliennes se restreindra progressivement : il sera quelconque jusqu'au chapitre 6 et dans le chapitre 8, deviendra un corps de caractéristique nulle au chapitre 7, un sous-corps de $\mathbb{C}$ du chapitre 9 au chapitre 14 puis un corps de nombres aux chapitres 15 et 16.

Nous remercions Pascal Autissier pour ses remarques sur une version antérieure de notre texte.

CHAPITRE 2

ORDRES PRINCIPAUX ET MAXIMAUX

Nous rassemblons dans ce chapitre divers résultats préliminaires sur les ordres qui se déduisent assez directement du livre de Reiner [**24**]. Lorsque R est un anneau de Dedekind de corps des fractions K, nous appellerons R-ordre une R-algèbre $\mathcal{O}$ qui, comme R-module, est de type fini et sans torsion et telle que, pour toute extension L (corps commutatif) de K, la L-algèbre $\mathcal{O} \otimes_R L$ est semi-simple (si K est de caractéristique nulle, il suffit de vérifier que $\mathcal{O} \otimes K$ est une K-algèbre semi-simple, voir [**24**, p. 99–100]). L'absence de torsion montre que $\mathcal{O}$ est un sous-anneau de $\mathcal{O} \otimes K$; on dit aussi que $\mathcal{O}$ est un R-ordre de la K-algèbre $\mathcal{O} \otimes K$. Un R-ordre $\mathcal{O}$ est dit maximal lorsque le seul R-ordre $\mathcal{O}'$ de $\mathcal{O} \otimes K$ tel que $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ est $\mathcal{O}$ lui-même. Les cas que nous utiliserons correspondent à $R = \mathbb{Z}$ (on abrège alors $\mathbb{Z}$-ordre en ordre) et aux anneaux d'entiers ℓ-adiques $R = \mathbb{Z}_\ell$ (pour tout nombre premier ℓ). Le lien avec les variétés abéliennes vient bien sûr du fait que si A est une variété abélienne (sur un corps quelconque) alors l'anneau des endomorphismes $\operatorname{End} A$ est un ordre.

Lorsque M est un sous-R-module de type fini de $\mathcal{O} \otimes K$, nous définissons ses ordres à gauche et à droite par

$$\mathcal{O}_g(M) = \{x \in \mathcal{O} \otimes K \mid xM \subset M\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{O}_d(M) = \{x \in \mathcal{O} \otimes K \mid Mx \subset M\}.$$

On vérifie que ce sont bien des R-ordres de la K-algèbre $\mathcal{O} \otimes K$ (voir [**24**, p. 109]). Remarquons une fois pour toutes que l'hypothèse de semi-simplicité que nous avons imposée dans la définition d'un R-ordre $\mathcal{O}$ entraîne que l'algèbre $\mathcal{O} \otimes K$ est séparable selon la terminologie de Reiner (voir [**24**, (7.18)]) et nous permet donc d'utiliser tous les énoncés de son livre qui reposent sur cette hypothèse comme c'est le cas de ceux des paragraphes 10, 11 et 22 par exemple.

Un anneau $\mathcal{O}$ est dit principal à gauche si tous ses idéaux à gauche sont principaux c'est-à-dire s'écrivent $\mathcal{O}x$ pour $x \in \mathcal{O}$. Il est dit principal à droite si tous ses idéaux à droite s'écrivent $x\mathcal{O}$ pour $x \in \mathcal{O}$. Dans le cas des R-ordres (R et K étant fixés comme ci-dessus), nous disposons des propriétés suivantes.

Proposition 2.1. – *Lorsque $\mathcal{O}$ est un R-ordre, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *$\mathcal{O}$ est principal à gauche.*

(2) *$\mathcal{O}$ est principal à droite.*
(3) *Tout idéal à gauche $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}$ tel que $\mathcal{I} \otimes K = \mathcal{O} \otimes K$ est principal.*
(4) *Tout idéal à droite $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}$ tel que $\mathcal{I} \otimes K = \mathcal{O} \otimes K$ est principal.*

De plus, si $\mathcal{O}$ vérifie ces conditions, il est maximal.

Démonstration. Commençons par établir que (3) entraîne la maximalité de $\mathcal{O}$. D'après le corollaire (10.4) de **[24]**, il existe un R-ordre maximal $\mathcal{O}'$ tel que $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}' \subset \mathcal{O} \otimes K$. Comme le R-module $\mathcal{O}'$ est de type fini, il existe $r \in R \setminus \{0\}$ tel que $r\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$. Alors $\mathcal{I} = r\mathcal{O}'$ est un idéal à gauche de $\mathcal{O}$ qui vérifie $\mathcal{I} \otimes K = \mathcal{O} \otimes K$. Par (3) il existe $x \in \mathcal{O}$ avec $r\mathcal{O}' = \mathcal{O}x$. Notons $y = r^{-1}x \in \mathcal{O} \otimes K$. L'inclusion $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}' = \mathcal{O}y$ donne $1 \in \mathcal{O}y$ d'où $y \in (\mathcal{O} \otimes K)^\times$ et $y^{-1} \in \mathcal{O}$. Puisque $\mathcal{O}'$ est un anneau, $y^2 \in \mathcal{O}' = \mathcal{O}y$ d'où $y = (y^2)y^{-1} \in \mathcal{O}$. Ainsi $y \in \mathcal{O}^\times$ donc $\mathcal{O} = \mathcal{O}y = \mathcal{O}'$ est bien maximal. Montrons maintenant (3) $\Longrightarrow$ (1). Soit $\mathcal{I}$ un idéal à gauche de $\mathcal{O}$. Parce que la K-algèbre $\mathcal{O} \otimes K$ est semi-simple et artinienne, l'idéal à gauche $\mathcal{I} \otimes K$ de $\mathcal{O} \otimes K$ admet un supplémentaire (voir l'implication (i) $\Longrightarrow$ (iv) de [**24**, (7.1)]) c'est-à-dire un idéal à gauche $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O} \otimes K$ tel que $\mathcal{O} \otimes K = (\mathcal{I} \otimes K) \oplus \mathcal{J}$. Considérons alors les idéaux à gauche $\mathcal{I}' = \mathcal{J} \cap \mathcal{O}$ et $\mathcal{I} \oplus \mathcal{I}'$ de $\mathcal{O}$. Puisque $(\mathcal{I} \oplus \mathcal{I}') \otimes K = \mathcal{O} \otimes K$, l'hypothèse (3) montre qu'il existe $x \in \mathcal{O}$ avec $\mathcal{I} \oplus \mathcal{I}' = \mathcal{O}x$. Écrivons $x = a + b$ avec $a \in \mathcal{I}$ et $b \in \mathcal{I}'$. Une vérification directe fournit $\mathcal{I} = \mathcal{O}a$. Nous avons donc bien (3) $\Longrightarrow$ (1) et même (3) $\Longleftrightarrow$ (1) puisque l'autre implication est tautologique. En considérant l'anneau opposé, nous en déduisons (4) $\Longleftrightarrow$ (2). Il reste seulement à voir (3) $\Longleftrightarrow$ (4) ou même seulement (3) $\Longrightarrow$ (4) par le même argument d'anneau opposé. Supposons donc (3) et soit $\mathcal{I}$ un idéal à droite de $\mathcal{O}$ tel que $\mathcal{I} \otimes K = \mathcal{O} \otimes K$. D'après le corollaire (22.8) de **[24]**, $\mathcal{I}^{-1} = \{x \in \mathcal{O} \otimes K \mid \mathcal{I}x\mathcal{I} \subset \mathcal{I}\}$ a pour ordre à gauche $\mathcal{O}$ donc il existe $r \in R \setminus \{0\}$ tel que $r\mathcal{I}^{-1} \subset \mathcal{O}$ est un idéal à gauche de $\mathcal{O}$. Par hypothèse, $r\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{O}x$ pour $x \in \mathcal{O}$. Par le théorème (22.7) de **[24]**, $\mathcal{I} = (\mathcal{I}^{-1})^{-1} = (\mathcal{O}xr^{-1})^{-1} = rx^{-1}\mathcal{O}$. Cette principalité clôt la démonstration. □

Au vu de ces propriétés, nous dirons simplement qu'un R-ordre est principal lorsqu'il satisfait les conditions (1) à (4). Contrairement à la terminologie dans le cas commutatif, nous ne demandons pas qu'un R-ordre principal soit intègre.

Lemme 2.2. – *Soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ des R-ordres.*

(1) *$\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ sont principaux si et seulement si $\mathcal{O} \times \mathcal{O}'$ est un R-ordre principal.*
(2) *Si $\mathcal{O}$ est principal alors, pour tout entier $n \geq 1$, l'algèbre de matrices $M_n(\mathcal{O})$ est un R-ordre principal.*
(3) *Si $\mathcal{O}$ est un R-ordre principal, tous les ordres maximaux de $\mathcal{O} \otimes K$ sont principaux.*

Démonstration. (1) Tout idéal à gauche de $\mathcal{O} \times \mathcal{O}'$ s'écrit comme le produit de deux idéaux à gauche de $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ respectivement. (2) Comme la multiplication à gauche autorise les opérations élémentaires sur les lignes, un idéal à gauche de $M_n(\mathcal{O})$ est entièrement déterminé par le sous-$\mathcal{O}$-module de $\mathcal{O}^n$ engendré par les lignes des matrices de l'idéal. Il est principal si et seulement si ce module est engendré par n

éléments de $\mathcal{O}^n$, propriété qui est satisfaite si $\mathcal{O}$ est principal. (3) Soit $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O} \otimes K$ un ordre maximal. Il existe un idéal à gauche $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}$ tel que $\mathcal{O}_1$ soit l'ordre à droite de $\mathcal{I}$: $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_d(\mathcal{I})$ (voir [**24**, (22.21)]). Par hypothèse, nous pouvons écrire $\mathcal{I} = \mathcal{O}a$ avec $a \in (\mathcal{O} \otimes K)^\times$ donc $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_d(\mathcal{O}a) = \{x \in \mathcal{O} \otimes K \mid \mathcal{O}ax \subset \mathcal{O}a\} = a^{-1}\mathcal{O}a$. Ainsi $\mathcal{O}_1$ est conjugué donc isomorphe à $\mathcal{O}$ et en particulier il est principal. □

En général, il existe des R-ordres maximaux non principaux (par exemple si $R = \mathbb{Z}$, choisir pour $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{-2019})$) mais ce n'est pas vrai dans le cas local.

PROPOSITION 2.3. – *Soient R un anneau de valuation discrète complet et $\mathcal{O}$ un R-ordre. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *$\mathcal{O}$ est maximal.*
(2) *$\mathcal{O}$ est principal.*
(3) *Il existe un isomorphisme de R-algèbres*

$$\mathcal{O} \simeq \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(\Delta_i),$$

où $r \geq 0$ et $n_1, \ldots, n_r \geq 1$ sont des entiers et chaque Δ_i est un R-ordre principal qui est un anneau local intègre.

Démonstration. (3) $\Longrightarrow$ (2) découle du lemme précédent et (2) $\Longrightarrow$ (1) résulte de la proposition 2.1. Montrons (1) $\Longrightarrow$ (3) : par semi-simplicité $\mathcal{O} \otimes K$ s'écrit comme $\prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$ où D_i est un corps (gauche). La projection de $\mathcal{O}$ sur $M_{n_i}(D_i)$ est un R-ordre $\mathcal{O}_i$ de sorte que $\mathcal{O} \subset \prod_{i=1}^{r} \mathcal{O}_i$. La maximalité entraîne qu'il y a égalité et que chaque $\mathcal{O}_i$ est maximal. D'après [**24**, (12.8)], D_i contient un unique R-ordre maximal Δ_i et celui-ci est local, intègre et principal (tous les idéaux sont même bilatères et puissances de l'idéal maximal). Ensuite [**24**, (17.3)] montre que tout ordre maximal de $M_{n_i}(D_i)$ est isomorphe à $M_{n_i}(\Delta_i)$ (précisément (17.3) suppose que K est le centre de D_i mais (10.5)(iii) montre que c'est vrai sans cette hypothèse). □

Mentionnons le principe local-global (dans le cas qui nous intéresse).

COROLLAIRE 2.4. – *Si $\mathcal{O}$ est un ordre, il y a équivalence entre :*

(1) *$\mathcal{O}$ est maximal.*
(2) *$\mathcal{O} \otimes \mathbb{Z}_\ell$ est maximal pour tout nombre premier ℓ.*
(3) *$\mathcal{O} \otimes \mathbb{Z}_\ell$ est principal pour tout nombre premier ℓ.*

Démonstration. (1) $\Longleftrightarrow$ (2) est conséquence de [**24**, (11.6)] tandis que (2) $\Longleftrightarrow$ (3) découle de la proposition précédente. □

Enfin nous utiliserons un énoncé de structure de modules sur des anneaux de matrices.

LEMME 2.5. – *Soient Δ un R-ordre intègre et principal, $n \geq 1$ un entier et M un $M_n(\Delta)$-module à gauche de type fini. Si M est sans torsion comme R-module alors il existe un entier $m \geq 0$ tel que l'on ait un isomorphisme de $M_n(\Delta)$-modules à gauche $M \simeq M_{n,m}(\Delta)$.*

Démonstration. Supposons dans un premier temps $n = 1$. Puisqu'il est sans R-torsion, M s'injecte dans le $\Delta \otimes K$-espace vectoriel à gauche $M \otimes K$ de dimension finie notée m. Si $m \geq 1$, nous pouvons lui appliquer le théorème (27.8) de **[24]** qui montre que $M \simeq \Delta^{m-1} \oplus I$ pour un idéal à gauche (non nul) I de Δ. Par hypothèse I est principal et, comme Δ est intègre, $I \simeq \Delta$. Ainsi $M \simeq \Delta^m$ (y compris si $m = 0$) d'où le résultat. Lorsque n est quelconque, notons $e_i \in M_n(\Delta)$ pour $1 \leq i \leq n$ la matrice dont le seul coefficient non nul est celui d'indice (i, i) égal à 1. Puisque la somme des e_i vaut la matrice identité, nous avons $M = \bigoplus_{i=1}^n e_i M$. Chaque $e_i M$ est un Δ-module à gauche et ils sont tous isomorphes comme on le voit en faisant agir les matrices de permutations. D'après le cas $n = 1$, $e_i M$ est isomorphe à Δ^m pour un entier $m \geq 0$. Ceci fournit un isomorphisme $M \simeq \Delta^{mn}$ de Δ-modules et l'on vérifie que la structure de $M_n(\Delta)$-module est bien celle donnée par la multiplication matricielle à gauche sur $M_{n,m}(\Delta)$. □

CHAPITRE 3

SUPPORT D'UNE VARIÉTÉ ABÉLIENNE

Nous introduisons dans ce chapitre des notations qui facilitent considérablement la manipulation des composantes isotypiques des variétés abéliennes.

Un corps de base K étant fixé une fois pour toutes, nous ne considérons que des variétés abéliennes sur K sans le repréciser et cela vaut aussi pour les notions de simplicité ou d'isogénie.

DÉFINITION 3.1. – *Nous notons S l'ensemble des classes d'isogénie de variétés abéliennes simples. Si A est une variété abélienne, son* support *est la partie de S formée des classes des sous-variétés abéliennes simples de A. Nous le notons* $\operatorname{Supp} A \subset S$.

On vérifie directement que deux variétés abéliennes isogènes ont le même support (ainsi $\operatorname{Supp} \widehat{A} = \operatorname{Supp} A$ pour la variété duale), que si B est une sous-variété abélienne ou un quotient de A alors $\operatorname{Supp} B \subset \operatorname{Supp} A$ et que le support d'un produit est l'union des supports.

Nous rappelons qu'une variété abélienne est dite isotypique si elle est isogène à la puissance d'une variété abélienne simple. Les composantes isotypiques d'une variété abélienne sont ses sous-variétés abéliennes isotypiques maximales (pour une liste de propriétés élémentaires de celles-ci, nous renvoyons au paragraphe 3.2 de [**26**]). Ainsi, d'après notre définition, une variété abélienne est isotypique si et seulement si son support est un singleton. Plus généralement, le support d'une variété abélienne est en bijection avec l'ensemble de ses composantes isotypiques : en effet, toute sous-variété abélienne simple est contenue dans une composante, deux sous-variétés abéliennes simples isogènes sont contenues dans la même composante et réciproquement toute composante isotypique contient au moins une sous-variété abélienne simple et si elle en contient deux elles sont isogènes. En particulier, le support est toujours une partie finie de S.

NOTATION 3.2. – *Soient A une variété abélienne et T une partie de S. Nous notons A_T la plus grande sous-variété abélienne de A dont le support est contenu dans T. Lorsque T est un singleton $\{x\}$ nous écrivons $A_x = A_T$.*

Cette notation rend explicite la bijection précédente : elle s'écrit à présent $x \mapsto A_x$ et nous avons $\operatorname{Supp} A = \{x \in S \mid A_x \neq 0\}$. De la même façon, pour une partie T de S, nous constatons $A_T = \sum_{x \in T} A_x$. L'application de somme de l'assertion (2) du lemme 3.2 de [**26**] se voit comme une isogénie canonique

$$\Phi_A \colon \prod_{x \in S} A_x \longrightarrow A$$

où dans le produit seuls un nombre fini de facteurs sont non nuls. Cette écriture des composantes isotypiques sous la forme A_x, $x \in \operatorname{Supp} A$, n'est bien sûr qu'un moyen canonique de les énumérer mais il s'avère fort commode, par exemple lorsque nous disposons de deux variétés abéliennes A et B : tout morphisme $\varphi \colon A \to B$ respecte les composantes isotypiques et ceci s'écrit simplement $\varphi(A_x) \subset B_x$ pour tout $x \in S$. Un peu plus généralement, introduisons encore une notation qui sera importante dès le chapitre suivant.

NOTATION 3.3. – *Soient $\varphi \colon A \to B$ un morphisme de variétés abéliennes et T une partie de S. Nous notons $\varphi_T \colon A_T \to B_T$ le morphisme induit par φ.*

De manière cohérente, nous notons aussi $\varphi_x = \varphi_{\{x\}}$ pour $x \in S$. Voici quelques propriétés élémentaires de ces morphismes induits entre composantes isotypiques.

LEMME 3.4. – *Soit $\varphi \colon A \to B$ un morphisme de variétés abéliennes.*

(1) *φ est surjectif si et seulement si φ_x est surjectif pour tout $x \in S$.*
(2) $\operatorname{Ker} \varphi$ *est fini si et seulement si* $\operatorname{Ker} \varphi_x$ *est fini pour tout $x \in S$.*
(3) *φ est une isogénie si et seulement si φ_x est une isogénie pour tout $x \in S$.*

Démonstration. Ces trois propriétés découlent immédiatement du fait que

$$\Phi_B \circ \left(\prod_{x \in S} \varphi_x \right) = \varphi \circ \Phi_A$$

sachant que Φ_A et Φ_B sont des isogénies. □

La formule que nous venons d'écrire montre aussi que, pour tout couple de variétés abéliennes A et B, l'application

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}(A, B) & \longrightarrow & \prod_{x \in S} \operatorname{Hom}(A_x, B_x) \\ \varphi & \longmapsto & (\varphi_x)_{x \in S} \end{array}$$

est injective et de conoyau fini (généralisation de l'assertion (7) de lemme 3.2 de [**26**]) puisque si nous identifions son but à

$$\operatorname{Hom}\left(\prod_{x \in S} A_x, \prod_{x \in S} B_x \right),$$

alors elle s'écrit $\varphi \mapsto \Phi_B^{-1} \circ \varphi \circ \Phi_A$, clairement injective et de conoyau annulé par $\deg \Phi_A$.

Voici encore la traduction en termes de morphismes de quelques relations entre supports.

LEMME 3.5. – *Soient A, B et C trois variétés abéliennes.*

(1) *Nous avons* $\operatorname{Supp} A \cap \operatorname{Supp} B = \emptyset$ *si et seulement si* $\operatorname{Hom}(A, B) = 0$.
(2) *Nous avons* $\operatorname{Supp} A \subset \operatorname{Supp} B$ *si et seulement s'il existe un entier n et un morphisme surjectif $B^n \to A$.*
(3) *Nous avons* $\operatorname{Supp} A \cap \operatorname{Supp} B \subset \operatorname{Supp} C$ *si et seulement si le sous-$\mathbb{Z}$-module* $\operatorname{Hom}(C, B) \circ \operatorname{Hom}(A, C)$ *de* $\operatorname{Hom}(A, B)$ *est d'indice fini.*

Démonstration. (2) S'il existe un morphisme surjectif $B^n \to A$ alors, par l'assertion (1) du lemme précédent, l'application induite $B_x^n \to A_x$ est surjective pour tout $x \in S$. Ainsi $A_x \neq 0$ force $B_x \neq 0$ ce qui signifie bien $\operatorname{Supp} A \subset \operatorname{Supp} B$. Réciproquement, si cette inclusion vaut, pour $x \in \operatorname{Supp} A$, les deux variétés A_x et B_x sont isogènes à des puissances non nulles d'une même variété abélienne simple donc il existe un entier n_x et une surjection $B_x^{n_x} \to A_x$. Avec $n = \max\{n_x \mid x \in \operatorname{Supp} A\}$, nous avons un morphisme surjectif $B_x^n \to A_x$ pour tout $x \in S$ donc une surjection

$$\left(\prod_{x \in S} B_x\right)^n \longrightarrow \prod_{x \in S} A_x$$

puis le résultat souhaité grâce aux isogénies Φ_B et Φ_A. (3) Nous avons vu que $\operatorname{Hom}(A, B)$ était d'indice fini dans le produit des $\operatorname{Hom}(A_x, B_x)$. En utilisant ceci pour les trois modules d'homomorphismes, nous devons montrer que l'inclusion de l'énoncé vaut si et seulement si $\operatorname{Hom}(C_x, B_x) \circ \operatorname{Hom}(A_x, C_x)$ est d'indice fini dans $\operatorname{Hom}(A_x, B_x)$ pour tout $x \in S$, ou même pour tout $x \in \operatorname{Supp} A \cap \operatorname{Supp} B$ puisque sinon $A_x = 0$ ou $B_x = 0$ donne $\operatorname{Hom}(A_x, B_x) = 0$. En d'autres termes, il s'agit de voir que pour $x \in \operatorname{Supp} A \cap \operatorname{Supp} B$ le sous-module $\operatorname{Hom}(C_x, B_x) \circ \operatorname{Hom}(A_x, C_x)$ de $\operatorname{Hom}(A_x, B_x)$ est d'indice fini si et seulement si $C_x \neq 0$. En remplaçant chaque composante isotypique par une variété isogène, cela découle du fait immédiat que, pour une variété abélienne non nulle D et trois entiers n, m, ℓ avec $nm \neq 0$, l'inclusion $\operatorname{Hom}(D^\ell, D^m) \circ \operatorname{Hom}(D^n, D^\ell) \subset \operatorname{Hom}(D^n, D^m)$ est une égalité si $\ell \neq 0$ mais l'inclusion du sous-module nul dans un module infini si $\ell = 0$ (on peut par exemple écrire $\operatorname{Hom}(D^n, D^m) = M_{m,n}(\operatorname{End} D)$ et ainsi de suite). Enfin (1) est un cas particulier (facile) de (3) avec $C = 0$. □

La conclusion de l'assertion (2) signifie aussi que A est isogène à une sous-variété abélienne d'une puissance de B. Remarquons que cette condition (sous la forme de l'énoncé) apparaît dans le lemme 2.2 de **[25]** dont la dernière phrase peut être reformulée en disant que l'application en question est injective si et seulement si $\operatorname{Supp} C \subset \operatorname{Supp} A$. De son côté, l'assertion (3) permet de renforcer le lemme 3.4 de **[11]** : au lieu de l'hypothèse *ad hoc* que A ou B est isogène à une sous-variété abélienne de C, il est valable sous la condition plus faible (et minimale) que $\operatorname{Supp} A \cap \operatorname{Supp} B \subset \operatorname{Supp} C$ (puisque la démonstration utilise seulement que $\operatorname{Hom}(C, B) \circ \operatorname{Hom}(A, C)$ engendre $\operatorname{Hom}(A, B) \otimes \mathbb{Q}$).

NOTATION 3.6. – *Pour une variété abélienne A nous notons d_A l'application*

$$S \longrightarrow \mathbb{N}, \qquad x \longmapsto \dim A_x.$$

On constate que deux variétés abéliennes A et B sont isogènes si et seulement si $d_A = d_B$. Par suite, l'ensemble des classes d'isogénie est en bijection avec l'ensemble des applications $f\colon S \to \mathbb{N}$ presque nulles (c'est-à-dire dont le support $\{x \in S \mid f(x) \neq 0\}$ est fini). Un peu plus généralement $d_B \leq d_A$ équivaut à l'existence d'un morphisme $B \to A$ de noyau fini ou encore d'une surjection $A \to B$.

Nous pouvons distinguer les éléments de S suivant le type d'endomorphismes des variétés simples correspondantes. Nous souhaitons en particulier isoler ceux ayant multiplication complexe. Comme nous ne faisons pas d'extension de corps, nous travaillons avec la propriété suivante.

DÉFINITION 3.7. – *Une variété abélienne A est dite CM′ si* $\operatorname{End} A$ *contient un ordre commutatif de rang* $2 \dim A$ *(comme $\mathbb{Z}$-module).*

On vérifie que cette notion est stable par isogénie, produit ou passage à une sous-variété abélienne, ce qui entraîne qu'il existe une partie $S_{\mathrm{CM}'}$ de S telle qu'une variété abélienne A est CM′ si et seulement si $\operatorname{Supp} A \subset S_{\mathrm{CM}'}$.

Usuellement on dit plutôt que A est CM lorsque $A_{\overline{K}}$ est CM′. Par exemple, une courbe elliptique sur $K = \mathbb{Q}$ peut être CM ou non mais elle n'est jamais CM′ (en fait si $K = \mathbb{Q}$ l'ensemble $S_{\mathrm{CM}'}$ est vide). Nous avions introduit dans **[12]** (et utilisé dans **[26]**) une autre propriété : nous disions que A est CCM (complètement CM) lorsqu'elle est CM et que $\operatorname{End} A = \operatorname{End} A_{\overline{K}}$. Nous avons directement les implications suivantes :

$$A \text{ CCM} \Longrightarrow A \text{ CM}' \Longrightarrow A \text{ CM}.$$

Il nous semble que cette notion intermédiaire CM′ est plus pertinente que CCM. En premier lieu, elle dépend uniquement de A sans aucune référence à $A_{\overline{K}}$. Nous verrons plus bas que c'est aussi la définition qui intervient naturellement dans ce travail. Ici remarquons que tous les résultats de **[12]** énoncés avec l'hypothèse CCM sont en fait valables sous la condition plus faible CM′ : il suffit de le voir pour la proposition et la démonstration de celle-ci s'adapte presque sans changements (les variétés abéliennes A_i qui interviennent ne sont plus nécessairement géométriquement simples mais elles sont CM′ ce qui suffit à assurer que E_i est un corps CM et le théorème fondamental de la multiplication complexe s'applique même si l'image de ι n'est pas $\operatorname{End} A_{\mathbb{C}} \otimes \mathbb{Q}$ tout entier).

En revanche, dans **[26]**, ce problème de définition a entraîné une confusion que nous corrigeons ici : la proposition 2.6 est incorrecte telle qu'énoncée, il faut remplacer CCM par CM′ (l'erreur est dans le paragraphe qui précède : l'égalité $\delta e = 2g$ n'entraîne pas $\operatorname{End} A_{\overline{K}} = \operatorname{End} A$; en revanche elle signifie exactement que A est CM′).

Heureusement, ceci n'a aucune influence sur les autres énoncés de [**26**] puisque, lors des deux applications de cette proposition 2.6 (dans les démonstrations des propositions 1.2 et 2.9), on utilise (à travers la proposition 2.7) le résultat de [**12**] qui, comme nous venons de le voir, reste valide avec CM′ au lieu de CCM. Remarquons encore que, dans le langage du présent texte, la proposition corrigée s'énonce : si A est MM et $\operatorname{Supp} A \cap S_{\mathrm{CM}'} = \emptyset$ alors toute isogénie cyclique de source A est nucléaire à droite (voir ci-dessous la définition 5.1).

Nous terminons par un lemme technique qui nous sera utile par la suite.

LEMME 3.8. – *Soient A et B deux variétés abéliennes. Il existe un unique élément $\alpha \in (\operatorname{Hom}(A,B)\circ\operatorname{Hom}(B,A))\otimes\mathbb{Q}$ tel que pour tous $\psi \in \operatorname{Hom}(B,A)$ et $\varphi \in \operatorname{Hom}(A,B)$ on ait $\psi\circ\alpha = \psi$ et $\alpha\circ\varphi = \varphi$. De plus α est un élément central de $\operatorname{End} B\otimes\mathbb{Q}$ et on a $\alpha = \mathrm{id}_B$ si et seulement si $\operatorname{Supp} B \subset \operatorname{Supp} A$.*

Démonstration. Montrons d'abord l'unicité. Si α et β sont deux éléments vérifiant les conditions demandées, nous pouvons les écrire

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \circ \psi_i \qquad \text{et} \qquad \beta = \sum_{i=1}^{m} \varphi'_i \circ \psi'_i$$

où $\varphi_i, \varphi'_i \in \operatorname{Hom}(A,B)\otimes\mathbb{Q}$ et $\psi_i, \psi'_i \in \operatorname{Hom}(B,A)\otimes\mathbb{Q}$; alors

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i\circ\psi_i\circ\beta = \alpha\circ\beta = \sum_{i=1}^{m} \alpha\circ\varphi'_i\circ\psi'_i = \beta.$$

Pour l'existence, notons $T = \operatorname{Supp} A \cap \operatorname{Supp} B$. Puisque l'application de restriction

$$\operatorname{End} B \longrightarrow \operatorname{End} B_T \times \operatorname{End} B_{S\setminus T}$$

est injective et de conoyau fini, nous pouvons définir α par $\alpha_T = \mathrm{id}_{B_T}$ et $\alpha_{S\setminus T} = 0$. De plus, dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\operatorname{Hom}(A,B)\circ\operatorname{Hom}(B,A))\otimes\mathbb{Q} & \longrightarrow & (\operatorname{End} B)\otimes\mathbb{Q} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ (\operatorname{Hom}(A_T,B_T)\circ\operatorname{Hom}(B_T,A_T))\otimes\mathbb{Q} & \longrightarrow & (\operatorname{End} B_T)\otimes\mathbb{Q}, \end{array}$$

les flèches de gauche et du bas sont des isomorphismes (pour la seconde cela découle de l'assertion (3) du lemme précédent) donc $\alpha \in (\operatorname{Hom}(A,B)\circ\operatorname{Hom}(B,A))\otimes\mathbb{Q}$. Pour vérifier les relations de l'énoncé ($\varphi = \alpha\circ\varphi$ et $\psi = \psi\circ\alpha$) et la centralité ($\alpha\circ\chi = \chi\circ\alpha$ pour $\chi \in \operatorname{End} B$) il suffit de les montrer après application de $(\cdot)_T$ et $(\cdot)_{S\setminus T}$ où elles deviennent évidentes ($\varphi_{S\setminus T}$ et $\psi_{S\setminus T}$ étant nuls). Enfin la construction montre aussi $\alpha = \mathrm{id}_B$ si et seulement si $B_{S\setminus T} = 0$ soit $\operatorname{Supp} B = T$ ou encore $\operatorname{Supp} B \subset \operatorname{Supp} A$. $\square$

CHAPITRE 4

DEGRÉS PONDÉRÉS

En nous appuyant sur le formalisme du chapitre précédent, nous introduisons maintenant des notions de pondération des degrés d'isogénies et de faisceaux inversibles qui seront cruciales pour séparer les contributions des composantes isotypiques. Lorsque A est une variété abélienne, $\preceq$ un ordre sur S et $x \in S$, nous notons $A_{\preceq x}$ la sous-variété abélienne $A_{\{y \in S | y \preceq x\}}$ et de même pour $A_{\prec x}$ ou $\varphi_{\preceq x}$ et $\varphi_{\prec x}$ lorsque φ est un morphisme de variétés abéliennes.

DÉFINITION 4.1. – *Soient $\preceq$ un ordre total sur S et $p\colon S \to \mathbb{R}$ une application.*

(1) *Pour une isogénie $\varphi\colon A \to B$ entre variétés abéliennes, on pose*
$$\mathcal{D}(\varphi, \preceq, p) = \prod_{x \in S} \left(\frac{\deg \varphi_{\preceq x}}{\deg \varphi_{\prec x}} \right)^{p(x)}.$$

(2) *Pour un faisceau inversible ample $\mathcal{L}$ sur une variété abélienne A, on pose*
$$\mathcal{D}(\mathcal{L}, \preceq, p) = \prod_{x \in S} \left(\frac{h^0(A_{\preceq x}, \mathcal{L})}{h^0(A_{\prec x}, \mathcal{L})} \right)^{p(x)}.$$

(3) *Pour une variété abélienne A, on pose*
$$\mathcal{D}(A, \preceq, p) = \prod_{x \in S} \operatorname{Card}(A_x \cap A_{\prec x})^{p(x)}.$$

La finitude du support assure que chaque produit est un produit fini (puisque si $x \notin \operatorname{Supp} A$ le facteur correspondant vaut 1) et donc que ces formules définissent bien des nombres réels strictement positifs. Lorsque p est la fonction constante égale à 1, nous trouvons avec les notations de (1) et (2) : $\mathcal{D}(\varphi, \preceq, p) = \deg \varphi$ et $\mathcal{D}(\mathcal{L}, \preceq, p) = h^0(A, \mathcal{L})$ (pour tout ordre). Notons aussi que $\mathcal{D}(\varphi \circ \psi, \preceq, p) = \mathcal{D}(\varphi, \preceq, p)\mathcal{D}(\psi, \preceq, p)$ si φ et ψ sont des isogénies.

Voici quelques propriétés élémentaires de ces degrés.

LEMME 4.2. – *Soient $\preceq$ et p comme dans la définition, A et B deux variétés abéliennes, $\varphi\colon A \to B$ une isogénie et deux faisceaux inversibles amples $\mathcal{L}$ sur A et $\mathcal{M}$ sur B.*

(1) *On a* $\mathcal{D}(A, \preceq, p) = \mathcal{D}(\Phi_A, \preceq, p)$.
(2) *On a* $\mathcal{D}(\varphi^*\mathcal{M}, \preceq, p) = \mathcal{D}(\varphi, \preceq, p)\mathcal{D}(\mathcal{M}, \preceq, p)$.
(3) *On a*
$$\mathcal{D}(\varphi, \preceq, p) = \frac{\mathcal{D}(B, \preceq, p)}{\mathcal{D}(A, \preceq, p)} \prod_{x \in S} (\deg \varphi_x)^{p(x)}$$
et
$$\mathcal{D}(\mathcal{L}, \preceq, p) = \mathcal{D}(A, \preceq, p)^{-1} \prod_{x \in S} h^0(A_x, \mathcal{L})^{p(x)}.$$

Démonstration. (1) Si $x \in S$, l'isogénie $(\Phi_A)_{\preceq x}$ s'écrit comme composée des applications de somme
$$\prod_{y \preceq x} A_y \longrightarrow A_{\prec x} \times A_x \longrightarrow A_{\preceq x}.$$
Comme la première flèche s'écrit $(\Phi_A)_{\prec x} \times \mathrm{id}_{A_x}$ et que la seconde a un noyau isomorphe à $A_{\prec x} \cap A_x$, nous trouvons $\deg(\Phi_A)_{\prec x} \operatorname{Card}(A_{\prec x} \cap A_x) = \deg(\Phi_A)_{\preceq x}$ d'où le résultat. (2) Puisque $(\varphi^*\mathcal{M})_{|A_T} = \varphi_T^*(\mathcal{M}_{|B_T})$, nous avons $h^0(A_T, \varphi^*\mathcal{M}) = (\deg \varphi_T) h^0(B_T, \mathcal{M})$ pour tout $T \subset S$. On en tire les formules voulues en prenant $T = \{y \in S \mid y \preceq x\}$ puis $T = \{y \in S \mid y \prec x\}$ pour tout $x \in S$. (3) La première assertion découle de (1) et de la formule $\Phi_B \circ \left(\prod_{x \in S} \varphi_x\right) = \varphi \circ \Phi_A$. Pour la seconde, on emploie (1) et (2) pour obtenir $\mathcal{D}(\mathcal{L}, \preceq, p)\mathcal{D}(A, \preceq, p) = \mathcal{D}(\Phi_A^*\mathcal{L}, \preceq, p)$ qui est bien le produit des $h^0(A_x, \mathcal{L})^{p(x)}$. □

Le passage à une isogénie duale revient à renverser l'ordre sur S.

LEMME 4.3. – *Soient $\preceq$ un ordre total sur S, $\succeq$ l'ordre opposé, $p\colon S \to \mathbb{R}$ une application et $\varphi\colon A \to B$ une isogénie. Alors $\mathcal{D}(\widehat{\varphi}, \preceq, p) = \mathcal{D}(\varphi, \succeq, p)$.*

Démonstration. Dans le diagramme à lignes exactes
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_T & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/A_T & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_T} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \\ 0 & \longrightarrow & B_T & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B/B_T & \longrightarrow & 0 \end{array}$$
les trois flèches verticales sont des isogénies qui vérifient $\deg \varphi = (\deg \varphi_T)(\deg \lambda)$ (puisque leurs noyaux forment aussi une suite exacte par le lemme du serpent). Lorsque nous dualisons le second carré,
$$\begin{array}{ccc} \widehat{B/B_T} & \longrightarrow & \widehat{B} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \widehat{\lambda}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \widehat{\varphi}} \\ \widehat{A/A_T} & \longrightarrow & \widehat{A} \end{array}$$
les applications horizontales sont injectives. Nous pouvons donc identifier $\widehat{A/A_T}$ à une sous-variété abélienne de $\widehat{A}$. Or $\widehat{A/A_T}$ est isogène à A/A_T donc à $A_{S\setminus T}$ (quasi-supplémentaire de A_T) puis à $(\widehat{A})_{S\setminus T}$ (car A et $\widehat{A}$ sont isogènes). Puisque la seule sous-variété abélienne de $\widehat{A}$ isogène à $(\widehat{A})_{S\setminus T}$ est $(\widehat{A})_{S\setminus T}$, c'est à celle-ci que nous

avons identifié $\widehat{A/A_T}$. La même chose valant pour B, l'isogénie $\widehat{\lambda}$ correspond donc à $(\widehat{\varphi})_{S\setminus T}$ et nous concluons $\deg\varphi = (\deg\varphi_T)(\deg\widehat{\varphi}_{S\setminus T})$. Si $x \in S$, nous utilisons cette formule pour $T = \{y \in S \mid y \succ x\}$ et $T = \{y \in S \mid y \succeq x\}$ pour obtenir

$$\frac{\deg\widehat{\varphi}_{\preceq x}}{\deg\widehat{\varphi}_{\prec x}} = \frac{\deg\varphi_{\succeq x}}{\deg\varphi_{\succ x}}$$

qui donne directement le résultat. □

Des manipulations analogues avec la dualité donnent l'énoncé suivant où nous utilisons la notation classique (voir [**22**, p. 60]) $\phi_{\mathcal{L}}\colon A \to \widehat{A}$ pour le morphisme associé à un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur A (caractérisé par $\phi_{\mathcal{L}}(x) = \tau_x^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{\otimes -1} \in \operatorname{Pic}^0(A_{\overline{K}}) = \widehat{A}(\overline{K})$ où $\tau_x\colon A_{\overline{K}} \to A_{\overline{K}}$ est la translation par $x \in A(\overline{K})$).

Lemme 4.4. – *Soient $\preceq$ un ordre total sur S, $\succeq$ l'ordre opposé, $p\colon S \to \mathbb{R}$ une application, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample sur A et $\phi_{\mathcal{L}}\colon A \to \widehat{A}$ la polarisation associée alors $\mathcal{D}(\phi_{\mathcal{L}}, \preceq, p) = \mathcal{D}(\mathcal{L}, \preceq, p)\mathcal{D}(\mathcal{L}, \succeq, p)$.*

Démonstration. La composée

$$A_T \xrightarrow{(\phi_{\mathcal{L}})_T} (\widehat{A})_T \simeq \widehat{A/A_{S\setminus T}} \longrightarrow \widehat{A_T}$$

coïncide avec $\phi_{\mathcal{L}_{|A_T}}$ donc nous avons $\deg(\phi_{\mathcal{L}})_T = h^0(A_T, \mathcal{L})^2 \operatorname{Card}(A_T \cap A_{S\setminus T})^{-1}$ puis par quotient

$$\frac{\deg(\phi_{\mathcal{L}})_T}{\deg(\phi_{\mathcal{L}})_{S\setminus T}} = \frac{h^0(A_T, \mathcal{L})^2}{h^0(A_{S\setminus T}, \mathcal{L})^2}.$$

Nous écrivons ceci pour $T = \{y \in S \mid y \preceq x\}$ et $T = \{y \in S \mid y \succeq x\}$ et multiplions. Cela donne $\mathcal{D}(\phi_{\mathcal{L}}, \preceq, p)\mathcal{D}(\phi_{\mathcal{L}}, \succeq, p) = \mathcal{D}(\mathcal{L}, \preceq, p)^2\mathcal{D}(\mathcal{L}, \succeq, p)^2$. Avec $\widehat{\phi_{\mathcal{L}}} = \phi_{\mathcal{L}}$ (voir [**13**, (7.8)]) et le lemme précédent, il reste seulement à prendre la racine carrée. □

CHAPITRE 5

ISOGÉNIES NUCLÉAIRES

Nous passons ici en revue les définitions et propriétés de base.

DÉFINITION 5.1. – *Soit* $\varphi \colon A \to B$ *une isogénie entre deux variétés abéliennes sur un corps. L'isogénie* φ *est dite nucléaire à gauche si* $\operatorname{Hom}(A, B) = \operatorname{End} B \cdot \varphi$, *nucléaire à droite si* $\operatorname{Hom}(A, B) = \varphi \cdot \operatorname{End} A$.

Remarquons immédiatement que φ est nucléaire à droite si et seulement si l'isogénie duale $\widehat{\varphi} \colon \widehat{B} \to \widehat{A}$ est nucléaire à gauche. Ce fait nous permettra de ne citer que les énoncés pour les isogénies nucléaires à gauche, quitte à en déduire si nécessaire les résultats correspondants à droite par dualité.

Deux familles d'exemples d'isogénies nucléaires à droite se déduisent des résultats de [**26**] : d'une part, nous avons déjà rappelé au chapitre 3 (lors de la discussion de la multiplication complexe) une condition suffisante pour qu'une isogénie cyclique soit nucléaire à droite ; d'autre part, pour toute variété abélienne A, l'isogénie canonique Φ_A du produit des composantes isotypiques de A vers A est nucléaire à droite comme le montre l'argument (immédiat) donné dans la démonstration de la proposition 3.4 de [**26**].

La terminologie nucléaire s'explique par la caractérisation suivante en termes de noyaux.

LEMME 5.2. – *Soit* $\varphi \colon A \to B$ *une isogénie. Il y a équivalence entre :*

(1) φ *est nucléaire à gauche ;*
(2) $\operatorname{Ker} \varphi$ *est l'intersection des* $\operatorname{Ker} \psi$ *pour* $\psi \in \operatorname{Hom}(A, B)$ *;*
(3) $\operatorname{Ker} \varphi$ *est l'intersection des noyaux des isogénies* $A \to B$.

Démonstration. (1) $\iff$ (2) découle de l'équivalence $\psi \in \operatorname{End} B \cdot \varphi \iff \operatorname{Ker} \varphi \subset \operatorname{Ker} \psi$. (2) $\Longrightarrow$ (3) est évident.

Pour déduire (2) de (3), nous écrivons $\psi = (n\psi + \varphi) - ((n-1)\psi + \varphi)$ donc $\operatorname{Ker}(n\psi + \varphi) \cap \operatorname{Ker}((n-1)\psi + \varphi) \subset \operatorname{Ker} \psi$ pour tous $\psi \in \operatorname{Hom}(A, B)$ et $n \in \mathbb{Z}$. Il reste à remarquer que, pour n assez grand, $n\psi + \varphi$ et $(n-1)\psi + \varphi$ sont des isogénies puisque $n \mapsto \deg(n\psi + \varphi)$ est un polynôme non nul ($\deg \varphi \neq 0$). □

Pour plus de souplesse dans la suite, nous introduisons une variante locale.

Définition 5.3. – *Soit ℓ un nombre premier. Une isogénie $\varphi\colon A \to B$ est dite ℓ-nucléaire à gauche si* $\mathrm{Hom}(A,B)\otimes\mathbb{Z}_\ell = (\mathrm{End}\,B\otimes\mathbb{Z}_\ell)\cdot\varphi$, *à droite si* $\mathrm{Hom}(A,B)\otimes\mathbb{Z}_\ell = \varphi\cdot(\mathrm{End}\,A\otimes\mathbb{Z}_\ell)$.

Bien entendu, la remarque ci-dessus pour $\widehat{\varphi}$ vaut encore pour la ℓ-nucléarité. Nous obtenons sans difficulté un principe local-global.

Lemme 5.4. – *Soit $\varphi\colon A\to B$ une isogénie. Il y a équivalence entre :*

(1) *φ est nucléaire à gauche ;*
(2) *φ est ℓ-nucléaire à gauche pour tout nombre premier ℓ ;*
(3) *φ est ℓ-nucléaire à gauche pour tout nombre premier ℓ divisant* $\deg\varphi$.

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2) est clair, (2) $\Longrightarrow$ (3) tautologique. Pour voir (3) $\Longrightarrow$ (1), notons G le groupe abélien fini $\mathrm{Hom}(A,B)/(\mathrm{End}\,B\cdot\varphi)$. Comme la multiplication $[\deg\varphi]\colon A\to A$ se factorise à travers φ, nous avons $(\deg\varphi)\,\mathrm{Hom}(A,B)\subset\mathrm{End}\,B\cdot\varphi$ donc l'exposant de G divise $\deg\varphi$. Maintenant (3) signifie que la composante ℓ-primaire $G\otimes\mathbb{Z}_\ell$ est nulle pour tout $\ell\mid\deg\varphi$ et entraîne bien $G=0$ soit (1). □

En particulier, une isogénie de degré premier à ℓ est ℓ-nucléaire à gauche (et à droite).

En général, si A et B sont isogènes, il n'y a pas d'isogénie nucléaire entre eux puisque le $\mathrm{End}\,B$-module $\mathrm{Hom}(A,B)$ n'est pas nécessairement libre. C'est toutefois le cas sous une condition de principalité (voir chapitre 2).

Lemme 5.5. – *Soient $\varphi\colon A\to B$ une isogénie et ℓ un nombre premier.*

(1) *Si φ est nucléaire (à gauche), elle est de degré minimal.*
(2) *Si* $\mathrm{End}\,B$ *est principal et φ de degré minimal, alors φ est nucléaire à gauche.*
(3) *Si* $\mathrm{End}\,B\otimes\mathbb{Z}_\ell$ *est principal et si la valuation ℓ-adique* $v_\ell(\deg\varphi)$ *est minimale alors φ est ℓ-nucléaire à gauche.*
(4) *Si* $\mathrm{End}\,B$ *est maximal et si* $\deg\varphi$ *divise tous les degrés d'isogénies $A\to B$ alors φ est nucléaire à gauche.*

Démonstration. (1) Vu la définition, $\deg\varphi\mid\deg\psi$ pour toute isogénie $\psi\colon A\to B$. (2) Choisissons une isogénie $\chi\colon B\to A$. L'idéal à gauche $\mathrm{Hom}(A,B)\chi$ de $\mathrm{End}\,B$ est principal donc $\mathrm{Hom}(A,B)\chi=\mathrm{End}\,B\cdot\chi'$ où $\chi'\in\mathrm{End}\,B$. En particulier, $\chi'=\alpha\circ\chi$ d'où l'on tire $\mathrm{Hom}(A,B)=\mathrm{End}\,B\cdot\alpha$. Par $\varphi=\beta\circ\alpha$ pour un $\beta\in\mathrm{End}\,B$ nous voyons que α et β sont des isogénies et, par minimalité de $\deg\varphi$, β est un isomorphisme ; ainsi $\mathrm{End}\,B\cdot\alpha=\mathrm{End}\,B\cdot\beta\circ\alpha=\mathrm{End}\,B\cdot\varphi$. (3) Nous avons de même $\mathrm{Hom}(A,B)\otimes\mathbb{Z}_\ell=(\mathrm{End}\,B\otimes\mathbb{Z}_\ell)\alpha$ pour $\alpha\in\mathrm{Hom}(A,B)\otimes\mathbb{Z}_\ell$. Si $\psi\in\mathrm{Hom}(A,B)$ vérifie $\alpha-\psi\in\ell\cdot\mathrm{Hom}(A,B)\otimes\mathbb{Z}_\ell$ alors $\mathrm{Hom}(A,B)\otimes\mathbb{Z}_\ell=(\mathrm{End}\,B\otimes\mathbb{Z}_\ell)\psi$. Ensuite φ s'écrit $\beta\circ\psi$ où $\beta\in\mathrm{End}\,B\otimes\mathbb{Z}_\ell$ et $\beta\in\mathrm{End}\,B\otimes\mathbb{Q}$. Ainsi $\deg\beta\in\mathbb{Q}\cap\mathbb{Z}_\ell$ puis, par minimalité de $v_\ell(\deg\varphi)$, nous voyons $v_\ell(\deg\beta)=0$. Alors β est un élément inversible de $\operatorname{End} B \otimes \mathbb{Z}_\ell$ et donc $\varphi = \beta \circ \psi$ vérifie bien $\operatorname{Hom}(A, B) \otimes \mathbb{Z}_\ell = (\operatorname{End} B \otimes \mathbb{Z}_\ell)\varphi$. (4) s'obtient grâce au lemme précédent en faisant varier ℓ dans (3) (voir corollaire 2.4). $\square$

Examinons maintenant le comportement des isogénies nucléaires par rapport à la composition.

Lemme 5.6. – *Soient $\psi \colon A \to B$ et $\varphi \colon B \to C$ deux isogénies et ℓ un nombre premier tels que $\varphi \circ \psi$ est ℓ-nucléaire à gauche. Alors*

(1) *φ est ℓ-nucléaire à gauche ;*
(2) *si φ est ℓ-nucléaire à droite, ψ est ℓ-nucléaire à gauche.*

Démonstration. (1) Si $f \in \operatorname{Hom}(B, C) \otimes \mathbb{Z}_\ell$ alors $f \circ \psi \in \operatorname{Hom}(A, C) \otimes \mathbb{Z}_\ell = (\operatorname{End} C \otimes \mathbb{Z}_\ell)\varphi \circ \psi$ d'où $f \in (\operatorname{End} C \otimes \mathbb{Z}_\ell)\varphi$. (2) Si $g \in \operatorname{Hom}(A, B) \otimes \mathbb{Z}_\ell$, $\varphi \circ g \in \operatorname{Hom}(A, C) \otimes \mathbb{Z}_\ell = (\operatorname{End} C \otimes \mathbb{Z}_\ell)\varphi \circ \psi$ donc, comme $(\operatorname{End} C \otimes \mathbb{Z}_\ell)\varphi = \operatorname{Hom}(B, C) \otimes \mathbb{Z}_\ell = \varphi(\operatorname{End} B \otimes \mathbb{Z}_\ell)$, il vient $g \in (\operatorname{End} B \otimes \mathbb{Z}_\ell)\psi$. $\square$

En faisant varier ℓ par le lemme 5.4, cet énoncé vaut à l'identique sans ℓ mais il permet aussi d'établir le résultat suivant.

Lemme 5.7. – *Soient $\psi \colon A \to B$ et $\varphi \colon B \to C$ deux isogénies de degrés premiers entre eux. Alors $\varphi \circ \psi$ est nucléaire à gauche si et seulement si φ et ψ le sont.*

Démonstration. Par le lemme 5.4, il suffit de démontrer l'assertion avec ℓ-nucléaire pour ℓ premier. Si $\varphi \circ \psi$ est ℓ-nucléaire à gauche, il en va de même de φ (lemme 5.6, (1)). Si $\ell \nmid \deg \psi$, ψ est ℓ-nucléaire à gauche. Si $\ell \mid \deg \psi$ alors $\ell \nmid \deg \varphi$ par hypothèse donc φ est ℓ-nucléaire à droite puis ψ est ℓ-nucléaire à gauche (lemme 5.6, (2)). Réciproquement, supposons φ et ψ ℓ-nucléaires à gauche. Si $\ell \nmid \deg \varphi$ alors $\varphi^{-1} \in \operatorname{Hom}(C, B) \otimes \mathbb{Z}_\ell$ donc $\operatorname{Hom}(A, C) \otimes \mathbb{Z}_\ell = \varphi\varphi^{-1} \operatorname{Hom}(A, C) \otimes \mathbb{Z}_\ell \subset \varphi \cdot \operatorname{Hom}(A, B) \otimes \mathbb{Z}_\ell = \varphi(\operatorname{End} B \otimes \mathbb{Z}_\ell)\psi = \varphi(\operatorname{End} B \otimes \mathbb{Z}_\ell)\varphi^{-1}\varphi\psi \subset (\operatorname{End} C \otimes \mathbb{Z}_\ell)\varphi\psi$. Si $\ell \nmid \deg \psi$ on a de même $\operatorname{Hom}(A, C) \otimes \mathbb{Z}_\ell = (\operatorname{Hom}(A, C) \otimes \mathbb{Z}_\ell)\psi^{-1}\psi \subset (\operatorname{Hom}(B, C) \otimes \mathbb{Z}_\ell)\psi = (\operatorname{End} C \otimes \mathbb{Z}_\ell)\varphi\psi$. $\square$

Nous aurons également besoin d'un résultat sur le produit fibré sous une condition similaire de coprimalité.

Lemme 5.8. – *Soient $f \colon B \to A$ et $g \colon C \to A$ deux isogénies de degrés premiers entre eux.*

(1) *Le produit fibré $D = B \times_A C$ est une variété abélienne, les morphismes structuraux $f' \colon D \to C$ et $g' \colon D \to B$ sont des isogénies avec $\operatorname{Ker} f' \simeq \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} g' \simeq \operatorname{Ker} g$.*
(2) *Si f est nucléaire à gauche, il en va de même de f'.*

Démonstration. Nous réalisons D comme le noyau du morphisme de variétés abéliennes $(f, -g)\colon B \times C \to A$. Ceci fournit directement $\operatorname{Ker} f' = D \cap (B \times 0) \simeq \operatorname{Ker} f$ et de même $\operatorname{Ker} g' \simeq \operatorname{Ker} g$. Comme D a la même dimension que A, B et C, il reste seulement à voir que D coïncide avec sa composante neutre D^0. Or $f'(D^0) = f'(D) = C$ par dimension donc D/D^0 s'identifie à $\operatorname{Ker} f'/(D^0 \cap \operatorname{Ker} f')$. Ceci fournit $\operatorname{Card}(D/D^0) \mid \deg f$. On a de même $\operatorname{Card}(D/D^0) \mid \deg g$ d'où $D = D^0$ par coprimalité. (2) Fixons un premier ℓ et montrons que f' est ℓ-nucléaire à gauche. Si $\ell \nmid \deg f = \deg f'$, il n'y a rien à faire. Sinon $\ell \nmid \deg g$ d'où $\operatorname{Hom}(D, C) \otimes \mathbb{Z}_\ell = g^{-1}(\operatorname{Hom}(B, A) \otimes \mathbb{Z}_\ell)g' = g^{-1}(\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Z}_\ell)f \circ g' = g^{-1}(\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Z}_\ell)g \circ f' = (\operatorname{End} C \otimes \mathbb{Z}_\ell)f'$. □

Nous avons encore un énoncé sur les puissances.

LEMME 5.9. – *Soit $\varphi\colon A \to B$ une isogénie nucléaire à gauche. Pour tout $n \geq 1$, $\varphi^{\times n}\colon A^n \to B^n$ est nucléaire à gauche.*

Démonstration. Dans $\operatorname{Hom}(A^n, B^n) \simeq M_n(\operatorname{Hom}(A, B))$, la puissance $\varphi^{\times n}$ s'identifie à la matrice diagonale de coefficients diagonaux égaux à φ. Il est alors clair que cette matrice engendre $M_n(\operatorname{End} B \cdot \varphi)$ comme module à gauche sur $M_n(\operatorname{End} B) \simeq \operatorname{End}(B^n)$. □

Rappelons que, comme dans **[25]**, deux variétés abéliennes isogènes sont dites similaires lorsqu'elles ont des puissances isomorphes.

COROLLAIRE 5.10. – *Soient A et B deux variétés abéliennes similaires. S'il existe une isogénie nucléaire à gauche $B \to A$ alors c'est un isomorphisme. Si* $\operatorname{End} A$ *est principal alors A et B sont isomorphes.*

Démonstration. Il suffit de démontrer la première assertion puisque lorsque $\operatorname{End} A$ est principal toute isogénie de degré minimal est nucléaire à gauche (assertion (2) du lemme 5.5). Soit donc $\varphi\colon B \to A$ une isogénie nucléaire à gauche. Par hypothèse, il existe $n \geq 1$ tel que A^n et B^n sont isomorphes. Par suite les seules isogénies $B^n \to A^n$ nucléaires à gauche sont les isomorphismes. D'après le lemme 5.9, nous avons donc $(\deg \varphi)^n = 1$ puis φ est un isomorphisme. □

Plus généralement, ces arguments (et la dualité) permettent de montrer que si A et B sont deux variétés abéliennes isogènes dont l'une a un anneau d'endomorphismes principal alors, pour tout entier $n \geq 1$, le degré minimal d'une isogénie $A^n \to B^n$ est le degré minimal d'une isogénie $A \to B$ élevé à la puissance n.

Considérons une variété abélienne A telle que $\operatorname{End} A = \mathbb{Z}$ et B une variété abélienne qui lui est isogène mais non isomorphe (en particulier $\operatorname{End} B = \mathbb{Z}$). D'après l'assertion (2) du lemme 5.5, il existe deux isogénies $\varphi\colon A \to B$ et $\psi\colon B \to A$ nucléaires à gauche. En revanche $\varphi \times \psi\colon A \times B \to B \times A$ n'est pas nucléaire à gauche puisque son but et sa source sont isomorphes. Cet exemple montre que le produit de deux isogénies nucléaires à gauche n'est pas en général nucléaire à gauche. C'est toutefois le cas lorsque leurs sources sont à supports disjoints.

LEMME 5.11. – *Soient* $\varphi\colon A \to B$ *et* $\psi\colon C \to D$ *deux isogénies nucléaires à gauche. Si* $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$ *alors* $\varphi \times \psi$ *est une isogénie nucléaire à gauche.*

Démonstration. C'est immédiat puisque l'hypothèse entraîne que $\mathrm{Hom}(A, D)$ et $\mathrm{Hom}(C, B)$ sont nuls et donc que tout morphisme $A \times C \to B \times D$ s'écrit $f \times g$ avec $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ et $g \in \mathrm{Hom}(C, D)$. □

CHAPITRE 6

FACTORISATIONS

Une isogénie nucléaire factorise tous les morphismes entre deux variétés abéliennes fixées mais une telle isogénie n'existe pas toujours. En faisant varier l'une des deux variétés dans une famille, nous obtenons un résultat inconditionnel de factorisation.

Pour l'énoncer, nous considérons une famille (stable par isomorphismes) $\mathcal{A}$ de variétés abéliennes (toutes sur le même corps de base qui reste fixé) et les axiomes de stabilité suivants :

(A1) Si $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ alors $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}$.

(A2) Si $A \in \mathcal{A}$ et A' est une sous-variété abélienne de A alors $A' \in \mathcal{A}$.

Nous avons aussi la propriété duale de (A2) :

(A2)* Si $A \in \mathcal{A}$ et A' est une sous-variété abélienne de A alors $A/A' \in \mathcal{A}$.

Si nous définissons $\mathcal{A}^* = \{\widehat{A} \mid A \in \mathcal{A}\}$ alors $\mathcal{A}$ vérifie (A1) si et seulement si $\mathcal{A}^*$ vérifie (A1) tandis que $\mathcal{A}$ vérifie (A2) si et seulement si $\mathcal{A}^*$ vérifie (A2)* (en effet, si A' est une sous-variété abélienne de $\widehat{A}$ alors $\widehat{A}/A'$ est la duale d'une sous-variété abélienne de A).

Proposition 6.1. – *Soient $\mathcal{A}$ une famille non vide de variétés abéliennes vérifiant* (A1) *et* (A2) *et B une variété abélienne quelconque. Il existe $C \in \mathcal{A}$ et un morphisme surjectif $f\colon B \to C$ tel que tout morphisme $B \to A$ avec $A \in \mathcal{A}$ se factorise à travers f.*

Démonstration. Considérons la famille de tous les sous-schémas en groupes de B qui s'écrivent comme noyau d'un morphisme $B \to A$ avec $A \in \mathcal{A}$ puis leur intersection G. Le quotient $f\colon B \to C = B/G$ vérifie clairement la propriété de factorisation donc il suffit de vérifier que C est une variété abélienne élément de $\mathcal{A}$. Or, par noethérianité, G est une intersection finie de $\operatorname{Ker} f_i$ où $f_i\colon B \to A_i$, $A_i \in \mathcal{A}$ puis $G = \operatorname{Ker}(f_1, \ldots, f_n)$ où $(f_1, \ldots, f_n)\colon B \to A$ avec $A = A_1 \times \cdots \times A_n \in \mathcal{A}$ par (A1). Ainsi C s'identifie à l'image de ce morphisme donc à une sous-variété abélienne de A qui appartient à $\mathcal{A}$ par (A2). □

Le couple (C, f) est unique à isomorphisme près. De manière compacte, nous pouvons écrire sa propriété sous la forme $\operatorname{Hom}(B, \mathcal{A}) = \operatorname{Hom}(C, \mathcal{A}) \cdot f$. Nous dirons dans cette situation que f engendre ou est un générateur de $\mathrm{Hom}(B, \mathcal{A})$. Nous déduisons aussi de la proposition sa version duale : si $\mathcal{A}$ vérifie (A1) et (A2)*, il existe $D \in \mathcal{A}$ et $g\colon D \to B$ de sorte que $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}, B) = g \cdot \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, D)$.

Nous introduisons maintenant des familles auxquelles s'applique ce résultat.

Définition 6.2. – *Soient A et B deux variétés abéliennes. Nous dirons que B est une descendante de A à gauche (respectivement, à droite) s'il existe un entier naturel n et une sous-variété abélienne C de A^n telle que $B \simeq C$ (respectivement, $B \simeq A^n/C$). Nous dirons que B est une descendante de A s'il existe un entier naturel n et deux sous-variétés abéliennes emboîtées $C \subset D$ de A^n telles que $B \simeq D/C$. Nous notons $\mathcal{D}(A)$ (respectivement $\mathcal{D}_g(A)$, $\mathcal{D}_d(A)$) l'ensemble des descendantes de A (respectivement, des descendantes à gauche, à droite).*

Ces familles sont en fait minimales pour les propriétés précédentes.

Lemme 6.3. – *Soit A une variété abélienne.*

(1) *$\mathcal{D}_g(A)$ est le plus petit ensemble contenant A et vérifiant* (A1) *et* (A2).
(2) *$\mathcal{D}_d(A)$ est le plus petit ensemble contenant A et vérifiant* (A1) *et* (A2)*.
(3) *$\mathcal{D}(A)$ est le plus petit ensemble contenant A et vérifiant* (A1), (A2) *et* (A2)*.

Démonstration. Il s'agit d'une suite de vérifications très élémentaires. Contentons-nous de montrer à titre d'illustration que $\mathcal{D}(A)$ vérifie (A1) et (A2). Si $C \subset D \subset A^n$ et $C' \subset D' \subset A^m$ alors $C \times C' \subset D \times D' \subset A^{n+m}$ et $D/C \times D'/C'$ est isomorphe à $(D \times D')/(C \times C')$. D'un autre côté, toute sous-variété abélienne de D/C s'écrit E/C pour $C \subset E \subset D \subset A^n$. □

Ce lemme contient aussi les inclusions suivantes (très simples par ailleurs) : si $* \in \{g, d, \emptyset\}$ alors $\mathcal{D}_*(A) \subset \mathcal{D}(A)$ et si $B \in \mathcal{D}_*(A)$ alors $\mathcal{D}_*(B) \subset \mathcal{D}_*(A)$. Les définitions donnent aussi directement $\mathcal{D}_*(A^n) = \mathcal{D}_*(A)$ et l'on en déduit que si A et B sont similaires alors $\mathcal{D}_*(A) = \mathcal{D}_*(B)$. Par dualité, nous avons $\mathcal{D}_d(A) = \{\widehat{B} \mid B \in \mathcal{D}_g(\widehat{A})\}$. Le lecteur trouvera dans le chapitre 18 divers exemples de variétés abéliennes pour lesquelles nous explicitons les ensembles correspondants $\mathcal{D}_*(\cdot)$.

Faisons à présent le lien avec les isogénies nucléaires.

Lemme 6.4. – *Dans le cadre de la proposition 6.1, si B est isogène à un élément de $\mathcal{A}$, alors f est une isogénie nucléaire à gauche.*

Démonstration. Soit $g\colon B \to A$ une isogénie avec $A \in \mathcal{A}$. Il existe donc $\varphi\colon C \to A$ tel que $g = \varphi \circ f$ puis $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$ est fini. Comme f est surjectif, c'est une isogénie et elle est nucléaire à gauche car tout morphisme $B \to C$ se factorise à travers f. □

Dans le cas des descendantes à gauche, nous obtenons une équivalence.

Lemme 6.5. – *Soit $\varphi\colon A \to B$ une isogénie. Elle est nucléaire à gauche si et seulement si elle factorise tous les morphismes de* $\mathrm{Hom}(A, \mathcal{D}_g(B))$.

Démonstration. Un sens découle du lemme précédent. Pour l'autre, supposons φ nucléaire à gauche et soient $C \in \mathcal{D}_g(B)$ et $\psi\colon A \to C$. Par définition nous disposons d'une injection $\iota\colon C \hookrightarrow B^n$ et ψ induit n morphismes $A \to B$ qui se factorisent tous par φ. Nous avons donc $\iota \circ \psi = \chi \circ \varphi$ pour un morphisme $\chi\colon B \to B^n$. Alors $\chi(B) \subset \iota(C)$ donc χ s'écrit $\iota \circ \lambda$ avec $\lambda\colon B \to C$ et nous trouvons bien $\psi = \lambda \circ \varphi$. □

En particulier, lorsque deux variétés abéliennes A et B sont isogènes, il n'existe pas en général d'isogénie $A \to B$ nucléaire à gauche mais il existe toujours une isogénie $A \to C$ nucléaire à gauche vers une descendante à gauche C de B qui factorise tous les morphismes $A \to B$.

Nous utiliserons principalement ce qui précède en lien avec la notion de variété abélienne MM (définie dans l'introduction).

LEMME 6.6. – *Toute variété abélienne admet dans sa classe d'isogénie une descendante à gauche MM et une descendante à droite MM.*

Démonstration. Le côté gauche découle de la proposition 2.3 de [**25**], le droit s'en déduit par dualité. □

En revanche, il n'y a pas en général de variété MM non nulle dans $\mathcal{D}_g(A) \cap \mathcal{D}_d(A)$ (voir l'exemple des variétés A_χ développé dans le chapitre 18).

LEMME 6.7. – *Soit A une variété abélienne MM. Nous avons $\mathcal{D}_g(A) = \mathcal{D}_d(A) = \mathcal{D}(A)$. Toutes les descendantes de A sont MM. Deux descendantes isogènes de A sont similaires.*

Démonstration. Si $B \in \mathcal{D}(A)$ nous écrivons $B \simeq D/C$ où $C \subset D \subset A^n$ sont des sous-variétés abéliennes. Par le théorème 1.2 de [**25**], C et D sont MM et C est un facteur direct de D. Par suite, B est isomorphe à une sous-variété abélienne de D donc de A^n d'où $B \in \mathcal{D}_g(A)$. Comme B est facteur direct de A^n, nous avons aussi $B \in \mathcal{D}_d(A)$. Le même résultat montre que B est MM. Enfin, la dernière assertion résulte de la proposition 1.5 de [**25**] appliquée à une puissance de A. □

Ainsi la relation de descendance devient symétrique dans une classe d'isogénie de variétés MM : si A et B sont MM et isogènes alors $B \in \mathcal{D}(A)$ si et seulement si $A \in \mathcal{D}(B)$ puisque ceci équivaut à dire que A et B sont similaires.

COROLLAIRE 6.8. – *Soient A et B deux variétés abéliennes isogènes. Si B est MM, il existe un entier $n \geq 1$ et une isogénie $A^n \to B^n$ nucléaire à gauche.*

Démonstration. Nous avons vu qu'il existait $C \in \mathcal{D}_g(B)$ et $\varphi\colon A \to C$ nucléaire à gauche. Par le lemme précédent, B et C sont similaires d'où $C^n \simeq B^n$ pour un entier $n \geq 1$. Ainsi la composée de $\varphi^{\times n}\colon A^n \to C^n$ et de l'isomorphisme $C^n \simeq B^n$ répond au problème par le lemme 5.9. □

Le lemme 6.7 permet aussi de voir que, si A est simple et $\operatorname{End} A$ principal, alors les descendantes de A sont les puissances de A. En effet, une sous-variété abélienne B d'une telle puissance est isogène à A^m pour un certain entier $m \in \mathbb{N}$ (puisque A est simple). Par le lemme 6.7, elle est donc similaire à A^m. Comme $\operatorname{End} A^m = M_m(\operatorname{End} A)$ est principal (lemme 2.2), le corollaire 5.10 montre que B est isomorphe à A^m.

Mentionnons un résultat de finitude.

LEMME 6.9. – *Soient A une variété abélienne et d un entier. Il n'y a qu'un nombre fini d'éléments (à isomorphisme près) de $\mathcal{D}(A)$ de dimension au plus d.*

Démonstration. Il s'agit d'une généralisation assez directe de la proposition 1.4 de [**25**] et de sa démonstration. En effet, cet énoncé donne le résultat pour $\mathcal{D}_g(A)$ et donc en particulier le présent lemme si A est MM. Si A est quelconque, nous choisissons une variété abélienne A' isogène à A et MM puis deux isogénies $\varphi\colon A \to A'$ et $\psi\colon A' \to A$ telles que $\varphi \circ \psi$ est la multiplication par un entier $N \geq 1$. Si $B \in \mathcal{D}(A)$, il existe $n \geq 1$ et $C \subset D \subset A^n$ avec $B \simeq D/C$. Posons $B' = (\varphi^{\times n})(D)/(\varphi^{\times n})(C) \in \mathcal{D}(A')$. Par le cas MM, il n'y a qu'un nombre fini de choix pour B' lorsque $\dim B = \dim B' \leq d$. Puisque $\psi^{\times n}$ induit une isogénie $B' \to B$ de noyau contenu dans $\operatorname{Ker}[N]$, il n'y a également qu'un nombre fini de choix pour le quotient B. $\square$

CHAPITRE 7

FAMILLES PRIMAIRES

Ce chapitre s'articule autour de la définition suivante.

DÉFINITION 7.1. – *Une famille $\mathcal{G}$ de classes d'isomorphie de groupes abéliens finis est dite primaire si pour tout couple de groupes abéliens finis G et G' de cardinaux premiers entre eux nous avons :* $G \times G' \in \mathcal{G} \iff G, G' \in \mathcal{G}$.

Dans un premier temps, nous traduisons cette notion en termes numériques.

DÉFINITION 7.2. – *Une partie $\mathcal{N}$ de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ est dite primaire si, pour tout couple d'entiers naturels non nuls n et n' premiers entre eux, nous avons :* $nn' \in \mathcal{N} \iff n, n' \in \mathcal{N}$.

Il revient au même de dire que la famille de groupes $\{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid n \in \mathcal{N}\}$ est primaire au sens précédent ou encore que la fonction caractéristique de $\mathcal{N}$ est multiplicative (au sens de la théorie analytique des nombres).

LEMME 7.3. – *Une partie primaire de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ est stable par pgcd et ppcm. En particulier son plus petit élément est le pgcd de tous ses éléments et, s'il existe, le plus grand élément en est le ppcm.*

Démonstration. Élémentaire. □

Nous notons $\mathrm{rad}\colon \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{N}\setminus\{0\}$ l'application qui à un entier associe son radical (le produit des nombres premiers qui le divisent) et exp l'application qui à un groupe fini associe son exposant.

LEMME 7.4. – *Soit u une application de l'ensemble des classes d'isomorphie de groupes abéliens finis vers $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ telle que*

(1) $\mathrm{rad} \circ u \mid \exp$;
(2) *si G et G' sont deux groupes abéliens finis de cardinaux premiers entre eux,* $u(G \times G') = u(G)u(G')$.

Si $\mathcal{G}$ est une famille primaire comme dans la définition 7.1 alors $u(\mathcal{G})$ est une partie primaire de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Démonstration. Soient n et n' deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Supposons dans un premier temps $nn' \in u(\mathcal{G})$. Écrivons $nn' = u(G'')$ avec $G'' \in \mathcal{G}$ puis $G'' = G \times G'$ de sorte que les couples $(\operatorname{Card} G, \operatorname{Card} G')$, $(\operatorname{Card} G, n')$ et $(n, \operatorname{Card} G')$ soient premiers entre eux (cela signifie seulement que l'on regroupe les composantes primaires de G'' en mettant celles correspondant à des premiers divisant n dans G et les autres dans G'). Alors $G, G' \in \mathcal{G}$ et $nn' = u(G)u(G')$ par (2). D'après (1), les couples $(u(G), n')$ et $(n, u(G'))$ sont premiers entre eux ce qui entraîne $n = u(G)$ et $n' = u(G')$ donc $n, n' \in u(\mathcal{G})$. Réciproquement, supposons $n, n' \in u(\mathcal{G})$. Nous écrivons $n = u(G_1)$ avec $G_1 \in \mathcal{G}$ puis $G_1 = G \times G_2$ où $\operatorname{rad} \operatorname{Card} G \mid n$ et $\operatorname{pgcd}(n, \operatorname{Card} G_2) = 1$. Par (2), $n = u(G)u(G_2)$ et $u(G_2)$ est premier à n d'après (1). Ainsi $n = u(G)$. De même, nous pouvons écrire $n' = u(G')$ avec $G' \in \mathcal{G}$ et $\operatorname{rad} \operatorname{Card} G' \mid n'$. En particulier, $\operatorname{Card} G$ et $\operatorname{Card} G'$ sont premiers entre eux donc, par (2), $nn' = u(G \times G') \in u(\mathcal{G})$. □

Nous utiliserons ce lemme pour $u = \operatorname{Card}$ ou $u = \exp$ mais il s'applique aussi à des variantes comme $u = \operatorname{rad} \exp$, ou $u = \operatorname{Card} / \exp$ voire $u = \operatorname{pgcd}(\exp^2, 2019)$.

Dans le reste de ce chapitre, nous montrons que certaines familles de noyaux d'isogénies sont primaires. Nous supposons que le corps de base K de nos variétés abéliennes est de caractéristique nulle afin de pouvoir sans risque identifier un noyau d'isogénie au groupe abélien fini de ses $\overline{K}$-points. Voici tout d'abord un résultat préliminaire de fission d'isogénie.

LEMME 7.5. – *Soient $f\colon A \to B$ une isogénie et $\operatorname{Ker} f = G \oplus G'$ une décomposition de son noyau telle que les cardinaux de G et G' sont premiers entre eux. Il existe une factorisation de f en deux isogénies $\varphi\colon A \to C$ et $\psi\colon C \to B$ pour lesquelles $\operatorname{Ker} \varphi = G$ et $\operatorname{Ker} \psi \simeq G'$. De plus C est isomorphe à une sous-variété abélienne de $A \times B$.*

Démonstration. Puisque $\operatorname{pgcd}(\operatorname{Card} G, \operatorname{Card} G') = 1$, nous pouvons écrire $G = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker}[\operatorname{Card} G]$ qui montre que G est défini sur K et que $C = A/G$ est l'image du morphisme $([\operatorname{Card} G], f)\colon A \to A \times B$. La factorisation est immédiate et $\operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Ker} f/G \simeq G'$. □

Citons aussi une variante sans fixer l'isogénie de départ.

COROLLAIRE 7.6. – *Soient A et B deux variétés abéliennes isogènes et $n \geq 1$ un entier. Il existe une sous-variété abélienne C de $A \times B$ et deux isogénies $\varphi\colon C \to A$ et $\psi\colon C \to B$ telle que $\operatorname{rad} \deg \varphi \mid n$ et $\deg \psi$ est premier à n.*

Démonstration. Il suffit de choisir une isogénie quelconque $f\colon A \to B$ et une décomposition $\operatorname{Ker} f = G \oplus G'$ où $\operatorname{rad} \operatorname{Card} G \mid n$ et $\operatorname{Card} G'$ est premier à n. Le lemme fournit le résultat quitte à renverser l'isogénie entre A et C (ce qu'il est possible de faire sans changer le radical de son degré). □

Tout est maintenant en place pour montrer que les familles de noyaux d'isogénies qui nous intéressent sont primaires. Pour énoncer le résultat, nous introduisons une notation : dans le cadre de la proposition 6.1, le noyau de f ne dépend que de B et $\mathcal{A}$, nous le notons $\operatorname{Ker}(B, \mathcal{A})$.

THÉORÈME 7.7. – *Soit $\mathcal{B}$ une famille de variétés abéliennes telle que*

(1) *si $B \in \mathcal{B}$ et B' isogène à B alors $B' \in \mathcal{B}$;*
(2) *si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, il existe $B \in \mathcal{B}$ et des morphismes $B_1 \to B$, $B_2 \to B$ de noyaux finis.*

Alors la famille de tous les noyaux d'isogénies nucléaires à gauche entre éléments de $\mathcal{B}$ est primaire. Si de plus $\mathcal{A}$ est une famille de variétés abéliennes vérifiant (A1) *et* (A2) *telle que tout élément de $\mathcal{B}$ est isogène à un élément de $\mathcal{A}$ alors la famille $\{\operatorname{Ker}(B, \mathcal{A}) \mid B \in \mathcal{B}\}$ est primaire.*

Démonstration. Pour alléger et traiter en parallèle les deux résultats, nous dirons ici qu'une isogénie est *convenable* si elle est nucléaire à gauche entre éléments de $\mathcal{B}$ dans le premier cas et si elle remplit les conditions de la proposition 6.1 entre sa source dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}$ dans le second cas. Par le lemme 6.4, une isogénie convenable est toujours nucléaire à gauche. Nous notons $\mathcal{G}$ la famille des noyaux des isogénies convenables. Nous devons montrer que $\mathcal{G}$ est primaire. Soient donc deux groupes abéliens finis G et G' de cardinaux premiers entre eux. Supposons tout d'abord $G \times G' \in \mathcal{G}$. Fixons une isogénie convenable $f\colon B \to A$ avec $\operatorname{Ker} f \simeq G \times G'$. Le lemme 7.5 fournit une factorisation $f = \psi \circ \varphi$ où $\varphi\colon B \to C$ et $\psi\colon C \to A$ vérifient $\operatorname{Ker} \varphi \simeq G$ et $\operatorname{Ker} \psi \simeq G'$. Pour établir $G' \in \mathcal{G}$ montrons que ψ est convenable. Pour cela notons d'abord que $C \in \mathcal{B}$ par (1) puisque C est isogène à $B \in \mathcal{B}$. Par le lemme 5.7, ψ est nucléaire à gauche. Cela suffit dans le premier cas, dans le second nous considérons un morphisme $g\colon C \to A'$ avec $A' \in \mathcal{A}$. Nous savons que $g \circ \varphi$ se factorise à travers $f = \psi \circ \varphi$ donc g se factorise à travers ψ. Ceci montre que ψ est convenable et donc $G' \in \mathcal{G}$. Par symétrie $G \in \mathcal{G}$. Pour la réciproque supposons à présent $G, G' \in \mathcal{G}$. Fixons des isogénies convenables $f\colon B \to A$ et $f'\colon B' \to A'$ avec $\operatorname{Ker} f \simeq G$ et $\operatorname{Ker} f' \simeq G'$. Par (2), choisissons $C \in \mathcal{B}$ tel que A et A' sont isogènes à des sous-variétés abéliennes de C. Dans le second cas, nous imposons même $C \in \mathcal{A}$. Sélectionnons encore des variétés abéliennes simples $D_1, \ldots, D_n$ vérifiant les propriétés suivantes : $A \times D_1 \times \cdots \times D_n$ est isogène à C ; si D_i est isogène à une sous-variété abélienne de A alors D_i est isomorphe à une sous-variété abélienne de A ; sinon D_i est isomorphe à une sous-variété abélienne de C. Ces conditions assurent que $\widetilde{A} = A \times D_1 \times \cdots \times D_n$ est un élément de $\mathcal{B}$ et, dans le second cas, de $\mathcal{A}$. De même $\widetilde{B} = B \times D_1 \times \cdots \times D_n \in \mathcal{B}$. Montrons alors que $\widetilde{f} = f \times \mathrm{id}\colon \widetilde{B} \to \widetilde{A}$ (de noyau G) est convenable. Soit $g\colon \widetilde{B} \to E$ où $E = \widetilde{A}$ dans le premier cas et $E \in \mathcal{A}$ dans le second. Nous devons montrer que g se factorise à travers $\widetilde{f}$. Or g est la donnée de morphismes $B \to E$ et $D_i \to E$ donc il suffit de voir que ceux-ci se factorisent à travers les facteurs de $\widetilde{f}$. Pour D_i c'est immédiat puisque tout $D_i \to E$ se factorise à travers id_{D_i}. Montrons donc seulement qu'un morphisme $B \to E$ se factorise à travers f. Dans le second cas, cela revient exactement à dire que f est convenable. Dans le premier cas, $B \to E$ se décompose en morphismes $B \to A$ et $B \to D_i$. Si D_i n'est pas isogène à une sous-variété abélienne de A alors le morphisme $B \to D_i$ est nul. Nous pouvons donc nous limiter à un morphisme $h\colon B \to D$ avec $D \subset A$ (ceci inclut $D = A$). Comme f est nucléaire à gauche, $\iota \circ h = \chi \circ f$ pour l'inclusion $\iota\colon D \hookrightarrow A$ et un endomorphisme χ de A. Ensuite, $\chi(A) \subset D$ donc χ s'écrit $\iota \circ \lambda$ pour $\lambda\colon A \to D$ et nous avons bien la factorisation cherchée $h = \lambda \circ f$. Ceci termine la démonstration du fait que $\widetilde{f}$ est convenable. De même, nous pouvons remplacer f' par une isogénie convenable, de même noyau G' et de but isogène à C. En d'autres termes, nous aurions pu faire notre choix initial d'isogénies convenables f et f' en imposant de plus A et A' isogènes. Nous le supposons désormais.

Appliquons à présent le corollaire 7.6 aux variétés A et A' et $n = \operatorname{Card} G'$. Notons $\varphi\colon A'' \to A$ et $\psi\colon A'' \to A'$ les isogénies obtenues. Nous avons $A'' \in \mathcal{B}$ et, dans le second cas, $A'' \in \mathcal{A}$ (par $A'' \subset A \times A'$). Formons alors les trois carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc}
B'' & \xrightarrow{f_2} & B'_1 & \xrightarrow{\psi'} & B' \\
\big\downarrow{\scriptstyle f'_2} & & \big\downarrow{\scriptstyle f'_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle f'} \\
B_1 & \xrightarrow{f_1} & A'' & \xrightarrow{\psi} & A' \\
\big\downarrow{\scriptstyle \varphi'} & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \\
B & \xrightarrow{f} & A & &
\end{array}$$

et posons $f'' = f_1 \circ f'_2\colon B'' \to A''$. Le lemme 5.8 s'applique aux trois carrés (coprimalité des degrés) et en particulier toutes les isogénies f_1, f_2, f'_1, f'_2 sont nucléaires à gauche. Il en va donc de même de f'' (lemme 5.7). De plus $G \times G' \simeq \operatorname{Ker} f_2 \oplus \operatorname{Ker} f'_2 \subset \operatorname{Ker} f''$ et il y a égalité puisque $\deg f'' = \deg f_2 \cdot \deg f'_2$. Ceci termine de prouver $G \times G' \in \mathcal{G}$ dans le premier cas. Dans le second, nous devons encore établir que f'' est convenable. Soit donc $g\colon B'' \to E \in \mathcal{A}$. Nous devons montrer que g se factorise à travers f'' c'est-à-dire $\operatorname{Ker} f'' = \operatorname{Ker} f_2 \oplus \operatorname{Ker} f'_2 \subset \operatorname{Ker} g$ et par symétrie il suffit d'établir $\operatorname{Ker} f_2 \subset \operatorname{Ker} g$. Comme f_2 est de degré premier à $N = \deg \varphi' \circ f'_2$, on a $N \operatorname{Ker} f_2 = \operatorname{Ker} f_2$ donc il suffit même de voir $N \operatorname{Ker} f_2 \subset \operatorname{Ker} g$ soit $\operatorname{Ker} f_2 \subset N^{-1} \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} Ng$. Or Ng se factorise à travers $\varphi' \circ f'_2$ en un morphisme $g'\colon B \to E$ qui lui-même (f étant convenable) se factorise à travers f en $g''\colon A \to E$. Nous avons alors $Ng = g'' \circ \varphi \circ f'_1 \circ f_2$ qui donne bien $\operatorname{Ker} f_2 \subset \operatorname{Ker} Ng$ comme prévu. □

Les conditions (1) et (2) du théorème sont satisfaites par exemple si $\mathcal{B}$ est formée d'une seule classe d'isogénie ou bien si $\mathcal{B}$ est stable par isogénies et produits. Lorsqu'une famille $\mathcal{A}$ vérifiant (A1) et (A2) est fixée (comme par exemple $\mathcal{A} = \mathcal{D}_g(A)$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{D}(A)$) nous pouvons remplir simultanément les conditions (1) et (2) et l'hypothèse que tout élément de $\mathcal{B}$ est isogène à un élément de $\mathcal{A}$ en choisissant pour $\mathcal{B}$ la réunion des classes d'isogénie d'une partie idoine de $\mathcal{A}$ comme :

— un singleton,
— $\mathcal{A}$ tout entier,
— $\{A \in \mathcal{A} \mid d_A \leq f\}$ où $f\colon S \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est une application arbitraire.

CHAPITRE 8

ANNEAUX DE LEFSCHETZ ℓ-ADIQUES

Dans ce chapitre, la lettre ℓ désigne toujours un nombre premier différent de la caractéristique du corps de base K (fixé) de nos variétés abéliennes. Lorsque A est une variété abélienne (sur K donc), nous notons $T_\ell(A)$ son module de Tate ℓ-adique qui est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de rang $2 \dim A$. L'anneau des endomorphismes $\operatorname{End} A$ agit naturellement sur $T_\ell(A)$ et, pour $\varphi \in \operatorname{End} A$, nous notons encore φ l'endomorphisme induit de $T_\ell(A)$.

DÉFINITION 8.1. – *Dans ce cadre, nous appelons anneau de Lefschetz ℓ-adique de A l'anneau des endomorphismes du* $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Z}_\ell$*-module $T_\ell(A)$ et nous le notons* $\Lambda_\ell(A) = \operatorname{End}_{\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Z}_\ell}(T_\ell(A))$.

Comme sous-$\mathbb{Z}_\ell$-module de $\operatorname{End}_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell(A))$, l'anneau $\Lambda_\ell(A)$ est notamment un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de rang fini.

La terminologie s'inspire de celle de Milne **[21]** qui appelle groupe de Lefschetz le groupe des symplectomorphismes de $\Lambda_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ (voir ci-dessous).

LEMME 8.2. – *Si A et B sont deux variétés abéliennes, nous disposons d'un morphisme d'anneaux naturel $\Lambda_\ell(A \times B) \to \Lambda_\ell(A)$ dont le conoyau est fini. De plus ce morphisme est injectif si et seulement si* $\operatorname{Supp} B \subset \operatorname{Supp} A$.

Démonstration. Nous écrivons $T_\ell(A \times B) = T_\ell(A) \oplus T_\ell(B)$ et, pour définir notre morphisme, nous montrons que, si u est un $\operatorname{End}(A \times B) \otimes \mathbb{Z}_\ell$-endomorphisme de $T_\ell(A) \oplus T_\ell(B)$, il laisse stable le sous-module $T_\ell(A)$ et l'application induite est $(\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Z}_\ell)$-linéaire. En effet, si nous notons $p_1 \colon A \times B \to A \times B$ le projecteur sur le premier facteur, son action sur $T_\ell(A \times B)$ correspond au projecteur sur $T_\ell(A)$ et la formule $u \circ p_1 = p_1 \circ u$ donne bien la stabilité. De même pour $\varphi \in \operatorname{End} A$ la relation $u \circ (\varphi \times \mathrm{id}_B) = (\varphi \times \mathrm{id}_B) \circ u$ entraîne que l'application induite respecte l'action de φ sur $T_\ell(A)$. Pour établir le reste de l'énoncé, nous utilisons le lemme 3.8. Il nous donne deux entiers $n, N \geq 1$ ainsi que des morphismes $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \operatorname{Hom}(A, B)$ et $\psi_1, \dots, \psi_n \in \operatorname{Hom}(B, A)$ tels que l'élément $\beta = \sum_{i=1}^n \varphi_i \circ \psi_i \in \operatorname{End} B$ est central et vérifie $\psi \circ \beta = N\psi$ et $\beta \circ \varphi = N\varphi$ pour tous $\psi \in \operatorname{Hom}(B, A)$ et $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, B)$ (le lien avec l'élément α de l'énoncé du lemme 3.8 est donné par $\beta = N\alpha$).

Afin de montrer la finitude du conoyau, nous montrons qu'il est de N-torsion c'est-à-dire que pour $v \in \Lambda_\ell(A)$ nous devons montrer que Nv provient d'un élément de $\Lambda_\ell(A \times B)$. Posons pour cela $w = \sum_{i=1}^n \varphi_i \circ v \circ \psi_i$. Vérifions en premier lieu que $w \in \Lambda_\ell(B)$: cela signifie $w \circ \chi = \chi \circ w$ pour tout $\chi \in \mathrm{End}(B)$ et résulte du calcul suivant où nous avons omis de noter la composition pour alléger

$$\begin{aligned} Nw\chi &= \sum_{i=1}^n \varphi_i v N \psi_i \chi = \sum_{i=1}^n \varphi_i v \psi_i \chi \beta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_i v \psi_i \chi \varphi_j \psi_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_i \psi_i \chi \varphi_j v \psi_j = \sum_{j=1}^n \beta \chi \varphi_j v \psi_j = \sum_{j=1}^n N \chi \varphi_j v \psi_j = N\chi w. \end{aligned}$$

De manière analogue, nous montrons

$$\psi w = \sum_{i=1}^n \psi \varphi_i v \psi_i = \sum_{i=1}^n v \psi \varphi_i \psi_i = Nv\psi$$

pour tout $\psi \in \mathrm{Hom}(B, A)$ et $w \circ \varphi = \varphi \circ Nv$ pour $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Ces égalités montrent que l'endomorphisme $Nv \times w$ de $T_\ell(A) \oplus T_\ell(B)$ définit un élément de $\Lambda_\ell(A \times B)$ d'où le résultat pour le conoyau.

Supposons à présent $\mathrm{Supp}\, B \subset \mathrm{Supp}\, A$. Nous conservons les notations précédentes et nous avons maintenant $\beta = [N]$. Soient u un élément du noyau de $\Lambda_\ell(A \times B) \to \Lambda_\ell(A)$ et $y \in T_\ell(B)$. Nous avons

$$Nu(y) = \sum_{i=1}^n \varphi_i \psi_i u(y) = \sum_{i=1}^n \varphi_i u(\psi_i(y)) = 0$$

car $\psi_i(y) \in T_\ell(A)$ et u est nul sur $T_\ell(A)$. Nous avons donc $u(y) = 0$ (car $T_\ell(A \times B)$ est sans torsion) et ainsi u est également nul sur $T_\ell(B)$ d'où $u = 0$.

Réciproquement, supposons que notre application $\Lambda_\ell(A \times B) \to \Lambda_\ell(A)$ soit injective. Pour avoir l'inclusion $\mathrm{Supp}\, B \subset \mathrm{Supp}\, A$, nous devons montrer $\beta = [N]$. Or l'élément $\chi = \beta - [N]$ du centre de $\mathrm{End}(B)$ définit un élément de $\Lambda_\ell(B)$. Par construction, il vérifie $\chi \circ \varphi = 0$ et $\psi \circ \chi = 0$ pour tous $\psi \in \mathrm{Hom}(B, A)$ et $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Ceci signifie que le produit $0 \times \chi$ définit un élément de $\Lambda_\ell(A \times B)$ et notre hypothèse d'injectivité fournit donc bien $\chi = 0$. □

La première partie du lemme permet de voir $T_\ell(A)$ et symétriquement $T_\ell(B)$ comme $\Lambda_\ell(A \times B)$-modules et donc de formuler le résultat important suivant.

Proposition 8.3. – *Soient A et B deux variétés abéliennes. L'application naturelle*

$$\mathrm{Hom}(A, B) \otimes \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda_\ell(A \times B)}(T_\ell(A), T_\ell(B))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Nous pouvons voir cette application comme l'une des quatre composantes de

$$\mathrm{End}(A \times B) \otimes \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow \mathrm{End}_{\Lambda_\ell(A \times B)}(T_\ell(A \times B))$$

en vertu de la décomposition $\mathrm{End}(A \times B) \simeq \mathrm{End}\, A \oplus \mathrm{Hom}(A, B) \oplus \mathrm{Hom}(B, A) \oplus \mathrm{End}\, B$ et de même pour $\mathrm{End}(T_\ell(A) \oplus T_\ell(B))$. Il nous suffit donc en fait de montrer la bijectivité de

$$\alpha\colon \mathrm{End}\, A \otimes \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow \mathrm{End}_{\Lambda_\ell(A)}(T_\ell(A))$$

pour toute variété abélienne A (c'est le cas $A = B$ de l'énoncé sachant que $\Lambda_\ell(A^2)$ agit sur $T_\ell(A)$ à travers $\Lambda_\ell(A)$). Nous pouvons même nous contenter d'établir que $\alpha \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}_\ell}$ est un isomorphisme car nous savons que $\mathrm{End}\, A \otimes \mathbb{Z}_\ell \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell(A))$ est un morphisme injectif dont l'image est un $\mathbb{Z}_\ell$-module saturé (voir [**13**, (12.10)]). Maintenant l'isomorphisme

$$\mathrm{End}\, A \otimes \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \mathrm{End}_{\Lambda_\ell(A)\otimes\mathbb{Q}_\ell}(T_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell)$$

est une conséquence du résultat de bicommutation dans une algèbre centrale simple (théorème 4.10 page 222 de [**16**]) : dans la $\mathbb{Q}_\ell$-algèbre $\mathfrak{B} = \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(T_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell)$ centrale simple, nous voyons $\mathfrak{A} = \mathrm{End}\, A \otimes \mathbb{Q}_\ell$ comme sous-$\mathbb{Q}_\ell$-algèbre semi-simple ; alors le commutant de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ s'identifie à $\mathrm{End}_{\mathfrak{A}}(T_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell) \simeq \Lambda_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ et le bicommutant à $\mathrm{End}_{\Lambda_\ell(A)\otimes\mathbb{Q}_\ell}(T_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell)$; le théorème affirme que ce dernier coïncide avec $\mathfrak{A}$. □

L'écriture dans cette démonstration de $\Lambda_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ comme commutant montre aussi qu'il s'agit d'une $\mathbb{Q}_\ell$-algèbre semi-simple (exercice 12 page 226 de [**16**]) et donc que $\Lambda_\ell(A)$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-ordre au sens du chapitre 2.

Dans le cadre du lemme 8.2, si $\mathrm{Supp}\, B \subset \mathrm{Supp}\, A$, nous avons un isomorphisme $\Lambda_\ell(A \times B) \otimes \mathbb{Q}_\ell \simeq \Lambda_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$. Par suite, lorsque $\mathrm{Supp}\, A = \mathrm{Supp}\, B$, nous trouvons en composant un isomorphisme naturel $\Lambda_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell \simeq \Lambda_\ell(B) \otimes \mathbb{Q}_\ell$. Il est facile de voir (en considérant $A \times B \times C$) que si $\mathrm{Supp}\, A = \mathrm{Supp}\, B = \mathrm{Supp}\, C$ les trois isomorphismes naturels entre $\Lambda_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$, $\Lambda_\ell(B) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ et $\Lambda_\ell(C) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ sont compatibles, ce qui nous permet d'identifier ces espaces. Formellement, nous associons à chaque partie finie T de S la $\mathbb{Q}_\ell$-algèbre

$$W_\ell(T) = \varprojlim_{\mathrm{Supp}\, A = T} \Lambda_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell.$$

Chaque projection $\pi_A\colon W_\ell(\mathrm{Supp}\, A) \to \Lambda_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est un isomorphisme et nous pouvons alors identifier sans risque $\Lambda_\ell(A)$ à son image réciproque $\pi_A^{-1}(\Lambda_\ell(A))$ dans $W_\ell(\mathrm{Supp}\, A)$. Par exemple, lorsque $\mathrm{Supp}\, B \subset \mathrm{Supp}\, A$, l'application du lemme 8.2 s'écrit maintenant comme une inclusion $\Lambda_\ell(A \times B) \subset \Lambda_\ell(A)$. Au-delà, ces identifications autorisent une formulation simple des faits suivants.

Lemme 8.4. – *Soient A, B et C trois variétés abéliennes.*

(1) *Si* $\mathrm{Supp}\, A = \mathrm{Supp}\, B$ *alors* $\Lambda_\ell(A \times B) = \Lambda_\ell(A) \cap \Lambda_\ell(B)$.
(2) *Si* $\mathrm{Supp}\, B \subset \mathrm{Supp}\, A$, $\Lambda_\ell(A \times B) = \{u \in \Lambda_\ell(A) \mid u(T_\ell(B)) \subset T_\ell(B)\}$.
(3) *S'il existe une isogénie $A \to B$ de degré premier à ℓ alors $\Lambda_\ell(A) = \Lambda_\ell(B)$.*
(4) *Si l'on a une suite exacte* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *avec* $\mathrm{Supp}\, A = \mathrm{Supp}\, B$ *alors* $\Lambda_\ell(B) \subset \Lambda_\ell(A)$.
(5) *Si l'on a une suite exacte* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *avec* $\mathrm{Supp}\, B = \mathrm{Supp}\, C$ *alors* $\Lambda_\ell(B) \subset \Lambda_\ell(C)$.

Démonstration. Grâce à notre identification, si $\operatorname{Supp} A = \operatorname{Supp} B$ et $u \in \Lambda_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell = \Lambda_\ell(B) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ nous avons $u(\varphi(x)) = \varphi(u(x))$ pour tous $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, B) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ et $x \in T_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$. Dans ce cas, pour montrer que $u \in \Lambda_\ell(A)$ il suffit de montrer que, comme endomorphisme de $T_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$, il laisse stable le sous-module $T_\ell(A)$. (1) Nous avons $\Lambda_\ell(A \times B) \subset \Lambda_\ell(A) \cap \Lambda_\ell(B)$ et réciproquement si $u \in \Lambda_\ell(A) \cap \Lambda_\ell(B)$ il laisse stable $T_\ell(A)$ et $T_\ell(B)$ donc $T_\ell(A \times B) = T_\ell(A) \oplus T_\ell(B)$. (2) L'action de $\Lambda_\ell(A)$ sur $T_\ell(B) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est donnée par l'application $\Lambda_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell = \Lambda_\ell(A \times B) \otimes \mathbb{Q}_\ell \to \Lambda_\ell(B) \otimes \mathbb{Q}_\ell$. Ainsi $u \in \Lambda_\ell(A)$ laisse stable $T_\ell(A) \oplus T_\ell(B)$ si et seulement si son action sur $T_\ell(B) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ laisse stable $T_\ell(B)$. (3) Immédiat puisque l'isogénie en question induit un isomorphisme $T_\ell(A) \to T_\ell(B)$. (4), (5) La suite exacte induit une suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell$-modules $0 \to T_\ell(A) \to T_\ell(B) \to T_\ell(C) \to 0$. Notons $\iota\colon A \hookrightarrow B$ et $\pi\colon B \twoheadrightarrow C$. Soit $u \in \Lambda_\ell(B)$. Si $\operatorname{Supp} A = \operatorname{Supp} B$ et $x \in T_\ell(A)$ alors $\iota(u(x)) = u(\iota(x)) \in T_\ell(B)$ donc $u(x) \in T_\ell(A) = (T_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell) \cap \iota^{-1}(T_\ell(B))$; ainsi $u \in \Lambda_\ell(A)$ dans ce cas. Si $\operatorname{Supp} B = \operatorname{Supp} C$ et $z \in T_\ell(C)$ on écrit $z = \pi(y)$ pour $y \in T_\ell(B)$ puis $u(z) = u(\pi(y)) = \pi(u(y)) \in T_\ell(C)$ donc $u \in \Lambda_\ell(C)$. □

Dans (5) il est indispensable que A soit une variété abélienne : si $B \to C$ est un morphisme surjectif dont le noyau n'est pas connexe, nous n'avons pas en général $\Lambda_\ell(B) \subset \Lambda_\ell(C)$ (l'obstruction pour faire la même démonstration est que $T_\ell(B) \to T_\ell(C)$ n'est pas surjectif).

Lorsque A et B sont à supports disjoints, l'égalité $\operatorname{End}(A \times B) = \operatorname{End} A \times \operatorname{End} B$ entraîne $\Lambda_\ell(A \times B) = \Lambda_\ell(A) \times \Lambda_\ell(B)$. Nous en déduisons que si T et U sont deux parties finies disjointes de S, l'algèbre $W_\ell(T \cup U)$ s'identifie canoniquement au produit $W_\ell(T) \times W_\ell(U)$. Par suite

$$W_\ell(T) = \prod_{x \in T} W_\ell(\{x\}).$$

Nous pourrions aller plus loin et définir un unique espace

$$W_\ell(S) = \prod_{x \in S} W_\ell(\{x\}) = \varprojlim_{T \subset S \text{ fini}} W_\ell(T) = \varprojlim_{A} \Lambda_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$$

puis remplacer $\Lambda_\ell(A)$ par son image réciproque dans $W_\ell(S)$ (isomorphe à $\Lambda_\ell(A) \times W_\ell(S \setminus \operatorname{Supp} A)$). Avec cette convention, le lemme précédent deviendrait valable sans aucune condition de support.

Si $\mathfrak{A}$ est une R-algèbre, une anti-involution de $\mathfrak{A}$ est un automorphisme involutif $\dagger\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ de R-modules tel que $(uv)^\dagger = v^\dagger u^\dagger$ pour tous $u, v \in \mathfrak{A}$. Rappelons que, pour toute variété abélienne A, on dispose d'un accouplement parfait $e_\ell\colon T_\ell(A) \times T_\ell(\widehat{A}) \to \mathbb{Z}_\ell$ [**22**, p. 186].

LEMME 8.5. – *Soit T une partie finie de S. Il existe une anti-involution $\dagger$ sur $W_\ell(T)$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $u \in W_\ell(T)$, pour toute variété abélienne A de support T, pour tous $x \in T_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ et $y \in T_\ell(\widehat{A}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$, on a $e_\ell(x, u(y)) = e_\ell(u^\dagger(x), y)$. De plus $\Lambda_\ell(\widehat{A}) = \Lambda_\ell(A)^\dagger$ pour toute variété abélienne A avec* $\operatorname{Supp} A = T$.

Démonstration. Fixons une variété abélienne A dont le support est T. Si $u \in W_\ell(T)$, la non-dégénérescence de e_ℓ permet de définir, par la formule de l'énoncé, $u^\dagger$ comme application $T_\ell(A)\otimes\mathbb{Q}_\ell \to T_\ell(A)\otimes\mathbb{Q}_\ell$. Pour vérifier $u^\dagger \in W_\ell(T)$, nous devons montrer que si $\varphi \in \operatorname{End} A$ alors $u^\dagger \circ \varphi = \varphi \circ u^\dagger$. Or, pour x et y comme dans l'énoncé, la formule (I) de [**22**, p. 186] donne

$$\begin{aligned} e_\ell(u^\dagger(\varphi(x)), y) &= e_\ell(\varphi(x), u(y)) = e_\ell(x, \widehat{\varphi}(u(y))) \\ &= e_\ell(x, u(\widehat{\varphi}(y))) = e_\ell(u^\dagger(x), \widehat{\varphi}(y)) = e_\ell(\varphi(u^\dagger(x)), y), \end{aligned}$$

d'où le résultat. Si maintenant B est une seconde variété abélienne dont T est le support, il existe une surjection $\varphi\colon A^n \to B$ pour un entier $n \geq 1$ convenable. L'égalité à établir vaut pour A^n par somme directe des modules de Tate. Pour B, si $x' \in T_\ell(B)\otimes\mathbb{Q}_\ell$ et $y' \in T_\ell(\widehat{B})\otimes\mathbb{Q}_\ell$, il existe $x \in T_\ell(A^n)\otimes\mathbb{Q}_\ell$ avec $x' = \varphi(x)$ et donc

$$e_\ell(x', u(y')) = e_\ell(x, \widehat{\varphi}(u(y'))) = e_\ell(x, u(\widehat{\varphi}(y'))) = e_\ell(u^\dagger(x), \widehat{\varphi}(y')) = e_\ell(\varphi\circ u^\dagger(x), y'),$$

où les premier et cinquième e_ℓ correspondent à B, les trois autres à A^n. Comme $u^\dagger \in W_\ell(T)$, nous avons $\varphi\circ u^\dagger(x) = u^\dagger \circ\varphi(x) = u^\dagger(x')$, ce qui démontre la formule pour B. Enfin, pour la dernière assertion, nous avons si $u \in W_\ell(T)$

$$u \in \Lambda_\ell(\widehat{A}) \iff u(T_\ell(\widehat{A})) \subset T_\ell(\widehat{A}) \iff e_\ell(T_\ell(A), u(T_\ell(\widehat{A}))) \subset \mathbb{Z}_\ell$$

puisque l'accouplement est parfait. Par la formule d'adjonction, ceci est encore équivalent à $u^\dagger(T_\ell(A)) \subset T_\ell(A)$ soit $u^\dagger \in \Lambda_\ell(A)$. □

Nous pouvons aussi formuler ceci en termes de forme de Riemann ℓ-adique : si $u \in W_\ell(T)$, $\operatorname{Supp} A = T$, $x, y \in T_\ell(A)\otimes\mathbb{Q}_\ell$ alors pour tout faisceau $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}(A)$ on a $e_{\mathcal{L}}(x, u(y)) = e_{\mathcal{L}}(u^\dagger(x), y)$. Ceci résulte immédiatement de la définition $e_{\mathcal{L}}(x,y) = e_\ell(x, \phi_{\mathcal{L}}(y))$ [**22**, p. 186] puisque u commute à $\phi_{\mathcal{L}}$.

Ce lemme permet des raisonnements par dualité : par exemple les assertions (4) et (5) du lemme 8.4 deviennent duales l'une de l'autre. Il fait aussi le lien avec les définitions de Milne [**21**] qui (au moins lorsque K est algébriquement clos) appelle groupe de Lefschetz le groupe (algébrique dont les K-points sont) $\{u \in \Lambda_\ell(A)\otimes\mathbb{Q}_\ell \mid uu^\dagger = 1\}$.

Nous terminons cette étude ℓ-adique par un résultat technique que nous pourrons interpréter dans le chapitre suivant comme un contrôle de la ℓ-partie d'un noyau d'isogénie. Avant de l'énoncer nous donnons un lemme auxiliaire.

LEMME 8.6. – *Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_s$ des anneaux locaux, $a_1, \dots, a_s$ et $b_1, \dots, b_s$ des entiers naturels et N un sous-groupe d'indice fini de $M = \prod_{i=1}^s M_{a_i,b_i}(\Delta_i)$. Nous supposons que N engendre M en tant que module à gauche sur $\mathcal{O} = \prod_{i=1}^s M_{a_i}(\Delta_i)$ et nous posons $\mathcal{S} = \{u \in \mathcal{O} \mid uN \subset N\}$. Si $0 \leq j \leq s$, écrivons*

$$M_j = \prod_{1\leq i\leq j} M_{a_i,b_i}(\Delta_i) \subset M \qquad \text{et} \qquad \mathcal{O}_j = \prod_{1\leq i\leq j} M_{a_i}(\Delta_i) \subset \mathcal{O}$$

puis $N_j = N \cap M_j$ *et* $\mathcal{S}_j = \mathcal{S} \cap \mathcal{O}_j$. *Alors pour tous* $0 \le j < h \le s$ *nous avons*

$$\frac{\operatorname{Card} M_h/N_h}{\operatorname{Card} M_j/N_j} \le \left(\frac{\operatorname{Card} \mathcal{O}_h/\mathcal{S}_h}{\operatorname{Card} \mathcal{O}_j/\mathcal{S}_j}\right)^{\max\{b_{j+1},\dots,b_h\}}.$$

Démonstration. Fixons temporairement un indice i. Vérifions d'abord que, de toute famille génératrice du $M_{a_i}(\Delta_i)$-module $M_{a_i,b_i}(\Delta_i)$, on peut extraire une famille à b_i éléments qui l'engendre. L'anneau Δ_i étant local, le lemme de Nakayama [**24**, (6.11)] montre que l'on peut, pour cette assertion, remplacer Δ_i par son corps résiduel. Or, si Δ_i est un corps, tout sous-$M_{a_i}(\Delta_i)$-module de $M_{a_i,b_i}(\Delta_i)$ est un Δ_i-espace vectoriel à gauche dont la dimension est un multiple de a_i (même argument que dans la démonstration du lemme 2.5). Ceci permet d'extraire la famille cherchée en demandant simplement que chaque élément évite le module engendré par les précédents. Appliquons maintenant ce résultat à la famille $\pi_i(N)$ où $\pi_i\colon M \to M_{a_i,b_i}(\Delta_i)$ est la projection sur le i-ème facteur. Nous obtenons des éléments $n_1, \dots, n_{b_i}$ de $\pi_i(N)$ tels que le morphisme $\varphi_i\colon M_{a_i}(\Delta_i)^{b_i} \to M_{a_i,b_i}(\Delta_i)$ défini par $\varphi_i(u_1, \dots, u_{b_i}) = u_1 n_1 + \cdots + u_{b_i} n_{b_i}$ est surjectif. Nous avons $\mathcal{S}_i N \subset N_i$ d'où $\pi_i(\mathcal{S}_i) n_j \subset \pi_i(N_i) \subset M_{a_i,b_i}(\Delta_i)$ pour tout $1 \le j \le b_i$. Nous en déduisons $\varphi_i(\pi_i(\mathcal{S}_i)^{b_i}) \subset \pi_i(N_i)$ et donc φ_i induit un morphisme de groupes surjectif

$$(M_{a_i}(\Delta_i)/\pi_i(\mathcal{S}_i))^{b_i} \longrightarrow M_{a_i,b_i}(\Delta_i)/\pi_i(N_i).$$

Nous retenons que le cardinal du but est plus petit que celui de la source. De plus, comme $\pi_i(N_i) \simeq N_i/N_{i-1}$, le quotient $M_{a_i,b_i}(\Delta_i)/\pi_i(N_i)$ est isomorphe à $(M_i/N_i)/(M_{i-1}/N_{i-1})$ ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{\operatorname{Card} M_h/N_h}{\operatorname{Card} M_j/N_j} = \prod_{i=j+1}^{h} \operatorname{Card}(M_{a_i,b_i}(\Delta_i)/\pi_i(N_i)).$$

Le résultat découle alors de la majoration obtenue pour le membre de droite modulo une formule entièrement analogue pour $\mathcal{O}$ et $\mathcal{S}$. □

L'exposant $\max\{b_{j+1}, \dots, b_h\}$ ne peut pas être remplacé par une quantité plus petite, comme on peut le voir à partir de l'exemple suivant (qui se généralise immédiatement à plusieurs facteurs ou à un anneau local à corps résiduel fini) : si Δ est un corps fini, $M = M_{a,b}(\Delta)$ et N le sous-groupe de M des matrices dont toutes les lignes sauf la première sont nulles, alors N engendre M sur $\mathcal{O} = M_a(\Delta)$, $\mathcal{S}$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{O}$ dont tous les éléments non diagonaux de la première colonne sont nuls et donc $M/N \simeq \Delta^{(a-1)b}$, $\mathcal{O}/\mathcal{S} \simeq \Delta^{a-1}$.

Lorsque B est une variété abélienne et $x \in \operatorname{Supp} B$, la variété abélienne B_x est isotypique donc la $\mathbb{Q}$-algèbre $\operatorname{End} B_x \otimes \mathbb{Q}$ est simple. En particulier, son centre $Z(\operatorname{End} B_x \otimes \mathbb{Q})$ est un corps de nombres et la dimension de $\operatorname{End} B_x \otimes \mathbb{Q}$ comme espace vectoriel sur celui-ci est un carré. Ceci nous permet d'associer à B la fonction

$$\begin{aligned} \xi_B\colon S &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto [\operatorname{End} B_x \otimes \mathbb{Q} : Z(\operatorname{End} B_x \otimes \mathbb{Q})]^{1/2} \end{aligned}$$

avec la convention $\xi_B(x) = 0$ si $x \notin \operatorname{Supp} B$.

Théorème 8.7. – *Soient A et B des variétés abéliennes telles que* $\operatorname{Supp} B \subset \operatorname{Supp} A$. *L'exposant du groupe fini $\Lambda_\ell(A)T_\ell(B)/T_\ell(B)$ est inférieur à celui de $\Lambda_\ell(A)/\Lambda_\ell(A\times B)$. Si* $\operatorname{End}(A) \otimes \mathbb{Z}_\ell$ *est maximal, pour tout ordre total $\preceq$ sur S et tout $x \in S$, nous avons*

$$\frac{\operatorname{Card}((\Lambda_\ell(A)T_\ell(B) \cap (T_\ell(B_{\preceq x}) \otimes \mathbb{Q}_\ell))/T_\ell(B_{\preceq x}))}{\operatorname{Card}((\Lambda_\ell(A)T_\ell(B) \cap (T_\ell(B_{\prec x}) \otimes \mathbb{Q}_\ell))/T_\ell(B_{\prec x}))} \leq \left(\frac{\operatorname{Card}(\Lambda_\ell(A_{\preceq x})/\Lambda_\ell(A \times B) \cap \Lambda_\ell(A_{\preceq x}))}{\operatorname{Card}(\Lambda_\ell(A_{\prec x})/\Lambda_\ell(A \times B) \cap \Lambda_\ell(A_{\prec x}))}\right)^{\xi_B(x)}.$$

Démonstration. La première assertion est élémentaire : si m est l'exposant de $\Lambda_\ell(A)/\Lambda_\ell(A \times B)$, nous voyons que $m\Lambda_\ell(A)$ laisse $T_\ell(B)$ stable donc $m\Lambda_\ell(A)T_\ell(B) \subset T_\ell(B)$ d'où le résultat. Pour la seconde, rappelons que nous avons une application injective de conoyau fini $\operatorname{End} A \to \prod_{x\in S} \operatorname{End} A_x$ (voir chapitre 3). Notre hypothèse de maximalité entraîne $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq \prod_{x\in S} \operatorname{End} A_x \otimes \mathbb{Z}_\ell$ et que chacun des facteurs est un $\mathbb{Z}_\ell$-ordre maximal. Nous leur appliquons la proposition 2.3 pour écrire $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq \prod_{i=1}^s M_{n_i}(\Delta_i)$ où les Δ_i sont des $\mathbb{Z}_\ell$-ordres locaux, intègres et principaux et nous choisissons l'ordre des indices de sorte que l'application qui à i associe $x \in S$ tel que $M_{n_i}(\Delta_i)$ est un facteur de $\operatorname{End} A_x \otimes \mathbb{Z}_\ell$ soit croissante pour l'ordre donné sur S. Fixons maintenant un $x \in S$ comme dans l'énoncé et notons $\{j+1, \dots, h\}$ les indices qui lui correspondent. En tant que $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Z}_\ell$-module à gauche, $T_\ell(A)$ s'écrit $\prod_{i=1}^s T_i$ où T_i est un $M_{n_i}(\Delta_i)$-module à gauche. Par le lemme 2.5, $T_i \simeq M_{n_i,a_i}(\Delta_i)$ pour un certain entier a_i où l'action de $M_{n_i}(\Delta_i)$ est donnée par multiplication matricielle à gauche. L'écriture du module de Tate $T_\ell(A) \simeq \prod_{i=1}^s M_{n_i,a_i}(\Delta_i)$ permet le calcul de l'anneau de Lefschetz ℓ-adique de A et nous trouvons

$$\Lambda_\ell(A) \simeq \prod_{i=1}^{s} M_{a_i}(\Delta_i)^{\mathrm{op}}$$

(anneau opposé) où, cette fois, la structure de $\Lambda_\ell(A)$-module à gauche de $T_\ell(A)$ s'obtient par multiplication matricielle à droite. De plus, ces manipulations préservent le lien entre les facteurs et les composantes isotypiques. En particulier, si $\mathcal{O} = \Lambda_\ell(A)$ et que nous utilisons la notation du lemme précédent pour les produits partiels, nous avons

$$\mathcal{O}_j = \Lambda_\ell(A_{\prec x}) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{O}_h = \Lambda_\ell(A_{\preceq x}).$$

Considérons à présent le $\mathcal{O}$-module à gauche $M = \Lambda_\ell(A)T_\ell(B)$. En utilisant le lemme 2.5 comme ci-dessus, nous pouvons écrire $M \simeq \prod_{i=1}^s M_{b_i,a_i}(\Delta_i)$ pour certains entiers b_i. Nous pouvons toujours identifier les facteurs associés à x :

$$M_j = M \cap (T_\ell(B_{\prec x}) \otimes \mathbb{Q}_\ell) \qquad \text{et} \qquad M_h = M \cap (T_\ell(B_{\preceq x}) \otimes \mathbb{Q}_\ell).$$

Notons encore $N = T_\ell(B) \subset M$. Comme $T_\ell(B_{\prec x})$ est un sous-$\mathbb{Z}_\ell$-module saturé de $T_\ell(B)$ (le quotient s'identifiant à $T_\ell(B/B_{\prec x})$), nous avons

$$N_j = N \cap M_j = N \cap (T_\ell(B_{\prec x}) \otimes \mathbb{Q}_\ell) = T_\ell(B_{\prec x})$$

et, de même, $N_h = T_\ell(B_{\preceq x})$. Puisque $\Lambda_\ell(A \times B) = \{u \in \Lambda_\ell(A) \mid u(T_\ell(B)) \subset T_\ell(B)\}$, tous les ingrédients du lemme précédent sont réunis (quitte à transposer les matrices) et sa conclusion donnera notre résultat si nous montrons $\max(b_{j+1}, \dots, b_h) \leq \xi_B(x)$. Or l'écriture de M comme produit donne en particulier $T_\ell(B) \otimes \mathbb{Q}_\ell \simeq \prod_{i=1}^s M_{b_i,a_i}(\Delta_i \otimes \mathbb{Q}_\ell)$ dont nous tirons (proposition 8.3)

$$\begin{aligned}\operatorname{End} B \otimes \mathbb{Q}_\ell &\simeq \operatorname{End}_{\Lambda_\ell(B)\otimes\mathbb{Q}_\ell}(T_\ell(B) \otimes \mathbb{Q}_\ell) \\ &= \operatorname{End}_{\Lambda_\ell(A)\otimes\mathbb{Q}_\ell}(T_\ell(B) \otimes \mathbb{Q}_\ell) \simeq \prod_{i=1}^s M_{b_i}(\Delta_i \otimes \mathbb{Q}_\ell).\end{aligned}$$

Les facteurs correspondent à nouveau aux composantes isotypiques donc

$$\operatorname{End} B_x \otimes \mathbb{Q}_\ell \simeq \prod_{i=j+1}^h M_{b_i}(\Delta_i \otimes \mathbb{Q}_\ell).$$

En écrivant cette algèbre comme

$$(\operatorname{End} B_x \otimes \mathbb{Q}) \otimes_{Z(\operatorname{End} B_x \otimes \mathbb{Q})} (Z(\operatorname{End} B_x \otimes \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_\ell)$$

c'est-à-dire comme le produit tensoriel d'une algèbre centrale simple de dimension $\xi_B(x)^2$ par un produit de corps, nous voyons que chacun de ses facteurs est une algèbre simple de dimension $\xi_B(x)^2$ sur son centre (voir [**16**, p. 219]) d'où $\xi_B(x)^2 = b_i^2[\Delta_i \otimes \mathbb{Q}_\ell : Z(\Delta_i \otimes \mathbb{Q}_\ell)]$ puis $b_i \leq \xi_B(x)$ pour tout i avec $j < i \leq h$. $\square$

L'argument de cette démonstration montre en particulier que si l'anneau $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Z}_\ell$ est principal alors il en va de même de $\Lambda_\ell(A)$. En fait, le raisonnement est parfaitement réversible : si $\Lambda_\ell(A)$ est principal, nous pouvons l'écrire sous la forme $\prod_{i=1}^s M_{a_i}(\Delta_i)^{\mathrm{op}}$ et alors le $\Lambda_\ell(A)$-module $T_\ell(A)$ est isomorphe comme ci-dessus à un produit $\prod_{i=1}^s M_{n_i,a_i}(\Delta_i)$ pour certains entiers n_i de sorte qu'avec $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq \operatorname{End}_{\Lambda_\ell(A)} T_\ell(A)$ nous trouvons bien que $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq \prod_{i=1}^s M_{n_i}(\Delta_i)$ est principal.

CHAPITRE 9

ANNEAU DE LEFSCHETZ

Dans ce chapitre, nous supposons que le corps de base K de nos variétés abéliennes est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Lorsque A est une variété abélienne sur K, nous notons Ω_A le réseau des périodes et t_A l'espace tangent de la variété abélienne complexe $A_{\mathbb{C}}$, qui s'écrit donc t_A/Ω_A comme tore complexe. Même si nous utilisons l'extension des scalaires de K à $\mathbb{C}$ pour nos définitions, nous ne confondons en aucune façon A et $A_{\mathbb{C}}$ et, en particulier, la notation $\operatorname{End} A$ désigne toujours l'anneau des endomorphismes de A, qui peut être plus petit que $\operatorname{End} A_{\mathbb{C}}$. Nous voyons donc t_A et Ω_A comme $\operatorname{End} A$-modules à gauche et nous noterons plus bas $\mathrm{d}\,\varphi\colon t_A \to t_A$ l'application induite par $\varphi \in \operatorname{End} A$.

Définition 9.1. – *Nous appelons anneau de Lefschetz de la variété abélienne A l'anneau des endomorphismes du* $\operatorname{End} A$*-module Ω_A et le notons* $\Lambda(A) = \operatorname{End}_{\operatorname{End} A} \Omega_A$.

Cette notion joue bien sûr un rôle complètement analogue à son avatar ℓ-adique étudié dans le chapitre précédent. Sans surprise, ses propriétés de base s'énoncent de manière identique. En fait, dans la plupart des cas, nous pouvons même les déduire du cas ℓ-adique puisque l'isomorphisme naturel $\Omega_A \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq T_\ell(A)$ fournit immédiatement $\Lambda(A) \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq \Lambda_\ell(A)$ pour tout nombre premier ℓ (isomorphisme de comparaison). Ainsi, lorsqu'un résultat se teste localement, nous obtiendrons directement la version globale. Dans les autres cas, une preuve exactement semblable fonctionne. Ces remarques permettent d'énoncer rapidement les faits ci-dessous.

Lemme 9.2. – *Si A et B sont deux variétés abéliennes, nous disposons d'un morphisme d'anneaux naturel $\Lambda(A \times B) \to \Lambda(A)$ dont le conoyau est fini. De plus ce morphisme est injectif si et seulement si* $\operatorname{Supp} B \subset \operatorname{Supp} A$.

L'anneau $\Lambda(A)$ est un ordre. Lorsque $\operatorname{Supp} A = \operatorname{Supp} B$, nous disposons d'un isomorphisme canonique $\Lambda(A) \otimes \mathbb{Q} \simeq \Lambda(B) \otimes \mathbb{Q}$ qui nous permet de poser

$$W(T) = \varprojlim_{\operatorname{Supp} A = T} \Lambda(A) \otimes \mathbb{Q}$$

pour une partie finie T de S et d'identifier $\Lambda(A)$ à son image dans $W(\operatorname{Supp} A)$. Cette $\mathbb{Q}$-algèbre $W(T)$ est la somme des $W(\{x\})$, $x \in T$ et possède une anti-involution $\dagger$

correspondant à l'adjonction par rapport à une forme de Riemann quelconque sur t_A pour tout A de support T.

LEMME 9.3. – *Soient A, B et C trois variétés abéliennes.*

(1) *Si* $\operatorname{Supp} A = \operatorname{Supp} B$ *alors* $\Lambda(A \times B) = \Lambda(A) \cap \Lambda(B)$.
(2) *On a* $\Lambda(\widehat{A}) = \Lambda(A)^\dagger$.
(3) *Si l'on a une suite exacte* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *avec* $\operatorname{Supp} A = \operatorname{Supp} B$ *alors* $\Lambda(B) \subset \Lambda(A)$.
(4) *Si l'on a une suite exacte* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *avec* $\operatorname{Supp} B = \operatorname{Supp} C$ *alors* $\Lambda(B) \subset \Lambda(C)$.
(5) *L'application naturelle* $\operatorname{Hom}(A, B) \to \operatorname{Hom}_{\Lambda(A\times B)}(\Omega_A, \Omega_B)$ *est un isomorphisme.*
(6) *La variété abélienne A est MM si et seulement si $\Lambda(A)$ est un ordre maximal.*

Le dernier énoncé du chapitre précédent admet lui aussi une traduction directe.

PROPOSITION 9.4. – *Soient A et B deux variétés abéliennes sur K telles que* $\operatorname{Supp} B \subset \operatorname{Supp} A$. *L'exposant de $\Lambda(A)\Omega_B/\Omega_B$ divise celui de $\Lambda(A)/\Lambda(A \times B)$. Si A est MM, nous avons pour tout ordre total $\preceq$ sur S et tout $x \in S$*

$$\frac{\operatorname{Card} \Lambda(A)\Omega_B \cap (\Omega_{B_{\preceq x}} \otimes \mathbb{Q})/\Omega_{B_{\preceq x}}}{\operatorname{Card} \Lambda(A)\Omega_B \cap (\Omega_{B_{\prec x}} \otimes \mathbb{Q})/\Omega_{B_{\prec x}}} \mid \left(\frac{\operatorname{Card} \Lambda(A_{\preceq x})/\Lambda(A \times B) \cap \Lambda(A_{\preceq x})}{\operatorname{Card} \Lambda(A_{\prec x})/\Lambda(A \times B) \cap \Lambda(A_{\prec x})}\right)^{\xi_B(x)}.$$

Démonstration. La divisibilité correspond à une inégalité entre ℓ-parties pour tout ℓ et la ℓ-partie d'un groupe fini s'obtient par produit tensoriel avec $\mathbb{Z}_\ell$: il suffit donc d'appliquer le théorème 8.7. □

Nous passons maintenant aux résultats spécifiques à $\Lambda(A)$ (qui vont nous permettre en particulier d'interpréter les groupes de la proposition comme des noyaux d'isogénies). Ils reposent tous sur le fait que $\Lambda(A) \otimes \mathbb{R}/\Lambda(A)$ admet une structure naturelle de variété abélienne complexe provenant d'une variété sur K.

THÉORÈME 9.5. – *Si A est une variété abélienne, il existe une variété abélienne $A^\#$ unique à isomorphisme près telle que :*

(1) $\operatorname{Supp} A^\# = \operatorname{Supp} A$,
(2) $\Lambda(A^\#) = \Lambda(A)$ *et*
(3) $\Omega_{A^\#} \simeq \Lambda(A)$ *comme module sur* $\Lambda(A^\#) = \Lambda(A)$.

De plus, $A^\#$ est isomorphe à une sous-variété abélienne de $A^{2\dim A}$.

Démonstration. L'unicité résulte de l'assertion (5) du lemme 9.3 : en effet, si $A^\#$ vérifie (1), (2) et (3) et si $\operatorname{Supp} B = \operatorname{Supp} A$, nous avons

$$\operatorname{Hom}(A^\#, B) \simeq \operatorname{Hom}_{\Lambda(A)\cap\Lambda(B)}(\Lambda(A), \Omega_B)$$

donc, si $\widetilde{A}$ vérifiait les mêmes propriétés que $A^\#$, nous aurions $\operatorname{Hom}(A^\#, B) \simeq \operatorname{Hom}(\widetilde{A}, B)$ pour tout B et cet isomorphisme de foncteurs force $A^\# \simeq \widetilde{A}$. Pour l'existence, considérons d'abord le tore complexe $A' = \operatorname{End}_{\mathbb{R}} t_A / \operatorname{End}_{\mathbb{Z}} \Omega_A$ où la structure complexe sur $\mathrm{End}_{\mathbb{R}} t_A$ est celle héritée de t_A au but, c'est-à-dire que si $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} t_A$ nous définissons iu par $(iu)(x) = i(u(x))$ pour tout $x \in t_A$. Notons $g = \dim A$ et choisissons une base $e_1, \ldots, e_{2g}$ de Ω_A. Elle fournit par $u \mapsto (u(e_1), \ldots, u(e_{2g}))$ des identifications $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}} \Omega_A \simeq \Omega_A^{2g}$ et $\mathrm{End}_{\mathbb{R}} t_A \simeq t_A^{2g}$, la seconde étant un $\mathbb{C}$-isomorphisme d'après le choix effectué. Ainsi $A' \simeq A_{\mathbb{C}}^{2g}$ est une variété abélienne complexe. Maintenant $\Lambda(A) \otimes \mathbb{R} = \mathrm{End}_{\mathrm{End}\, A\otimes\mathbb{R}}\, t_A$ est un sous-espace vectoriel complexe de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}} t_A$ (car $\mathrm{End}\, A \otimes \mathbb{R}$ agit $\mathbb{C}$-linéairement sur t_A) et son intersection avec $\Omega_{A'} = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} \Omega_A$ coïncide avec $\Lambda(A)$. Par conséquent $\Lambda(A) \otimes \mathbb{R}/\Lambda(A)$ est une sous-variété abélienne complexe de A'. En fait $\Lambda(A) \otimes \mathbb{R}$ est même l'intersection des noyaux de toutes les applications $\mathbb{C}$-linéaires

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{End}_{\mathbb{R}} t_A & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\mathbb{R}} t_A \\ u & \longmapsto & u \circ \mathrm{d}\varphi - \mathrm{d}\varphi \circ u \end{array}$$

lorsque φ parcourt $\mathrm{End}\, A$. Par suite $\Lambda(A) \otimes \mathbb{R}/\Lambda(A)$ est la composante neutre de l'intersection des noyaux des applications $\lambda_\varphi \colon A' \to A'$ induites. Nous voulons maintenant définir $A^\#$ comme sous-variété de A^{2g} de sorte que dans l'isomorphisme $A' \simeq A_{\mathbb{C}}^{2g}$ la sous-variété $\Lambda(A) \otimes \mathbb{R}/\Lambda(A)$ s'identifie à $A_{\mathbb{C}}^\#$. Pour cela, il suffit de vérifier que les λ_φ définissent des morphismes $A_{\mathbb{C}}^{2g} \to A_{\mathbb{C}}^{2g}$ provenant d'applications $\mu_\varphi \colon A^{2g} \to A^{2g}$ par extension des scalaires (puisqu'alors $A^\#$ sera la composante neutre de l'intersection des $\mathrm{Ker}\, \mu_\varphi$). Or, si nous notons $M_\varphi \in M_{2g}(\mathbb{Z})$ la matrice de $\varphi \in \mathrm{End}\, A$ dans la base de Ω_A fixée, le calcul montre que $\mu_\varphi = [M_\varphi] - \varphi^{\times 2g}$ convient où $[M_\varphi] \colon A^{2g} \to A^{2g}$ est l'application induite par la matrice M_φ.

Il reste à montrer que la variété abélienne $A^\#$ ainsi construite vérifie les propriétés requises. Nous avons déjà $\mathrm{Supp}\, A^\# \subset \mathrm{Supp}\, A$ d'après l'injection $A^\# \subset A^{2g}$ qui entraîne aussi $\Lambda(A \times A^\#) = \Lambda(A)$ par le lemme 9.3, assertions (1) pour $\Lambda(A^{2g+1}) = \Lambda(A)$ et (3) pour $\Lambda(A^{2g+1}) \subset \Lambda(A \times A^\#)$. Considérons alors les deux morphismes $\alpha \colon \Lambda(A) = \Lambda(A \times A^\#) \to \Lambda(A^\#)$ (lemme 9.2) et $\beta \colon \Lambda(A^\#) \to \Omega_{A^\#} = \Lambda(A)$ donné par $\beta(v) = v(\mathrm{id}_{\Omega_A})$ pour $v \in \Lambda(A^\#)$. On constate que $\beta \circ \alpha$ est l'identité sur $\Lambda(A)$: en effet, l'action de $\Lambda(A)$ sur $\Omega_{A^\#}$ induite par α est la restriction de celle sur $\Omega_{A'} = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} \Omega_A$ qui est naturellement donnée par composition ($u(u') = u \circ u'$ si $u \in \Lambda(A)$ et $u' \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} \Omega_A$) ; par suite $\beta(\alpha(u)) = \alpha(u)(\mathrm{id}_{\Omega_A}) = u \circ \mathrm{id}_{\Omega_A} = u$. Nous savons que α est de conoyau fini donc $\Lambda(A)$ et $\Lambda(A^\#)$ ont le même rang et $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$ entraîne que α et β sont des isomorphismes. L'injectivité de α donne $\mathrm{Supp}\, A \subset \mathrm{Supp}\, A^\#$ (lemme 9.2) et sa surjectivité fournit bien $\Lambda(A) = \Lambda(A^\#)$. Enfin l'égalité $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$ traduit exactement l'isomorphisme de modules de (3). □

Dans la suite, nous considérons l'isomorphisme $\Omega_{A^\#} \simeq \Lambda(A)$ comme fixé (ce qui rend $A^\#$ unique à unique isomorphisme près) et nous nous autorisons donc à identifier $\Omega_{A^\#}$ et $\Lambda(A)$. En particulier $A^\#$ possède une période privilégiée correspondant à l'unité de $\Lambda(A)$ que nous notons simplement $\mathrm{id} \in \Omega_{A^\#}$.

Lemme 9.6. – *Soit A une variété abélienne.*

(1) *Si B est une sous-variété abélienne de $A^\#$ telle que* $\mathrm{id} \in \Omega_B$ *alors $B = A^\#$.*

(2) *L'application* $f \mapsto \mathrm{d}\, f(\mathrm{id})$ *donne un isomorphisme* $\mathrm{Hom}(A^{\#}, A) \to \Omega_A$.

Démonstration. (1) Puisque $B \subset A^{\#}$, nous avons $\Lambda(A^{\#} \times B) = \Lambda(A^{\#})$ donc Ω_B est un sous-$\Lambda(A^{\#})$-module de $\Omega_{A^{\#}} = \Lambda(A^{\#})$. Comme il en contient un générateur, $\Omega_B = \Omega_{A^{\#}}$ puis $B = A^{\#}$. (2) D'après l'assertion (5) du lemme 9.3 (comme au début de la démonstration du théorème) l'application $f \mapsto \mathrm{d}\, f$ est un isomorphisme de $\mathrm{Hom}(A^{\#}, A)$ dans $\mathrm{Hom}_{\Lambda(A)}(\Lambda(A), \Omega_A)$ d'où le résultat. □

Voici quelques autres propriétés élémentaires de $A^{\#}$ (nous traitons ici de faits généraux ; pour des exemples explicites, voir le chapitre 18).

Lemme 9.7. – *Soient A et B deux variétés abéliennes à supports disjoints.*

(1) $(A \times B)^{\#} \simeq A^{\#} \times B^{\#}$.
(2) $\mathrm{End}\, A^{\#} \simeq \Lambda(A^{\#})^{\mathrm{op}}$ *et donc* $\mathrm{rg}\,\mathrm{End}\, A^{\#} = 2 \dim A^{\#}$.
(3) *A est MM si et seulement si $A^{\#}$ est MM. Lorsque c'est le cas $(A_x)^{\#} = (A^{\#})_x$ pour tout $x \in S$.*
(4) $(A^{\#})^{\#} = A^{\#}$, $(A^n)^{\#} = A^{\#}$ *pour tout* $n \geq 1$.
(5) *Si A est simple alors $A^{\#}$ est isogène à A^k où $k = 2 \dim A / \mathrm{rg}\,\mathrm{End}\, A$. Si de plus A est MM alors $A^{\#}$ et A^k sont similaires.*

Démonstration. (1) Nous avons en effet $\Lambda(A \times B) \simeq \Lambda(A) \oplus \Lambda(B)$. (2) Application de l'assertion (5) du lemme 9.3. (3) L'équivalence est une traduction de l'assertion (6) du même lemme. La seconde partie découle de (1) puisque A est le produit des A_x. (4) Reformulations de $\Lambda(A^{\#}) = \Lambda(A)$ et $\Lambda(A^n) = \Lambda(A)$. (5) Puisque $A^{\#}$ a le même support que A, elle est isogène à une puissance de celle-ci. D'autre part, $\Omega_A \otimes \mathbb{Q}$ est un $\mathrm{End}\, A \otimes \mathbb{Q}$-espace vectoriel à gauche de dimension k donc $\Lambda(A) \otimes \mathbb{Q}$ est isomorphe à $M_k(\mathrm{End}\, A \otimes \mathbb{Q})^{\mathrm{op}}$. Cela donne $\mathrm{rg}\, \Lambda(A) = 2k \dim A$ soit $\dim A^{\#} = \dim A^k$. Si A est MM, le lemme 6.7 conclut puisque $A^{\#} \in \mathcal{D}_g(A)$ d'après le théorème 9.5. □

L'existence de $A^{\#}$ permet de démontrer la caractérisation suivante des descendantes de A.

Théorème 9.8. – *Soient A et B deux variétés abéliennes de même support. Alors $\Lambda(A) \subset \Lambda(B)$ si et seulement si $B \in \mathcal{D}(A)$.*

Démonstration. Si $B \in \mathcal{D}(A)$ nous pouvons écrire $B \simeq D/C$ pour des sous-variétés abéliennes $C \subset D \subset A^n$. Alors $\mathrm{Supp}\, A = \mathrm{Supp}\, A^n = \mathrm{Supp}\, D = \mathrm{Supp}\, B$ et le lemme 9.3 permet de conclure : $\Lambda(A) = \Lambda(A^n)$ par l'assertion (1), $\Lambda(A^n) \subset \Lambda(D)$ par l'assertion (3) et $\Lambda(D) \subset \Lambda(B)$ par l'assertion (4). Réciproquement, supposons $\Lambda(A) \subset \Lambda(B)$. Cette inclusion confère à Ω_B une structure de $\Lambda(A)$-module (de type fini) donc il existe un morphisme surjectif $\Lambda(A)^n \to \Omega_B$ de $\Lambda(A \times B)$-modules. Nous le voyons comme un élément de $\mathrm{Hom}_{\Lambda(A \times B)}(\Omega_{A^{\#}}^n, \Omega_B) \simeq \mathrm{Hom}((A^{\#})^n, B)$ d'après l'assertion (5) du lemme 9.3. Alors le morphisme $\varphi \colon (A^{\#})^n \to B$ obtenu est surjectif car $\mathrm{d}\,\varphi \colon t_{(A^{\#})^n} \to t_B$ l'est et son noyau $(\mathrm{d}\,\varphi)^{-1}(\Omega_B)/\Omega_{(A^{\#})^n} =$

$(\operatorname{Ker} \mathrm{d}\,\varphi + \Omega_{(A^\#)^n})/\Omega_{(A^\#)^n} \simeq \operatorname{Ker} \mathrm{d}\,\varphi/(\operatorname{Ker} \mathrm{d}\,\varphi \cap \Omega_{(A^\#)^n})$ est une sous-variété abélienne de $(A^\#)^n$. Ainsi $B \in \mathcal{D}_d(A^\#)$ et, comme $A^\# \in \mathcal{D}_g(A)$, nous avons bien $B \in \mathcal{D}(A)$. □

Si nous supposons seulement $\operatorname{Supp} B \subset \operatorname{Supp} A$ alors nous pouvons écrire $B \in \mathcal{D}(A) \iff \Lambda(A \times B) = \Lambda(A)$ (en effet dans ce cas $B \in \mathcal{D}(A) \iff A \times B \in \mathcal{D}(A)$ $\iff \Lambda(A) \subset \Lambda(A \times B)$ et nous avons toujours $\Lambda(A \times B) \subset \Lambda(A)$).

Nous avons aussi une description d'un morphisme factorisant $\operatorname{Hom}(B, \mathcal{D}(A))$ comme dans la proposition 6.1.

Lemme 9.9. – *Soient A, B et C trois variétés abéliennes telles que $C \in \mathcal{D}(A)$ et $\psi\colon B \to C$ une isogénie. Alors ψ engendre* $\operatorname{Hom}(B, \mathcal{D}(A))$ *si et seulement si Ω_C est le $\Lambda(A)$-module engendré par* $\mathrm{d}\,\psi(\Omega_B)$.

Démonstration. Comme $C \in \mathcal{D}(A)$, nous avons $\Lambda(A \times C) = \Lambda(A)$ donc Ω_C est un $\Lambda(A)$-module. Notons Ω' le sous-$\Lambda(A)$-module engendré par $\mathrm{d}\,\psi(\Omega_B)$ et choisissons une présentation finie

$$\Lambda(A)^m \xrightarrow{f} \Lambda(A)^n \longrightarrow \Omega' \longrightarrow 0$$

(suite exacte de $\Lambda(A)$-modules) pour des entiers $n, m \geq 1$. Nous allons appliquer de manière répétée l'assertion (5) du lemme 9.3. Tout d'abord, le morphisme de $\Lambda(A)$-modules f s'écrit $\mathrm{d}\,\alpha$ pour un morphisme $\alpha\colon (A^\#)^m \to (A^\#)^n$. Nous définissons la variété abélienne D comme le quotient $(A^\#)^n/\alpha((A^\#)^m)$. Par construction $D \in \mathcal{D}(A)$ et Ω_D s'identifie à Ω'. Alors le morphisme de $\Lambda(A \times B)$-modules $\Omega_B \to \Omega'$ induit par $\mathrm{d}\,\psi$ se relève en une isogénie $\varphi\colon B \to D$ et de même l'inclusion $\Omega' \subset \Omega_C$ provient d'une isogénie $\chi\colon D \to C$ avec $\psi = \chi \circ \varphi$. Pour établir l'énoncé, nous devons montrer que ψ engendre $\operatorname{Hom}(B, \mathcal{D}(A))$ si et seulement si χ est un isomorphisme. Pour cela, il suffit en fait de montrer que φ engendre $\operatorname{Hom}(B, \mathcal{D}(A))$. Soit donc $\omega\colon B \to D'$ un morphisme quelconque avec $D' \in \mathcal{D}(A)$. Puisque $\Lambda(A \times D') = \Lambda(A)$, $\Omega_{D'}$ est un $\Lambda(A)$-module donc contient $\Lambda(A)\,\mathrm{d}\,\omega(\Omega_B) = \mathrm{d}\,\omega(\Lambda(A)\Omega_B) = \mathrm{d}\,\omega((\mathrm{d}\,\varphi)^{-1}(\Omega_D))$ ce qui montre que ω se factorise à travers l'isogénie φ. □

En raisonnant par dualité ou par une démonstration directe analogue, on montre que si $C \in \mathcal{D}(A)$ alors $\psi\colon C \to B$ factorise $\operatorname{Hom}(\mathcal{D}(A), B)$ si et seulement si $\mathrm{d}\,\psi(\Omega_C)$ est le plus grand $\Lambda(A)$-module contenu dans Ω_B. L'isogénie du lemme 9.9 (qui est en particulier nucléaire à gauche, lemme 6.4) a pour noyau le groupe $\Lambda(A)\Omega_B/\Omega_B$ qui fait l'objet de la proposition 9.4. D'après les lemmes 6.5 et 6.7, nous savons même que toute isogénie nucléaire à gauche vers une variété abélienne MM s'écrit sous cette forme. Nous connaissons donc un contrôle du noyau de ces isogénies par un groupe de la forme $\Lambda(A)/\Lambda(A \times B)$. Nous interprétons également celui-ci comme un noyau d'isogénie.

LEMME 9.10. – *Soient A et B deux variétés abéliennes telles que* $\operatorname{Supp} B \subset \operatorname{Supp} A$. *Il existe une isogénie canonique* $\theta\colon (A \times B)^{\#} \to A^{\#}$ *vérifiant* $\mathrm{d}\,\theta(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$. *Elle est nucléaire à gauche et l'on a* $\operatorname{Ker}\theta \simeq \Lambda(A)/\Lambda(A \times B)$.

Démonstration. L'existence de θ découle une nouvelle fois de l'assertion (5) du lemme 9.3 : dans l'isomorphisme

$$\operatorname{Hom}((A \times B)^{\#}, A^{\#}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\Lambda(A\times B)}(\Lambda(A \times B), \Lambda(A)),$$

nous définissons θ comme l'antécédent de l'inclusion $\Lambda(A \times B) \subset \Lambda(A)$. Le lemme précédent montre alors que θ engendre $\operatorname{Hom}((A \times B)^{\#}, \mathcal{D}(A^{\#}))$ donc est nucléaire à gauche (lemme 6.4). $\square$

En particulier, si A et B ont le même support alors $A^{\#}$ et $B^{\#}$ sont isogènes. Ce fait et les assertions (1) et (5) du lemme 9.7 entraînent

$$\dim A^{\#} = \sum_{x\in \operatorname{Supp} A} \frac{2(\dim A_x)^2}{\operatorname{rg}\operatorname{End} A_x} = \sum_{x\in \operatorname{Supp} A} \frac{2(\dim C_x)^2}{\operatorname{rg}\operatorname{End} C_x}$$

où C_x est une variété abélienne quelconque de support $\{x\}$. On comparera cette dimension avec la fonction $\nu(\cdot)$ utilisée dans [**11**, p. 2091] (dans un but analogue) même s'il n'y a pas ici d'extension à la clôture algébrique.

L'anneau $\Lambda(A)$ permet également de caractériser les variétés CM′.

LEMME 9.11. – *Soient A et B deux variétés abéliennes.*

(1) $\Lambda(A)$ *est commutatif si et seulement si A est CM′.*
(2) *Si A et B sont MM, CM′ et isogènes alors elles sont similaires.*

Démonstration. (1) Comme A et $A^{\#}$ ont le même support, l'une est CM′ si et seulement si l'autre l'est. Par définition, $A^{\#}$ est CM′ si $\operatorname{End} A^{\#} \simeq \Lambda(A)$ contient un ordre commutatif de rang $2\dim A^{\#}$. Étant donné que l'on a toujours $\operatorname{rg}\operatorname{End} A^{\#} = 2\dim A^{\#}$ (lemme 9.7), cela revient bien à demander que $\Lambda(A)$ soit commutatif. (2) Ici $\Lambda(A)$ et $\Lambda(B)$ sont deux ordres maximaux de la $\mathbb{Q}$-algèbre $\Lambda(A) \otimes \mathbb{Q} = \Lambda(B) \otimes \mathbb{Q}$. Par la première assertion, celle-ci est commutative donc un produit de corps de nombres. Un tel produit contient un unique ordre maximal (le produit des anneaux d'entiers) d'où $\Lambda(A) = \Lambda(B)$. Par le théorème 9.8 nous avons $B \in \mathcal{D}(A)$ et le lemme 6.7 entraîne alors que A et B sont similaires. $\square$

Pour conclure ce chapitre, nous reformulons la proposition 9.4 sous la forme qui nous servira plus tard (chapitre 12) à l'aide des lemmes 9.9 et 9.10 et en termes de degrés pondérés (chapitre 4).

THÉORÈME 9.12. – *Soient A et B deux variétés abéliennes sur K telles que* $\operatorname{Supp} B \subset \operatorname{Supp} A$. *Notons* $\theta\colon (A \times B)^{\#} \to A^{\#}$ *l'isogénie canonique et ψ un générateur de* $\operatorname{Hom}(B, \mathcal{D}(A))$. *Alors* $\exp\psi \mid \exp\theta$. *Si de plus A est MM, nous avons pour tout ordre total $\preceq$ sur S et toute application* $p\colon S \to [0, +\infty[$

$$\mathcal{D}(\psi, \preceq, p) \leq \mathcal{D}(\theta, \preceq, p\xi_B).$$

Démonstration. Le noyau de ψ est isomorphe à $\Lambda(A)\Omega_B/\Omega_B$ (lemme 9.9), celui de θ à $\Lambda(A)/\Lambda(A \times B)$ (lemme 9.10). De plus, si T est une partie de S, le réseau des périodes de l'image de ψ_T s'identifie à $(\Lambda(A)\Omega_B) \cap (\Omega_{B_T} \otimes \mathbb{Q})$ (dans $\Omega_B \otimes \mathbb{Q}$). Ainsi

$$\operatorname{Ker} \psi_T \simeq \Lambda(A)\Omega_B \cap (\Omega_{B_T} \otimes \mathbb{Q})/\Omega_{B_T}.$$

Lorsque A est MM, $(A^\#)_T$ et $(A_T)^\#$ coïncident (lemme 9.7) donc $\mathrm{d}\,\theta_T$ induit sur les réseaux des périodes l'injection de $\Lambda(A \times B) \cap (\Lambda(A_T) \otimes \mathbb{Q}) = \Lambda(A \times B) \cap \Lambda(A_T)$ dans $\Lambda(A_T)$ ce qui permet d'écrire

$$\operatorname{Ker} \theta_T \simeq \Lambda(A_T)/\Lambda(A \times B) \cap \Lambda(A_T).$$

En utilisant alors $T = \{y \in S \mid y \preceq x\}$ et $T = \{y \in S \mid y \prec x\}$ dans ces deux formules, nous voyons que la divisibilité de la proposition 9.4 élevée à la puissance $p(x)$ donne bien par produit l'inégalité des degrés pondérés voulue. $\square$

Dans les cinq chapitres suivants, nous conservons l'hypothèse que K est un sous-corps de $\mathbb{C}$ (même si ce n'est pas utile partout).

CHAPITRE 10

VOLUME NORMALISÉ

Soient A et B deux variétés abéliennes isotypiques. Lorsque A et B sont respectivement munies de polarisations $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$, nous avons défini dans la partie 2 de [**11**] une métrique de Rosati sur $\mathrm{Hom}(A,B)\otimes\mathbb{R}$ et donc un covolume euclidien $\mathrm{vol}(\mathrm{Hom}(A,B))$. Ici nous modifions ce volume (dans le cas isotypique) en posant

$$\widetilde{\mathrm{vol}}(\mathrm{Hom}(A,B)) = \frac{h^0(A,\mathcal{L})^{r/2g}}{h^0(B,\mathcal{M})^{r/2h}}\,\mathrm{vol}(\mathrm{Hom}(A,B))$$

où $g=\dim A$, $h=\dim B$, r est le rang du $\mathbb{Z}$-module $\mathrm{Hom}(A,B)$ et l'on convient que l'expression vaut toujours 1 lorsque $r=0$ (c'est-à-dire y compris lorsque $gh=0$). Cette renormalisation permet de s'affranchir du choix des polarisations.

Proposition 10.1. – *La quantité* $\widetilde{\mathrm{vol}}(\mathrm{Hom}(A,B))$ *est indépendante des polarisations* $\mathcal{L}$ *et* $\mathcal{M}$ *utilisées pour la définir.*

Démonstration. Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux polarisations sur A et $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ de même sur B. Nous désignons par $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{L},\mathcal{M}}$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{L}',\mathcal{M}'}$ les deux produits scalaires associés sur $\mathrm{Hom}(A,B)\otimes\mathbb{R}$, par $V_{\mathcal{L},\mathcal{M}}$ et $V_{\mathcal{L}',\mathcal{M}'}$ les volumes de $\mathrm{Hom}(A,B)$ correspondants. Notons $\varphi_1,\dots,\varphi_r$ une base de $\mathrm{Hom}(A,B)$ puis $\psi = \phi_{\mathcal{L}'}^{-1}\circ\phi_{\mathcal{L}} \in (\mathrm{End}\,A)\otimes\mathbb{Q}$ et $\chi=\widehat{\phi_{\mathcal{M}'}\circ\phi_{\mathcal{M}}^{-1}}\in(\mathrm{End}\,B)\otimes\mathbb{Q}$. Par définition, $V^2_{\mathcal{L}',\mathcal{M}'}$ est égal au déterminant de la matrice de terme général

$$\begin{aligned}\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle_{\mathcal{L}',\mathcal{M}'} &= \mathrm{Tr}(\varphi_i\circ\phi_{\mathcal{L}'}^{-1}\circ\widehat{\varphi_j}\circ\phi_{\mathcal{M}'})\\ &= \mathrm{Tr}(\varphi_i\circ\psi\circ\phi_{\mathcal{L}}^{-1}\circ\widehat{\varphi_j}\circ\widehat{\chi}\circ\phi_{\mathcal{M}})\\ &= \langle\varphi_i\circ\psi,\chi\circ\varphi_j\rangle_{\mathcal{L},\mathcal{M}}.\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$V^2_{\mathcal{L}',\mathcal{M}'} = \det(\circ\psi)\det(\chi\circ)V^2_{\mathcal{L},\mathcal{M}}$$

où $\circ\psi$ et $\chi\circ$ désignent les endomorphismes de $\mathrm{Hom}(A,B)\otimes\mathbb{Q}$ donnés respectivement par $\varphi\mapsto\varphi\circ\psi$ et $\varphi\mapsto\chi\circ\varphi$. Maintenant l'application $(\mathrm{End}\,A)\otimes\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ décrite par $\psi_1\mapsto\det(\circ\psi_1)$ est une norme de la $\mathbb{Q}$-algèbre $(\mathrm{End}\,A)\otimes\mathbb{Q}$ au sens de la page 178 de [**22**] tout comme l'application usuelle de degré $\psi_1\mapsto\deg(\psi_1)$. L'hypothèse que A est isotypique signifie que l'algèbre $(\mathrm{End}\,A)\otimes\mathbb{Q}$ est simple donc par le lemme page 179 de **[22]** les deux normes précédentes sont toutes deux puissances d'une même norme réduite. Comme, pour la multiplication par un entier n, nous avons $\deg[n] = n^{2g}$ et $\det(\circ[n]) = n^r$, nous en déduisons $\det(\circ\psi_1) = \deg(\psi_1)^{r/2g}$. Ceci fournit $\det(\circ\psi) = h^0(A,\mathcal{L})^{r/g} h^0(A,\mathcal{L}')^{-r/g}$ et, de manière totalement analogue sur la variété abélienne isotypique B, $\det(\chi\circ) = h^0(B,\mathcal{M}')^{r/h} h^0(B,\mathcal{M})^{-r/h}$ (avec $\deg\chi = \deg\widehat{\chi}$). En reportant dans la formule pour les volumes, nous voyons apparaître l'égalité

$$\frac{h^0(A,\mathcal{L}')^{r/g}}{h^0(B,\mathcal{M}')^{r/h}} V^2_{\mathcal{L}',\mathcal{M}'} = \frac{h^0(A,\mathcal{L})^{r/g}}{h^0(B,\mathcal{M})^{r/h}} V^2_{\mathcal{L},\mathcal{M}}$$

qui montre bien que les deux façons de calculer $\widetilde{\mathrm{vol}}$ conduisent au même résultat. □

Si nous voulions étendre ceci au cas général non isotypique, il faudrait utiliser des degrés pondérés mais nous n'en aurons pas besoin dans ce texte. La normalisation rend le volume invariant par dualité.

Proposition 10.2. – *Si A et B sont deux variétés abéliennes isotypiques, nous avons $\widetilde{\mathrm{vol}}(\mathrm{Hom}(A,B)) = \widetilde{\mathrm{vol}}(\mathrm{Hom}(\widehat{B},\widehat{A}))$.*

Démonstration. Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ des polarisations sur A et B. Comme page 2075 de **[11]**, nous pouvons choisir $\widehat{\mathcal{L}}$ et $\widehat{\mathcal{M}}$ sur $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ avec $\phi_{\widehat{\mathcal{L}}}\circ\phi_{\mathcal{L}} = [m]$ et $\phi_{\widehat{\mathcal{M}}}\circ\phi_{\mathcal{M}} = [n]$ pour des entiers $m, n \geq 1$. Puisque $\phi_{\widehat{\mathcal{L}}^{\otimes n}}\circ\phi_{\mathcal{L}} = [mn]$, nous pouvons remplacer $\widehat{\mathcal{L}}$ par $\widehat{\mathcal{L}}^{\otimes n}$ et $\widehat{\mathcal{M}}$ par $\widehat{\mathcal{M}}^{\otimes m}$ de façon à supposer $m = n$. Alors, en écrivant r, g, h comme dans la définition, $m^{2g} = \deg\phi_{\mathcal{L}}\deg\phi_{\widehat{\mathcal{L}}} = h^0(A,\mathcal{L})^2 h^0(\widehat{A},\widehat{\mathcal{L}})^2$ et $m^{2h} = h^0(B,\mathcal{M})^2 h^0(\widehat{B},\widehat{\mathcal{M}})^2$ d'où

$$\frac{h^0(A,\mathcal{L})^{r/2g}}{h^0(B,\mathcal{M})^{r/2h}} = \frac{h^0(\widehat{B},\widehat{\mathcal{M}})^{r/2h}}{h^0(\widehat{A},\widehat{\mathcal{L}})^{r/2g}}.$$

La formule à montrer se réduit donc à $\mathrm{vol}(\mathrm{Hom}(A,B)) = \mathrm{vol}(\mathrm{Hom}(\widehat{B},\widehat{A}))$ pour ces choix particuliers de polarisations. Or pour $\varphi,\psi \in \mathrm{Hom}(A,B)$ nous avons

$$\begin{aligned}
\langle\varphi,\psi\rangle_{\mathcal{L},\mathcal{M}} &= \mathrm{Tr}(\varphi\circ\phi_{\mathcal{L}}^{-1}\circ\widehat{\psi}\circ\phi_{\mathcal{M}}) \\
&= \mathrm{Tr}(\varphi\circ\phi_{\widehat{\mathcal{L}}}\circ[m]^{-1}\circ\widehat{\psi}\circ\phi_{\widehat{\mathcal{M}}}^{-1}\circ[m]) \\
&= \mathrm{Tr}(\varphi\circ\phi_{\widehat{\mathcal{L}}}\circ\widehat{\psi}\circ\phi_{\widehat{\mathcal{M}}}^{-1}) \\
&= \mathrm{Tr}(\widehat{\psi}\circ\phi_{\widehat{\mathcal{M}}}^{-1}\circ\varphi\circ\phi_{\widehat{\mathcal{L}}}) \\
&= \langle\widehat{\varphi},\widehat{\psi}\rangle_{\widehat{\mathcal{M}},\widehat{\mathcal{L}}},
\end{aligned}$$

donc l'isomorphisme $\mathrm{Hom}(A,B) \to \mathrm{Hom}(\widehat{B},\widehat{A})$, $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ est une isométrie. □

Nous avons aussi un résultat pour le produit.

Lemme 10.3. – *Soient A, B et C trois variétés abéliennes telles que $A\times C$ et B sont isotypiques. Alors $\widetilde{\mathrm{vol}}(\mathrm{Hom}(A\times C,B)) = \widetilde{\mathrm{vol}}(\mathrm{Hom}(A,B))\widetilde{\mathrm{vol}}(\mathrm{Hom}(C,B))$.*

Démonstration. Le fait que $A \times C$ soit isotypique montre que $A^{\dim C}$ et $C^{\dim A}$ sont isogènes donc

$$\frac{\operatorname{rg}\operatorname{Hom}(A,B)}{\dim A} = \frac{\operatorname{rg}\operatorname{Hom}(C,B)}{\dim C} = \frac{\operatorname{rg}\operatorname{Hom}(A\times C,B)}{\dim A\times C}.$$

Ceci entraîne la formule puisqu'en choisissant des polarisations quelconques sur A, B, C et la polarisation produit sur $A \times C$, nous avons $\operatorname{vol}(\operatorname{Hom}(A\times C,B)) = \operatorname{vol}(\operatorname{Hom}(A,B))\operatorname{vol}(\operatorname{Hom}(C,B))$. □

Bien entendu, le résultat analogue pour $\operatorname{Hom}(B, A\times C)$ vaut également soit par la même démonstration soit en utilisant la dualité.

Corollaire 10.4. – *Soient A, A', B et B' quatre variétés abéliennes isotypiques. Si A et A' d'une part et B et B' d'autre part sont similaires alors $\widetilde{\operatorname{vol}}(\operatorname{Hom}(A,B)) = \widetilde{\operatorname{vol}}(\operatorname{Hom}(A',B'))$.*

Démonstration. Le lemme précédent (et l'assertion symétrique) montre

$$\widetilde{\operatorname{vol}}(\operatorname{Hom}(A^n,B^m)) = \widetilde{\operatorname{vol}}(\operatorname{Hom}(A,B))^{nm}$$

pour tous entiers naturels $n, m \geq 1$. Par similarité, nous pouvons choisir ces entiers avec $A^n \simeq (A')^n$ et $B^m \simeq (B')^m$ d'où le résultat. □

Examinons à présent la variation par isogénie.

Lemme 10.5. – *Soient A, B, C des variétés abéliennes isotypiques et $\varphi\colon C \to B$ une isogénie. Si $h = \dim B$ et $r = \operatorname{rg}\operatorname{Hom}(A,B)$ alors*

$$\widetilde{\operatorname{vol}}(\operatorname{Hom}(A,B)) \leq (\deg\varphi)^{r/2h}\widetilde{\operatorname{vol}}(\operatorname{Hom}(A,C)).$$

Démonstration. Nous fixons des polarisations $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ sur A et B et équipons C de $\varphi^*\mathcal{M}$. La formule de projection $h^0(C,\varphi^*\mathcal{M}) = \deg\varphi\cdot h^0(B,\mathcal{M})$ montre qu'il suffit de vérifier $\operatorname{vol}(\operatorname{Hom}(A,B)) \leq \operatorname{vol}(\operatorname{Hom}(A,C))$ pour ces polarisations. Or l'injection $\operatorname{Hom}(A,C) \to \operatorname{Hom}(A,B)$, $\psi \mapsto \varphi\circ\psi$ préserve les normes de Rosati d'après la proposition 2.8 de **[11]**. □

Par dualité, nous avons de même

$$\widetilde{\operatorname{vol}}(\operatorname{Hom}(C,A)) \leq (\deg\varphi)^{r/2h}\widetilde{\operatorname{vol}}(\operatorname{Hom}(B,A)).$$

Plusieurs formules de **[11]** s'expriment plus simplement avec le volume normalisé $\widetilde{\operatorname{vol}}$. C'est par exemple le cas de la notation W_i page 2084, du théorème 4.5 ou de l'énoncé suivant (basé sur le premier théorème de Minkowski).

Lemme 10.6. – *Si A et B sont deux variétés abéliennes simples isogènes alors il existe une isogénie $A \to B$ de degré au plus $\widetilde{\operatorname{vol}}(\operatorname{Hom}(A,B))^{2g/d}$ où $g = \dim A$ et $d = \operatorname{rg}\operatorname{End} A$.*

Démonstration. Ceci est une conséquence immédiate de la première assertion de la proposition 4.1 de [**11**] sachant que $d \mid 2g$ puisque nous sommes en caractéristique nulle. □

Grâce au corollaire 10.4, nous utiliserons ce lemme sous la forme : si A, B et C sont trois variétés abéliennes simples similaires alors il existe une isogénie $B \to C$ de degré au plus $\mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A)^{2g/d}$.

CHAPITRE 11

PETITE POLARISATION DANS LE CAS SIMPLE

Nous commençons par un résultat de géométrie des nombres.

THÉORÈME 11.1. – *Soient Λ un réseau et $C \subset \Lambda \otimes \mathbb{R}$ un cône convexe ouvert tel que $\overline{C} \cap -\overline{C} = \{0\}$. Alors il existe $x \in \Lambda \cap C$ tel que* $\mathrm{vol}(C \cap (x - C)) \leq \mathrm{vol}(\Lambda)$.

Démonstration. Notons $E = \Lambda \otimes \mathbb{R}$, $n = \dim E$ et fixons un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E. Les hypothèses sur C entraînent que le cône (fermé) dual $C' = \{\ell \in E^\vee \mid \forall x \in C,\ \ell(x) \geq 0\}$ est d'intérieur non vide (on montre que cet intérieur contient $\langle y, \cdot \rangle$ si y est le point de norme minimale de l'enveloppe convexe de $\{x \in \overline{C} \mid \|x\| = 1\}$). Choisissons ℓ dans l'intérieur de C' tel que $\Lambda \cap \operatorname{Ker} \ell = \{0\}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ la forme linéaire $\ell - \varepsilon \langle x / \|x\|, \cdot \rangle$ appartient encore à C'. Par suite, si $x \in C$, il vient $\ell(x) - \varepsilon \|x\| \geq 0$. Ceci montre que pour tout $a \geq 0$ l'ensemble $\{x \in C \mid \ell(x) \leq a\}$ est borné (contenu dans la boule de rayon a/ε centrée en l'origine) donc $\{x \in \Lambda \cap C \mid \ell(x) \leq a\}$ est fini. En particulier, ℓ atteint son infimum sur $\Lambda \cap C$ (intersection qui est non vide puisque le cône ouvert contient des boules de rayons arbitraires) et en un unique point x puisque $\Lambda \cap \operatorname{Ker} \ell = \{0\}$. Nous avons donc $\Lambda \cap C \cap \{y \in E \mid \ell(y) \leq \ell(x)\} = \{x\}$ d'où

$$\Lambda \cap (C - x) \cap \{y \in E \mid \ell(y) \leq 0\} = \{0\} = \Lambda \cap (x - C) \cap \{y \in E \mid \ell(y) \geq 0\}$$

par symétrie centrale avec $\Lambda - x = x - \Lambda = \Lambda$. Il vient

$$\begin{aligned} \{0\} = \Lambda \cap \Big(\big((C - x) \cap \{y \in E \mid \ell(y) \leq 0\} \big) \cup \big((x - C) \cap \{y \in E \mid \ell(y) \geq 0\} \big) \Big) \\ \supset \Lambda \cap (C - x) \cap (x - C). \end{aligned}$$

Maintenant $(C - x) \cap (x - C)$ est un corps convexe symétrique ne contenant aucun point de $\Lambda \setminus \{0\}$. Par le premier théorème de Minkowski, nous avons $\mathrm{vol}((C - x) \cap (x - C)) \leq 2^n \mathrm{vol}(\Lambda)$. Par translation et homothétie,

$$\mathrm{vol}((C - x) \cap (x - C)) = \mathrm{vol}(C \cap (2x - C)) = 2^n \mathrm{vol}(\frac{1}{2} C \cap (x - \frac{1}{2} C)).$$

La conclusion s'obtient simplement par $(1/2)C = C$ puisque C est un cône. $\square$

Cette démonstration est une adaptation de celle de Rogers donnée page 368 de [**15**]. Il serait intéressant de savoir quelle hypothèse rajouter au théorème pour obtenir une famille libre maximale d'éléments x vérifiant la même inégalité (suffirait-il que $\Lambda \setminus \{0\}$ ne rencontre pas la frontière de C ?).

Nous appliquons ceci dans un cadre matriciel où les notations sont celles de la page 2074 de [**11**]. Les dimensions sont sur $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 11.2. – *Considérons un corps $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, deux entiers $r, \delta \geq 1$ et un réseau Ω du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})^r$ muni de la norme de Hilbert-Schmidt. Alors il existe $x \in \Omega$ défini positif tel que*

$$N_{\mathrm{Mat}_\delta(\mathbb{K})^r/\mathbb{R}}(x)^{\dim \mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})/\dim \mathrm{Mat}_\delta(\mathbb{K})} \leq \left(\frac{\dim \mathcal{H}_\delta(\mathbb{K}) + 1}{2}\right)^{(r/2)\dim \mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})} \mathrm{vol}(\Omega).$$

Démonstration. Le cône $C \subset \mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})^r$ des éléments définis positifs vérifie les hypothèses du théorème 11.1 qui fournit donc $x \in \Omega \cap C$ avec $\mathrm{vol}(C \cap (x - C)) \leq \mathrm{vol}(\Omega)$. Écrivons $x = y^2$ avec y défini positif puis $C \cap (x - C) = y(y^{-1}Cy^{-1} \cap (I - y^{-1}Cy^{-1}))y$ où I est l'unité $(I_\delta, \dots, I_\delta)$ de $\mathrm{Mat}_\delta(\mathbb{K})^r$. On constate $y^{-1}Cy^{-1} = C$ donc si φ est l'application $\mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})^r \to \mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})^r$, $z \mapsto yzy$ alors $\mathrm{vol}(C \cap (x - C)) = \det \varphi \cdot \mathrm{vol}(C \cap (I - C))$. Maintenant l'écriture de la norme de Hilbert-Schmidt en termes de valeurs propres montre que si $A \in \mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})$ vérifie $\|A - (1/2)I_\delta\|_{\mathrm{HS}} < 1/2$ alors A est défini positif ; comme $\|(I_\delta - A) - (1/2)I_\delta\|_{\mathrm{HS}} = \|A - (1/2)I_\delta\|_{\mathrm{HS}}$ il en va de même de $I_\delta - A$. Par suite, si B est la boule ouverte de $\mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})$ de centre $(1/2)I_\delta$ et de rayon $1/2$ alors $B^r \subset C \cap (I - C)$ donc $\mathrm{vol}(C \cap (I - C)) \geq \mathrm{vol}(B)^r$. Or dans $\mathbb{R}^n$ la boule $B(0, 1/2)$ est de volume $(\pi/4)^{n/2}/\Gamma(n/2 + 1) \geq ((n + 1)/2)^{-n/2}$ donc, ici, $\mathrm{vol}(B)^{-1} \leq ((\dim \mathcal{H}_\delta(\mathbb{K}) + 1)/2)^{(1/2)\dim \mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})}$ puis, en combinant nos inégalités, $\det \varphi \leq ((\dim \mathcal{H}_\delta(\mathbb{K}) + 1)/2)^{(r/2)\dim \mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})} \mathrm{vol}(\Omega)$. Pour calculer $\det \varphi$, diagonalisons $y : y = p^{-1}up$ où $pp^* = I$ et u diagonale. Alors φ est la composée de $z \mapsto p^{-1}zp$, $z \mapsto uzu$, $z \mapsto pzp^{-1}$ donc $\det \varphi$ est le déterminant de $z \mapsto uzu$. Lorsque $r = 1$, u est une matrice de diagonale $(u_1, \dots, u_\delta)$ avec $u_i > 0$ et le déterminant de $z \mapsto uzu$ se calcule facilement comme

$$\left(\prod_{i=1}^{\delta} u_i\right)^{2+(\delta-1)[\mathbb{K}:\mathbb{R}]} = \left(\prod_{i=1}^{\delta} u_i\right)^{(2/\delta)\dim \mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})}$$

tandis que

$$N_{\mathrm{Mat}_\delta(\mathbb{K})/\mathbb{R}}(u) = \left(\prod_{i=1}^{\delta} u_i\right)^{\delta[\mathbb{K}:\mathbb{R}]} = \left(\prod_{i=1}^{\delta} u_i\right)^{(1/\delta)\dim \mathrm{Mat}_\delta(\mathbb{K})}.$$

Comme la norme de x est le carré de celle de u, nous trouvons bien $\det \varphi = N_{\mathrm{Mat}_\delta(\mathbb{K})^r/\mathbb{R}}(x)^{\dim \mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})/\dim \mathrm{Mat}_\delta(\mathbb{K})}$ lorsque $r = 1$ et ceci s'étend par produit à r quelconque. □

En utilisant ce résultat au lieu du lemme 4.4 de [**11**], nous obtenons la version suivante du théorème 4.5 de [**11**].

Théorème 11.3. – *Soient A une variété abélienne simple, g sa dimension, d le rang de* $\operatorname{End} A$ *et h le rang de* $\mathrm{NS}(A)$. *Il existe une isogénie $\psi\colon A \to \widehat{A}$ et un faisceau inversible $\mathcal{N}$ ample et symétrique sur A avec*

$$(\deg\psi)^{d-h} h^0(A,\mathcal{N})^{2h} \leq (8g)^{gh/2}\widetilde{\mathrm{vol}}(\operatorname{Hom}(A,\widehat{A}))^{2g}.$$

Démonstration. Nous utilisons le lemme 4.3 de **[11]** et ses notations. Commençons par préciser (3). Nous avons $|\phi_{\mathcal{L}}|^2 = \operatorname{Tr}(\phi_{\mathcal{L}} \circ \phi_{\mathcal{L}}^{\dagger}) = \operatorname{Tr}(\phi_{\mathcal{L}} \circ \phi_{\mathcal{L}}^{-1} \circ \widehat{\phi_{\mathcal{L}}} \circ \phi_{\widehat{\mathcal{L}}}) = \operatorname{Tr}(\phi_{\mathcal{L}} \circ \phi_{\widehat{\mathcal{L}}}) = \operatorname{Tr}([m]) = 2gm$ tandis que $\|\iota(\phi_{\mathcal{L}})\|^2_{\mathrm{HS}} = m\|I\|^2_{\mathrm{HS}} = r\delta m$. Par proportionnalité $\|\iota(\varphi)\|_{\mathrm{HS}} = (r\delta/2g)^{1/2}|\varphi|$ pour tout $\varphi \in \operatorname{Hom}(A,\widehat{A}) \otimes \mathbb{R}$. Par ailleurs, pour un tel φ et avec la notation θ introduite dans la démonstration du lemme 4.3 de **[11]**,

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{Mat}_\delta(\mathbb{K})^r/\mathbb{R}}(\iota(\varphi)) &= N_{\operatorname{End} A\otimes\mathbb{R}/\mathbb{R}}(\theta(\varphi)) = (\deg\theta(\varphi))^{d/2g} \\ &= (\deg\varphi)^{d/2g}\left(\frac{\deg\phi_{\widehat{\mathcal{L}}}}{m^g}\right)^{d/2g} = (\deg\varphi)^{d/2g}\left(\frac{h^0(\widehat{A},\widehat{\mathcal{L}})}{h^0(A,\mathcal{L})}\right)^{d/2g} \end{aligned}$$

(nous avons $N_{\operatorname{End} A\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Q}} = \deg^{d/2g}$ car deux normes sur l'algèbre simple $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q}$ sont puissances l'une de l'autre **[22**, p. 179**]**). Par définition, $d = \dim \mathrm{Mat}_\delta(\mathbb{K})^r$ et $h = \dim \mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})^r$. Nous appliquons alors le théorème 11.2 au réseau $\Omega = \{\iota(\phi_{\mathcal{N}}) \mid \mathcal{N} \in \mathrm{Pic}_{\mathrm{sym}}(A)\}$ de $\mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})^r$. Nous obtenons donc $\mathcal{N}$ ample et symétrique avec

$$h^0(A,\mathcal{N})^{h/g}\left(\frac{h^0(\widehat{A},\widehat{\mathcal{L}})}{h^0(A,\mathcal{L})}\right)^{h/2g} = N_{\mathrm{Mat}_\delta(\mathbb{K})^r/\mathbb{R}}(\iota(\phi_{\mathcal{N}}))^{h/d} \leq ((h/r+1)/2)^{h/2}\,\mathrm{vol}(\Omega).$$

Autrement dit, nous avons

$$h^0(A,\mathcal{N})^{2h} \leq \left(\frac{h/r+1}{2}\right)^{gh}\left(\frac{h^0(A,\mathcal{L})}{h^0(\widehat{A},\widehat{\mathcal{L}})}\right)^{h}\mathrm{vol}(\Omega)^{2g}.$$

Par le lemme 4.2 de **[11]**, tout élément $\varphi \in \operatorname{Hom}(A,\widehat{A})$ avec $\widehat{\varphi} = \varphi$ vérifie $2\iota(\varphi) \in \Omega$ donc

$$\mathrm{vol}(\Omega) \leq 2^h\,\mathrm{vol}(\iota(\operatorname{Hom}(A,\widehat{A})) \cap \mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})^r).$$

Si nous notons $\mathcal{A}_\delta(\mathbb{K})$ les matrices anti-hermitiennes de $\mathrm{Mat}_\delta(\mathbb{K})$, nous avons une somme directe orthogonale $\mathrm{Mat}_\delta(\mathbb{K}) = \mathcal{H}_\delta(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_\delta(\mathbb{K})$ qui se transporte par ι^{-1} dans $\operatorname{Hom}(A,\widehat{A}) \otimes \mathbb{R}$. Nous en déduisons

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{vol}(\{\varphi \in \operatorname{Hom}(A,\widehat{A}) \mid \widehat{\varphi} = \varphi\})\,\mathrm{vol}(\{\varphi \in \operatorname{Hom}(A,\widehat{A}) \mid \widehat{\varphi} = -\varphi\})}{\mathrm{vol}(\operatorname{Hom}(A,\widehat{A}))} \\ &\quad = \Big[\operatorname{Hom}(A,\widehat{A}) : \{\varphi \in \operatorname{Hom}(A,\widehat{A}) \mid \widehat{\varphi} = \varphi\} \oplus \{\varphi \in \operatorname{Hom}(A,\widehat{A}) \mid \widehat{\varphi} = -\varphi\}\Big] \\ &\quad \leq 2^{\min(h,d-h)}. \end{aligned}$$

En utilisant $\|\iota(\varphi)\|_{\mathrm{HS}} = (r\delta/2g)^{1/2}|\varphi|$ nous trouvons

$$\mathrm{vol}(\Omega) \leq \left(\frac{2r\delta}{g}\right)^{h/2} 2^{\min(h,d-h)} \frac{\mathrm{vol}(\mathrm{Hom}(A,\widehat{A}))}{\mathrm{vol}(\{\varphi \in \mathrm{Hom}(A,\widehat{A}) \mid \widehat{\varphi} = -\varphi\})}.$$

Si $h = d$ le dénominateur vaut 1. Lorsque $h < d$, nous obtenons

$$\mathrm{vol}(\Omega) \leq \left(\frac{2r\delta}{g}\right)^{h/2} 2^{\min(h,d-h)} (d-h)^{(d-h)/2} \frac{\mathrm{vol}(\mathrm{Hom}(A,\widehat{A}))}{|\psi|^{d-h}}$$

si ψ est choisi de norme minimale non nulle sous la condition $\widehat{\psi} = -\psi$ (premier théorème de Minkowski). Lorsque $h = d$, nous choisissons arbitrairement ψ (par exemple $\psi = \phi_{\mathcal{N}}$) et admettons par convention $(d-h)^{(d-h)/2} = 1$, de sorte que la formule est encore valable. Par la proposition 2.11 de [**11**], nous avons

$$|\psi| \geq (2g)^{1/2} \left(\frac{h^0(\widehat{A},\widehat{\mathcal{L}})}{h^0(A,\mathcal{L})}\right)^{1/2g} (\deg\psi)^{1/2g}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(\Omega) \leq \left(\frac{2r\delta}{g}\right)^{h/2} 2^{\min(h,d-h)} \left(\frac{d-h}{2g}\right)^{(d-h)/2} \left(\frac{h^0(A,\mathcal{L})}{h^0(\widehat{A},\widehat{\mathcal{L}})}\right)^{(d-h)/2g} \\ \times (\deg\psi)^{(h-d)/2g}\,\mathrm{vol}(\mathrm{Hom}(A,\widehat{A})).\end{aligned}$$

En reportant dans la majoration de $h^0(A,\mathcal{N})^{2h}$, nous trouvons bien une expression de la forme voulue

$$\begin{aligned}(\deg\psi)^{d-h} h^0(A,\mathcal{N})^{2h} &\leq c^{gh} \left(\frac{h^0(A,\mathcal{L})}{h^0(\widehat{A},\widehat{\mathcal{L}})}\right)^{(d-h)+h} \mathrm{vol}(\mathrm{Hom}(A,\widehat{A}))^{2g} \\ &= c^{gh}\widetilde{\mathrm{vol}}(\mathrm{Hom}(A,\widehat{A}))^{2g}\end{aligned}$$

où il reste à majorer la constante

$$c = \frac{h/r+1}{2}\left(\frac{2r\delta}{g}\right) 4^{\min(h,d-h)/h} \left(\frac{d-h}{2g}\right)^{(d-h)/h}.$$

Pour cela, nous distinguons suivant les quatre cas de la classification d'Albert. Nous rappelons $h = d = r$ et $\delta = 1$ dans le cas I ; $h = 3r$, $d = 4r$ et $\delta = 2$ dans le cas II ; $h = r$, $d = 4r$ et $\delta = 1$ dans le cas III ; $h = r\delta^2$ et $d = 2r\delta^2$ dans le cas IV. En substituant, c vaut selon les cas

$$\frac{2r}{g}, \quad 4\left(\frac{2r}{g}\right)^{4/3}, \quad 27\left(\frac{r}{g}\right)^4, \quad \frac{2r^2\delta^3(\delta^2+1)}{g^2}.$$

De plus, on a selon les cas

$$r \leq g, \quad 2r \leq g, \quad 4r \leq g, \quad r\delta^2 \leq g$$

(voir le théorème 7.3 de [**25**] et en particulier (4) pour le cas III). Ainsi c est majoré par 4 dans les trois premiers cas et $2(\delta + 1/\delta)$ dans le dernier. Lorsque $g \geq 2$, nous obtenons ainsi $c \leq \sqrt{8g}$ dans tous les cas. Si $g = 1$, l'énoncé est trivial puisqu'une courbe elliptique admet une polarisation principale $\psi = \phi_{\mathcal{N}}$ (et $\widetilde{\mathrm{vol}}(\mathrm{Hom}(A, \widehat{A})) = \mathrm{vol}\,\mathrm{End} A \geq 1$). $\square$

Si nous minorons simplement $\deg \psi$ par 1, nous obtenons un faisceau ample et symétrique de degré au plus $g!(8g)^{g/4}\widetilde{\mathrm{vol}}(\mathrm{Hom}(A, \widehat{A}))^{g/h}$ alors que le théorème 4.5 de **[11]** fournissait le majorant $g!(7g^{3/2})^g\widetilde{\mathrm{vol}}(\mathrm{Hom}(A, \widehat{A}))^g$. Mais nous pouvons exploiter la présence de $\deg \psi$.

Corollaire 11.4. – *Soient A une variété abélienne simple, g sa dimension et h le rang de* $\mathrm{NS}(A)$. *Soit $\chi\colon B \to C$ une isogénie où B est similaire à A et C similaire à $\widehat{A}$. Il existe un faisceau inversible $\mathcal{N}$ ample et symétrique sur A avec*

$$h^0(A, \mathcal{N}) \leq (8g)^{g/4}(\deg \chi)^{1/2}\,\mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A)^{g/h}.$$

Démonstration. Par les résultats du chapitre précédent (similarité : corollaire 10.4, isogénie : lemme 10.5) $\widetilde{\mathrm{vol}}(\mathrm{Hom}(A, \widehat{A})) = \widetilde{\mathrm{vol}}(\mathrm{Hom}(B, C)) \leq (\deg \chi)^{d/2g}\,\mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A)$. Vu le résultat à montrer, nous pouvons supposer χ de degré minimal parmi toutes les isogénies d'une variété abélienne similaire à A vers une variété abélienne similaire à $\widehat{A}$. En particulier $\deg \chi \leq \deg \psi$. La conclusion découle alors d'un calcul direct. $\square$

CHAPITRE 12

ESTIMATIONS GÉNÉRALES

Dans ce chapitre, nous allons combiner les résultats des trois chapitres précédents afin de donner des majorations pour les degrés minimaux d'isogénies et de polarisations ainsi que pour les volumes d'endomorphismes en fonction d'une quantité que nous pourrons par la suite contrôler grâce au théorème des périodes. Cette quantité doit comporter un facteur de la forme $\mathcal{D}(\theta, \preceq, \cdot)$ pour majorer le degré d'une isogénie nucléaire par le théorème 9.12 ainsi qu'un facteur de volume pour estimer le degré d'une isogénie entre similaires (voir le lemme 10.6 et le commentaire qui le suit). Ces deux ingrédients apparaissent aussi dans le corollaire 11.4 qui nous permettra de bâtir une petite polarisation. La manière exacte dont ils sont combinés dans la définition 12.1 ci-dessous s'expliquera lors de l'application du théorème des périodes (voir chapitre 16).

Lorsque p et q sont deux fonctions $S \to \mathbb{R}$ dont l'une est de support fini, nous posons $p \bullet q = \sum_{x \in S} p(x) q(x)$. Nous définissons une fonction $\nu \colon S \to \mathbb{N}$ par la propriété $\nu(x) = \dim C^{\#}$ pour tout $x \in S$ et toute variété abélienne C de support $\{x\}$. Nous fixons aussi une partie finie T de S.

DÉFINITION 12.1. – *Nous notons $\Upsilon(T)$ le supremum des nombres réels de la forme*

$$\left(\mathcal{D}(\theta, \preceq, p) \prod_{x \in S} \mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A_x^{\#})^{p(x)} \right)^{1/p \bullet \nu}$$

où A et B sont des variétés abéliennes avec $\mathrm{Supp}\, B \subset \mathrm{Supp}\, A \subset T$, A est MM, $\theta \colon (A \times B)^{\#} \to A^{\#}$ l'isogénie canonique, $\preceq$ un ordre total sur S et $p \colon S \to [0, +\infty[$ une fonction croissante pour $\preceq$, à support fini et telle que $p \bullet \nu \neq 0$.

Nous n'excluons pas pour le moment que $\Upsilon(T)$ puisse être infini (auquel cas les énoncés qui suivent sont creux) mais notons $\Upsilon(T) \geq 1$. Nous donnerons dans le chapitre suivant un critère pour la finitude à la fois de $\Upsilon(T)$ et de la quantité $d(T)$ que nous introduisons maintenant, avec la convention que le ppcm d'une famille non bornée d'entiers est infini.

Définition 12.2. – *Nous notons $d(T)$ le ppcm des entiers naturels de la forme*

$$(\deg\theta)^2 \prod_{x\in S} \mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A_x^{\#})^2$$

où A et B sont des variétés abéliennes avec $\mathrm{Supp}\, B \subset \mathrm{Supp}\, A \subset T$*, A est MM et $\theta\colon (A\times B)^{\#} \to A^{\#}$ est l'isogénie canonique.*

Nous verrons en fait plus loin que le ppcm peut aussi être remplacé par un maximum en cas de finitude. Nous rappelons que, pour une variété abélienne A, une fonction $\xi_A\colon S \to \mathbb{N}$ a été définie avant le théorème 8.7. Si A et A' sont isogènes, nous avons $\xi_A = \xi_{A'}$.

Voici le théorème d'isogénie en fonction de $\Upsilon(T)$ et $d(T)$.

Proposition 12.3. – *Soient A et B deux variétés abéliennes isogènes avec* $\mathrm{Supp}\, A \subset T$*. Il existe deux isogénies $A \to B$ et $B \to A$ de degré au plus Δ et d'exposant au plus δ où*

(1) $\Delta = \Upsilon(T)^{\xi_A \bullet \nu}$ *et* $\delta = d(T)^{1/2}$ *si A est MM,*
(2) $\Delta = \Upsilon(T)^{2\xi_A \bullet \nu}$ *et* $\delta = d(T)$ *en général.*

Démonstration. (2) découle de (1) en choisissant une variété abélienne MM isogène à A et B (voir lemme 6.6) et en composant les isogénies. Dans (1) il suffit même d'exhiber une isogénie $B \to A$, l'autre s'en déduisant par dualité ($\widehat{A}$ est MM). Choisissons alors un générateur $\psi\colon B \to D$ de $\mathrm{Hom}(B, \mathcal{D}(A))$ ainsi qu'un ordre total $\preceq$ sur S tel que ξ_A est croissante. Le théorème 9.12 appliqué avec la fonction $p = 1_A$ caractéristique de $\mathrm{Supp}\, A$ (elle aussi croissante) donne

$$\deg\psi = \mathcal{D}(\psi, \preceq, 1_A) \le \mathcal{D}(\theta, \preceq, \xi_A)$$

et

$$\exp\psi \le \exp\theta \le \deg\theta$$

où $\theta\colon (A\times B)^{\#} \to A^{\#}$ est l'isogénie canonique. Par le lemme 6.7, D est similaire à A. En vertu de la proposition 1.7 de [**25**], il existe pour tout $x \in \mathrm{Supp}\, A$ un entier $n_x \ge 0$ et trois variétés abéliennes simples similaires U_x, V_x, W_x avec $A_x \simeq U_x^{n_x} \times V_x$ et $D_x \simeq U_x^{n_x} \times W_x$. Par la remarque qui suit le lemme 10.6, il existe une isogénie $W_x \to V_x$ de degré au plus $\mathrm{vol}(\mathrm{End}\, U_x)^{k_x}$ où k_x est l'entier $2\dim U_x / \mathrm{rg}\,\mathrm{End}\, U_x$. Comme $A_x^{\#} \simeq U_x^{\#}$ est similaire à $U_x^{k_x}$, nous avons $\mathrm{vol}(\mathrm{End}\, U_x)^{k_x} = \mathrm{vol}(\mathrm{End}\, U_x^{\#})^{1/k_x}$ (voir le lemme 10.3 et le corollaire 10.4). En faisant le produit des isogénies $D_x \to A_x$ et en composant avec ψ nous obtenons une isogénie $B \to A$ de degré au plus

$$\mathcal{D}(\theta, \preceq, \xi_A) \prod_{x\in S} \mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A_x^{\#})^{1/k_x}$$

et d'exposant au plus

$$\deg\theta \prod_{x\in S} \mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A_x^{\#})^{1/k_x}.$$

Il reste seulement à majorer $1/k_x \le 1 \le \xi_A(x)$ pour voir apparaître Δ et δ. □

Passons aux polarisations. Nous introduisons une nouvelle fonction $\xi'_A\colon S \to \mathbb{Q}$ en posant $\xi'_A(x) = \xi_A(x)$ si A_x est CM$'$ et $\xi'_A(x) = \xi_A(x)/2$ sinon.

PROPOSITION 12.4. – *Soit A une variété abélienne MM de dimension g sur K avec* $\operatorname{Supp} A \subset T$. *Il existe un faisceau inversible ample et symétrique $\mathcal{N}$ sur A avec*

$$h^0(A, \mathcal{N}) \leq (8g)^{g/4}\Upsilon(T)^{\xi'_A \bullet \nu}.$$

Démonstration. Puisque A est produit de simples et que ξ'_A est la somme des fonctions ξ' associées à ces facteurs, il suffit de montrer ceci lorsque A est simple. Dans ce cas, le corollaire 11.4 donne $\mathcal{N}$ avec

$$h^0(A, \mathcal{N}) \leq (8g)^{g/4}(\deg \chi)^{1/2} \operatorname{vol}(\operatorname{End} A)^{g/\operatorname{rg} \operatorname{NS}(A)}$$

où nous pouvons choisir χ comme un générateur de $\operatorname{Hom}(A, \mathcal{D}(\widehat{A}))$. Nous majorons donc $\deg \chi$ par $\mathcal{D}(\theta, \preceq, \xi_A) = (\deg \theta)^{\xi_A(y)}$ (théorème 9.12) pour $\theta\colon (A \times \widehat{A})^\# \to \widehat{A}^\#$, $\preceq$ un ordre quelconque et y l'unique élément du support de A. D'autre part $\operatorname{vol}(\operatorname{End} A^\#) = \operatorname{vol}(\operatorname{End} A)^{k^2}$ où $k = 2g/\operatorname{rg} \operatorname{End} A$ donc

$$(\deg \chi)^{1/2} \operatorname{vol}(\operatorname{End} A)^{g/\operatorname{rg} \operatorname{NS}(A)} \leq \mathcal{D}(\theta, \preceq, p) \operatorname{vol}(\operatorname{End} A^\#)^{p(y)}$$

où p est nulle en dehors de y et

$$p(y) = \max\left(\frac{1}{2}\xi_A(y), \frac{(\operatorname{rg} \operatorname{End} A)^2}{4g \operatorname{rg} \operatorname{NS}(A)}\right).$$

Il nous reste seulement à voir $p = \xi'_A$. Nous le vérifions dans les quatre cas de la classification d'Albert. Avec les notations du tableau page 202 de [**22**], nous avons $\xi_A(y) = d$, $\operatorname{rg} \operatorname{End} A = ed^2$ et $\operatorname{rg} \operatorname{NS}(A) = \eta ed^2$ donc $p(y) = (d/2) \max(1, ed/2\eta g)$. Si A est CM$'$ alors $d = 1$, $e = 2g$ et $\eta = 1/2$ (cas IV) d'où $p(y) = 1 = \xi'_A(y)$. Dans tous les autres cas, de est un diviseur strict de $2g$ (voir le corollaire page 182 et la définition page 183 de [**22**]) donc $ed/2\eta g \leq 1/2\eta$. Ceci est majoré par 1 sauf dans le cas III où $\eta = 1/4$: ici $d = 2$ et $2e$ divise strictement g (voir le théorème 7.3 de [**25**], assertion (4) pour $ed^2 \neq 2g$) donc $ed/2\eta g = 4e/g \leq 1$ également. Ainsi, si A n'est pas CM$'$, $p(y) = d/2 = \xi_A(y)/2 = \xi'_A(y)$. □

Une combinaison immédiate (par image réciproque) avec la borne d'isogénie montre que le résultat vaut pour A quelconque en remplaçant l'exposant par $(\xi_A + \xi'_A) \bullet \nu$. Nous pouvons faire un petit peu mieux (pour la contribution des composantes CM$'$).

PROPOSITION 12.5. – *Soit A une variété abélienne de dimension g avec* $\operatorname{Supp} A \subset T$. *Il existe un faisceau inversible ample et symétrique $\mathcal{N}$ sur A avec*

$$h^0(A, \mathcal{N}) \leq (8g)^{g/4}\Upsilon(T)^{(2\xi_A - \xi'_A) \bullet \nu}.$$

Démonstration. Parmi tous les couples (B, ψ) où B est une variété abélienne MM et $\psi\colon A \to B$ une isogénie, nous en fixons un tel que $\deg \psi$ soit minimal. Ceci entraîne que ψ engendre $\operatorname{Hom}(A, \mathcal{D}(B))$ puisque tout générateur de cet ensemble est une isogénie (lemme 6.4) et de but MM (lemme 6.7). Pour $x \in \operatorname{Supp} B$, écrivons $B_x \simeq U_x^{n_x} \times V_x$ où $n_x \geq 0$ et U_x, V_x sont simples et similaires (proposition 1.7 de

[25]). Notons $\chi_x\colon U_x \to W_x$ un générateur de $\mathrm{Hom}(U_x, \mathcal{D}(\widehat{U_x}))$. En particulier, W_x et $\widehat{U_x}$ sont similaires (lemme 6.7). Par le corollaire 11.4, il existe un faisceau inversible ample et symétrique $\mathcal{L}_x$ sur U_x avec

$$h^0(U_x, \mathcal{L}_x) \le (8 \dim U_x)^{\dim U_x/4} (\deg \chi_x)^{1/2} \operatorname{vol}(\operatorname{End} U_x)^{\dim U_x/\operatorname{rg} \mathrm{NS}(U_x)}.$$

Comme W_x est similaire à $\widehat{V_x}$, le même corollaire donne un faisceau $\mathcal{M}_x$ sur V_x pour lequel $h^0(V_x, \mathcal{M}_x)$ est majoré par exactement la même quantité. Nous avons

$$\operatorname{vol}(\operatorname{End} U_x)^{\dim U_x/\operatorname{rg}\mathrm{NS}(U_x)} \le \operatorname{vol}(\operatorname{End} U_x^{\#})^{\xi'_{U_x}(x)}$$

par le calcul fait dans la démonstration précédente. Si nous notons $\mathcal{N}$ la polarisation sur A obtenue par image réciproque de la polarisation produit de tous les $\mathcal{L}_x$ (n_x fois) et $\mathcal{M}_x$, il vient

$$h^0(A, \mathcal{N}) \le (8g)^{g/4} (\deg \psi) \prod_{x \in \operatorname{Supp} A} (\deg \chi_x)^{(n_x+1)/2} \operatorname{vol}(\operatorname{End} B_x^{\#})^{\xi'_B(x)}.$$

Si A_x est CM′, il en va de même de B_x et donc de U_x ; par suite U_x et $\widehat{U_x}$ sont similaires (lemme 9.11) donc $\deg \chi_x = 1$ ($\mathrm{id}_{U_x} \in \mathrm{Hom}(U_x, \mathcal{D}(\widehat{U_x}))$ se factorise à travers le générateur χ_x). D'un autre côté, pour tout $R \subset \operatorname{Supp} A$, l'isogénie

$$\prod_{x\in R} \chi_x^{n_x+1}\colon \prod_{x\in R} U_x^{n_x+1} \longrightarrow \prod_{x\in R} W_x^{n_x+1}$$

est nucléaire à gauche d'après les lemmes 6.5 (pour χ_x), 5.9 (pour $\chi_x^{n_x+1}$) et 5.11 (pour le produit). En particulier, elle est de degré minimal donc par la proposition 12.3 de degré au plus $\Upsilon(T)^{\xi_{A_R}\bullet\nu}$. Si nous choisissons R comme l'ensemble des $x \in \operatorname{Supp} A$ tels que A_x n'est pas CM′ alors

$$\prod_{x\in \operatorname{Supp} A} (\deg \chi_x)^{n_x+1} = \prod_{x\in R} (\deg \chi_x)^{n_x+1} \le \Upsilon(T)^{\xi_{A_R}\bullet\nu} = \Upsilon(T)^{2(\xi_A - \xi'_A)\bullet\nu}.$$

Il reste à majorer par le théorème 9.12

$$\deg \psi = \mathcal{D}(\psi, \preceq, 1) \le \mathcal{D}(\theta, \preceq, \xi_A)$$

où, ici, θ est l'isogénie canonique $(B \times A)^{\#} \to B^{\#}$ et $\preceq$ un ordre sur S tel que ξ_A est croissante puis

$$(\deg \psi) \prod_{x\in S} \operatorname{vol}(\operatorname{End} B_x^{\#})^{\xi'_A(x)} \le \Upsilon(T)^{\xi_A\bullet\nu}.$$

En reportant dans la majoration de $h^0(A, \mathcal{N})$ nous obtenons le résultat cherché. □

Nous avons ensuite un résultat pour le volume. La fonction d_A a été introduite page 22 et, pour une fonction $f\colon S \to \mathbb{R}$ à support fini, nous abrégeons $\max(f) = \max\{f(x) \mid x \in S\}$.

Proposition 12.6. – *Soit A une variété abélienne avec* $\operatorname{Supp} A \subset T$*.*

(1) *Si A est MM,* $\operatorname{vol}(\operatorname{End} A) \le \Upsilon(T)^{\operatorname{rg}\operatorname{End} A/2}$.
(2) *Si A est produit de ses composantes isotypiques,* $\operatorname{vol}(\operatorname{End} A) \le \Upsilon(T)^{2d_A\bullet\xi_A}$.
(3) *On a* $\operatorname{vol}(\operatorname{End} A) \le \Upsilon(T)^{2(\nu\bullet\xi_A)\max(d_A/\nu)}$.

(4) *On a* $\mathrm{vol}(\mathrm{End}\,A) \leq \Upsilon(T)^{d_A \bullet \xi_A + (\nu \bullet 1_A)\max(d_A\xi_A/\nu)}$.

Démonstration. Pour établir (1), nous pouvons supposer que A est isotypique. La formule à montrer vaut pour A si et seulement si elle vaut pour l'une de ses puissances A^n ($n \geq 1$) et elle est aussi invariante par similarité. Par suite, comme une puissance de A est similaire à une puissance de $A^\#$, il suffit de l'établir pour $A^\#$. Dans ce cas, nous avons $\mathrm{vol}(\mathrm{End}\,A^\#) \leq \Upsilon(T)^{\dim A^\#}$ par définition de $\Upsilon(T)$. Il reste donc seulement à rappeler $\mathrm{rg}\,\mathrm{End}\,A^\# = 2\dim A^\#$.

Remarquons que si A est isotypique alors les majorations (2), (3) et (4) sont identiques. En particulier (2) est par produit conséquence de chacune des assertions (3) et (4) que nous démontrons maintenant. Nous choisissons pour cela une variété abélienne B MM isogène à A, un générateur $\varphi\colon A \to D_1$ de $\mathrm{Hom}(A, \mathcal{D}(B))$ et un générateur $\psi\colon \widehat{A} \to D_2$ de $\mathrm{Hom}(\widehat{A}, \mathcal{D}(\widehat{B}))$. Nous avons bien sûr $\widehat{\psi} \circ \mathrm{Hom}(D_1, \widehat{D_2}) \circ \varphi \subset \mathrm{End}\,A$. Fixons de plus une polarisation $\mathcal{M}$ sur D_1 et notons $\mathcal{L} = \varphi^*\mathcal{M}$ puis $\mathcal{N} = \widehat{\psi}^*\mathcal{L} = (\varphi \circ \widehat{\psi})^*\mathcal{M}$ sur $\widehat{D_2}$. Avec ces choix de polarisations, nous avons, pour tout $\chi \in \mathrm{Hom}(D_1, \widehat{D_2})$, l'égalité des normes de Rosati $|\widehat{\psi} \circ \chi \circ \varphi| = |\chi|$: en effet, par la proposition 2.8 de [**11**], ceci se traduit par

$$\frac{2g}{(\varphi^*\mathcal{M}^{\cdot g})}(\varphi^*\mathcal{M}^{\cdot g-1} \cdot \varphi^*\chi^*\mathcal{N}) = \frac{2g}{(\mathcal{M}^{\cdot g})}(\mathcal{M}^{\cdot g-1} \cdot \chi^*\mathcal{N})$$

(où $g = \dim A$) et découle directement de la formule de projection. Nous en déduisons donc

$$\mathrm{vol}(\mathrm{End}\,A) \leq \mathrm{vol}(\mathrm{Hom}(D_1, \widehat{D_2})).$$

Le membre de gauche est bien la quantité que nous voulons majorer (indépendante de la polarisation $\mathcal{L}$, voir proposition 2.9 de [**11**]) tandis que, puisque D_1 et $\widehat{D_2}$ sont MM donc produits de leurs composantes isotypiques, le membre de droite est le produit des

$$\mathrm{vol}(\mathrm{Hom}((D_1)_x, (\widehat{D_2})_x)) = \left(\frac{h^0((\widehat{D_2})_x, \mathcal{N}_x)}{h^0((D_1)_x, \mathcal{M}_x)}\right)^{\mathrm{rg}\,\mathrm{End}\,A_x/2\dim A_x} \widetilde{\mathrm{vol}}(\mathrm{Hom}((D_1)_x, (\widehat{D_2})_x))$$

pour $x \in \mathrm{Supp}\,A$.

Nous utilisons $\mathrm{rg}\,\mathrm{End}\,A_x/2\dim A_x = (d_A/\nu)(x)$, $\mathcal{N}_x = (\varphi_x \circ (\widehat{\psi})_x)^*\mathcal{M}_x$ et le corollaire 10.4 ($(D_1)_x$, $(\widehat{D_2})_x$ et B_x sont similaires) pour réécrire ceci

$$(\deg \varphi_x \cdot \deg(\widehat{\psi})_x)^{(d_A/\nu)(x)}\,\mathrm{vol}(\mathrm{End}\,B_x).$$

Par conséquent, nous avons pour tout ordre $\preceq$ sur S

$$\mathrm{vol}(\mathrm{End}\,A) \leq \mathrm{vol}(\mathrm{End}\,B)\mathcal{D}(\varphi \circ \widehat{\psi}, \preceq, d_A/\nu).$$

Nous procédons différemment à ce stade pour établir (3) et (4). Dans le premier cas, nous écrivons

$$\mathcal{D}(\varphi \circ \widehat{\psi}, \preceq, d_A/\nu) \leq \deg(\varphi \circ \widehat{\psi})^{\max(d_A/\nu)} = (\deg \varphi \cdot \deg \psi)^{\max(d_A/\nu)}.$$

Vu le choix de φ et ψ comme générateurs et si θ_1 et θ_2 sont les isogénies canoniques $(B\times A)^\# \to B^\#$ et $(\widehat{B}\times\widehat{A})^\# \to \widehat{B}^\#$, le théorème 9.12 fournit

$$\deg\varphi = \mathcal{D}(\varphi, \preceq, 1_A) \leq \mathcal{D}(\theta_1, \preceq, \xi_A)$$

et, de même, $\deg\psi \leq \mathcal{D}(\theta_2, \preceq, \xi_A)$. Par ailleurs, en raisonnant comme en (1), nous avons

$$\operatorname{vol}(\operatorname{End} B) = \prod_{x\in S} \operatorname{vol}(\operatorname{End} B_x^\#)^{(d_A/\nu)(x)^2} \leq \left(\prod_{x\in S} \operatorname{vol}(\operatorname{End} B_x^\#)^{\xi_A(x)}\right)^{\max(d_A/\nu)}$$

car $d_A/\nu \leq \xi_A$. En combinant nos inégalités, nous obtenons

$$\operatorname{vol}(\operatorname{End} A) \leq \left(\mathcal{D}(\theta_1, \preceq, \xi_A)\prod_{x\in S} \operatorname{vol}(\operatorname{End} B_x^\#)^{\xi_A(x)}\right)^{\max(d_A/\nu)} \mathcal{D}(\theta_2, \preceq, \xi_A)^{\max(d_A/\nu)}.$$

Il reste donc à choisir l'ordre $\preceq$ de sorte que ξ_A soit une fonction croissante pour reconnaître que le terme entre parenthèses et $\mathcal{D}(\theta_2, \preceq, \xi_A)$ sont tous deux majorés par $\Upsilon(T)^{\nu\bullet\xi_A}$, ce qui donne (3). Pour (4), nous écrivons avec le lemme 4.3

$$\mathcal{D}(\varphi\circ\widehat{\psi}, \preceq, d_A/\nu) = \mathcal{D}(\varphi, \preceq, d_A/\nu)\mathcal{D}(\widehat{\psi}, \preceq, d_A/\nu) = \mathcal{D}(\varphi, \preceq, d_A/\nu)\mathcal{D}(\psi, \succeq, d_A/\nu).$$

En utilisant les mêmes notations θ_1 et θ_2, nous majorons

$$\mathcal{D}(\varphi, \preceq, d_A/\nu) \leq \mathcal{D}(\theta_1, \preceq, d_A\xi_A/\nu)$$

et

$$\mathcal{D}(\psi, \succeq, d_A/\nu) \leq \mathcal{D}(\psi, \succeq, 1_A/\xi_A)^{\max(d_A\xi_A/\nu)} \leq \mathcal{D}(\theta_2, \succeq, 1_A)^{\max(d_A\xi_A/\nu)}.$$

Comme $\mathcal{D}(\theta_2, \succeq, 1_A) = \deg\theta_2 = \mathcal{D}(\theta_2, \preceq, 1_A)$, nous pouvons renverser l'ordre. Avec la formule pour $\operatorname{vol}(\operatorname{End} B)$ et $d_A/\nu \leq \xi_A$, nous majorons finalement $\operatorname{vol}(\operatorname{End} A)$ par

$$\left(\mathcal{D}(\theta_1, \preceq, d_A\xi_A/\nu)\prod_{x\in S} \operatorname{vol}(\operatorname{End} B_x^\#)^{(d_A\xi_A/\nu)(x)}\right)\mathcal{D}(\theta_2, \preceq, 1_A)^{\max(d_A\xi_A/\nu)}.$$

Si nous choisissons l'ordre $\preceq$ de sorte que $d_A\xi_A/\nu$ soit croissante alors 1_A est automatiquement croissante et donc la définition de $\Upsilon(T)$ majore le terme entre parenthèses par $\Upsilon(T)^{d_A\bullet\xi_A}$ et $\mathcal{D}(\theta_2, \preceq, 1_A)$ par $\Upsilon(T)^{\nu\bullet 1_A}$, d'où le résultat. □

Observons que le renversement de l'ordre présent dans cette démonstration (explicite dans (4), implicite dans $\deg\widehat{\psi} = \deg\psi$ pour (3)) est nécessaire car nous ne saurions pas traiter une majoration plus naturelle comme $\mathcal{D}(\theta_1, \preceq, d_A\xi_A/\nu)\mathcal{D}(\theta_2, \succeq, d_A\xi_A/\nu)$ dans la mesure où, sauf dans des cas très particuliers où elle est constante, la fonction $d_A\xi_A/\nu$ ne peut pas être croissante pour les deux ordres opposés $\preceq$ et $\succeq$. Notons aussi qu'il n'y a pas de comparaison possible entre les majorations (3) et (4) : il est facile de trouver des variétés abéliennes pour lesquelles l'exposant dans (3) est strictement supérieur à celui de (4) et inversement. Mentionnons encore ici un lemme qui nous sera utile plus tard et qui donne en particulier une majoration de l'exposant de l'assertion (3).

Lemme 12.7. – *Si A est une variété abélienne, on a les inégalités $\xi_A \leq d_A$ et $(\nu \bullet \xi_A)\max(d_A/\nu) \leq \max(1, (\dim A)^3/2)$.*

Démonstration. La première inégalité découle de $\xi_A(x)^2 \mid \operatorname{rg}\operatorname{End} A_x \mid 2d_A(x)$ pour tout $x \in \operatorname{Supp} A$. Pour la seconde, nous pouvons supposer $g = \dim A \geq 2$. Notons alors $x \in \operatorname{Supp} A$ un élément qui réalise le maximum de d_A/ν puis $B = A_{S\setminus\{x\}}$ et $h = d_A(x)$. Nous avons $\nu \bullet \xi_A = \nu \bullet \xi_B + \nu(x)\xi_A(x) \leq 2(\dim B)^2 + h\nu(x) = 2(g-h)^2 + h\nu(x)$. Ainsi $(\nu \bullet \xi_A)\max(d_A/\nu) \leq 2h(g-h)^2 + h^2 \leq g^3/2$ en majorant $h(g-h) \leq g^2/4$ et $h^2 \leq g^2h/2$ (puisque $g \geq 2$). □

Nous examinons pour terminer ce chapitre une notion liée au volume qui nous sera utile dans le chapitre suivant. Lorsque A est une variété abélienne, nous notons $\operatorname{Tr}\colon \operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ la trace associée (voir définition 2.1 de **[11]**) que l'on peut décrire comme la restriction à $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q} \subset \operatorname{End} \Omega_A \otimes \mathbb{Q} \simeq M_{2\dim A}(\mathbb{Q})$ de la trace matricielle. En particulier $\operatorname{Tr}(\mathrm{id}_A) = 2\dim A$. Si maintenant $\mathcal{O}$ est un ordre de $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q}$, nous notons $\mathcal{O}^\vee$ le sous-groupe $\{\varphi \in \operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q} \mid \operatorname{Tr}(\varphi\mathcal{O}) \subset \mathbb{Z}\}$ et nous définissons l'exposant volumique de $\mathcal{O}$ comme l'exposant du groupe fini $\mathcal{O}^\vee/\mathcal{O}$ (l'inclusion $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}^\vee$ c'est-à-dire l'intégralité $\operatorname{Tr}(\mathcal{O}) \subset \mathbb{Z}$ provient du fait que $\mathcal{O}$ préserve un réseau $\mathcal{O}\Omega_A$ de $\Omega_A \otimes \mathbb{Q}$). Le lien avec le volume apparaît dans la première des propriétés ci-dessous de cet exposant volumique que nous notons $\operatorname{evo}(\mathcal{O})$.

Lemme 12.8. – *Soient A et B deux variétés abéliennes à supports disjoints et $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ deux ordres de* $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q}$.

(1) $\operatorname{evo}(\mathcal{O}) \mid \operatorname{vol}(\mathcal{O})^2 \mid \operatorname{evo}(\mathcal{O})^{\operatorname{rg}\operatorname{End} A}$ *car* $\operatorname{vol}(\mathcal{O})^2 = \operatorname{Card} \mathcal{O}^\vee/\mathcal{O}$.
(2) $\operatorname{evo}(\mathcal{O}') \mid \operatorname{evo}(\mathcal{O}) \mid \operatorname{evo}(\mathcal{O}')\exp(\mathcal{O}'/\mathcal{O})^2$.
(3) $\operatorname{evo}(\operatorname{End} A) = \operatorname{evo}(\operatorname{End} A^n)$ *pour tout* $n \geq 1$.
(4) $\operatorname{evo}(\operatorname{End} A \times B) = \operatorname{ppcm}(\operatorname{evo}(\operatorname{End} A), \operatorname{evo}(\operatorname{End} B))$.
(5) $\operatorname{evo}(\operatorname{End} \widehat{A}) = \operatorname{evo}(\operatorname{End} A)$.

Démonstration. (1) Le volume de $\mathcal{O}$, calculé comme toujours relativement à une métrique de Rosati, est indépendant du choix de la métrique et nous avons $\operatorname{vol}(\mathcal{O})^2 = |\det M|$ lorsque M est la matrice de terme général $\operatorname{Tr}(\varphi_i\varphi_j)$ où $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ est une base de $\mathcal{O}$ sur $\mathbb{Z}$ (voir la proposition 2.9 de **[11]** et sa démonstration). Or, dans cette base de $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$, l'inclusion $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}^\vee$ devient $\mathbb{Z}^d \subset M^{-1}\mathbb{Z}^d$ ce qui donne bien $|\det M| = \operatorname{Card} \mathcal{O}^\vee/\mathcal{O}$. Nous avons donc montré la seconde formule et la première en découle puisque $\mathcal{O}^\vee$ et donc $\mathcal{O}^\vee/\mathcal{O}$ est engendré par $d = \operatorname{rg}\mathcal{O} = \operatorname{rg}\operatorname{End} A$ éléments. (2) Nous avons $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}' \subset (\mathcal{O}')^\vee \subset \mathcal{O}^\vee$ et $\exp(\mathcal{O}'/\mathcal{O})\mathcal{O}^\vee \subset (\mathcal{O}')^\vee$ directement sur la définition. (3) Parce que la trace (donnée par A^n) d'une matrice de $M_n(\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q}) \simeq \operatorname{End} A^n \otimes \mathbb{Q}$ coïncide avec la somme des traces (données par A) des coefficients diagonaux, une telle matrice (φ_{ij}) appartient à $(\operatorname{End} A^n)^\vee$ si et seulement si

$$\operatorname{Tr}((\varphi_{ij}) \circ M_n(\operatorname{End} A)) \subset \mathbb{Z} \iff \sum_{i,j} \operatorname{Tr}(\varphi_{ij} \circ \operatorname{End} A) \subset \mathbb{Z}.$$

Ceci entraîne $(\operatorname{End} A^n)^\vee = M_n((\operatorname{End} A)^\vee)$ donc le groupe $(\operatorname{End} A^n)^\vee / \operatorname{End} A^n$ est la somme de n^2 copies du groupe $(\operatorname{End} A)^\vee / \operatorname{End} A$ d'où l'égalité des exposants. (4) Ici $\operatorname{End} A \times B \simeq \operatorname{End} A \times \operatorname{End} B$ et la trace d'un couple $(\varphi, \psi) \in \operatorname{End} A \times B$ est la somme des traces de φ et ψ. On en déduit $(\operatorname{End} A \times B)^\vee \simeq (\operatorname{End} A)^\vee \times (\operatorname{End} B)^\vee$ et le résultat. (5) L'anti-isomorphisme $\operatorname{End} A \to \operatorname{End} \widehat{A}$, $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ conserve la trace. □

Ces faits de base permettent déjà de nous ramener à $A^{\#}$ dans le cas MM.

Corollaire 12.9. – *Si A est une variété abélienne MM, on a* $\operatorname{evo}(\operatorname{End} A) = \operatorname{evo}(\operatorname{End} A^{\#})$.

Démonstration. Comme A et $A^{\#}$ sont toutes deux le produit de leurs composantes isotypiques respectives, l'assertion (4) du lemme montre qu'il suffit de traiter le cas où A est isotypique. Le résultat provient de l'assertion (3) puisqu'alors $A^{\dim A^{\#}}$ et $(A^{\#})^{\dim A}$ sont similaires. □

Nous étendons les notions de volume et d'exposant volumique à l'anneau de Lefschetz $\Lambda(A)$ pour une variété abélienne quelconque. Le plus simple est de dire que nous les définissons comme les quantités déjà associées à l'anneau opposé $\Lambda(A)^{\mathrm{op}} \simeq \operatorname{End} A^{\#}$ (lemme 9.7) : $\operatorname{vol}(\Lambda(A)) = \operatorname{vol}(\operatorname{End} A^{\#})$ et $\operatorname{evo}(\Lambda(A)) = \operatorname{evo}(\operatorname{End} A^{\#})$. Cependant, si nous reprenons les définitions en termes de la trace $\operatorname{End} A^{\#} \otimes \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ associée à $A^{\#}$, nous constatons que ces définitions deviennent entièrement intrinsèques à l'anneau $\Lambda(A)$: en effet, cette trace provenant de $A^{\#}$ coïncide avec la trace intrinsèque $\Lambda(A) \otimes \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ donnée par la représentation régulière (à droite ou à gauche). Nous pouvons donc définir $\Lambda(A)^\vee \subset \Lambda(A) \otimes \mathbb{Q}$ puis $\operatorname{evo}(\Lambda(A))$ et $\operatorname{vol}(\Lambda(A))$ sans référence à $A^{\#}$. Ceci a aussi l'avantage de définir un volume sur l'espace vectoriel réel $W(\operatorname{Supp} A) \otimes \mathbb{R}$ sans référence à A. Par exemple si B est une seconde variété abélienne de même support alors $\operatorname{vol}(\Lambda(A \times B)) = [\Lambda(A) : \Lambda(A \times B)] \operatorname{vol}(\Lambda(A))$. Nous voyons ainsi apparaître un lien direct avec $d(T)$: en effet $[\Lambda(A) : \Lambda(A \times B)]$ est le degré de l'isogénie canonique $\theta\colon (A \times B)^{\#} \to A^{\#}$ tandis que si A est MM alors

$$\operatorname{vol}(\Lambda(A)) = \operatorname{vol}(\operatorname{End} A^{\#}) = \prod_{x \in S} \operatorname{vol}(\operatorname{End} A_x^{\#}),$$

ce qui nous donne (définition 12.2) $\operatorname{vol}(\Lambda(A \times B)) \mid d(T)^{1/2}$ dès que $\operatorname{Supp} A \subset T$.

Lemme 12.10. – *L'entier $d(T)$ est le ppcm des* $\operatorname{vol}(\Lambda(A))^2 = \operatorname{vol}(\operatorname{End} A^{\#})^2$ *où A parcourt les variétés abéliennes de support inclus dans T. C'est aussi vrai si l'on se restreint aux variétés de support égal à T.*

Démonstration. D'après ce qui précède, la définition 12.2 se réécrit

$$d(T) = \operatorname*{ppcm}_{A,B} \operatorname{vol}(\Lambda(A \times B))^2$$

où A et B parcourent les variétés abéliennes avec A MM et $\operatorname{Supp} B \subset \operatorname{Supp} A \subset T$. Pour la première assertion, il s'agit de voir que pour toute variété abélienne B de support inclus dans T l'entier $\operatorname{vol}(\Lambda(B))^2$ divise un entier de la forme précédente

$\mathrm{vol}(\Lambda(A \times B))^2$: il suffit pour cela de choisir A de même support et MM. Pour obtenir la deuxième assertion, nous constatons que, si B est une variété abélienne de support inclus dans T et C une variété arbitraire de support $T \setminus \mathrm{Supp}\, B$, alors $\mathrm{vol}(\Lambda(B \times C)) = \mathrm{vol}(\Lambda(B))\,\mathrm{vol}(\Lambda(C))$ et donc $\mathrm{vol}(\Lambda(B))^2$ divise bien un entier de la forme $\mathrm{vol}(\Lambda(A))^2$ pour $A = B \times C$. $\square$

Les informations sur l'exposant qui nous seront utiles dans la suite sont regroupées dans l'énoncé suivant.

Lemme 12.11. – *Soit A une variété abélienne. Il existe une descendante $B \in \mathcal{D}(A)$, MM et isogène à A, et un ordre maximal $\mathcal{O} \subset \mathrm{End}\, A \otimes \mathbb{Q}$ de sorte que $\mathcal{O} \simeq \mathrm{End}\, B$ et $\exp(\Lambda(B)/\Lambda(A))\mathcal{O} \subset \mathrm{End}\, A$. De plus $\mathrm{evo}(\mathrm{End}\, A) \mid \mathrm{vol}(\Lambda(A))^2$.*

Démonstration. Nous choisissons $D \in \mathcal{D}(A)$, MM et isogène à A, puis un générateur $\psi\colon A \to B$ de $\mathrm{Hom}(A, \mathcal{D}(D))$. Ceci assure $B \in \mathcal{D}(A)$ et B est MM par le lemme 6.7. Comme $\Lambda(A) \subset \Lambda(B)$ (théorème 9.8), l'isogénie canonique $\theta\colon (A \times B)^\# = A^\# \to B^\# = D^\#$ a pour noyau $\Lambda(B)/\Lambda(A)$. Le théorème 9.12 montre que l'exposant de ψ divise $N = \exp(\Lambda(B)/\Lambda(A))$. En particulier $N\psi^{-1} \in \mathrm{Hom}(B, A)$ donc l'ordre maximal $\mathcal{O} = \psi^{-1} \circ \mathrm{End}\, B \circ \psi$ de $\mathrm{End}\, A \otimes \mathbb{Q}$ vérifie $N\mathcal{O} \subset \mathrm{End}\, A$. Ainsi l'exposant de $\mathcal{O}/\mathcal{O} \cap \mathrm{End}\, A$ divise N et l'assertion (2) du lemme 12.8 donne $\mathrm{evo}(\mathrm{End}\, A) \mid \mathrm{evo}(\mathcal{O} \cap \mathrm{End}\, A) \mid N^2\,\mathrm{evo}(\mathcal{O})$. Le corollaire 12.9 pour B entraîne $\mathrm{evo}(\mathcal{O}) = \mathrm{evo}(\mathrm{End}\, B^\#) \mid \mathrm{vol}(\mathrm{End}\, B^\#)^2 = \mathrm{vol}(\Lambda(B))^2$ et comme N divise $[\Lambda(B) : \Lambda(A)]$ nous trouvons $\mathrm{evo}(\mathrm{End}\, A) \mid [\Lambda(B) : \Lambda(A)]^2\, \mathrm{vol}(\Lambda(B))^2 = \mathrm{vol}(\Lambda(A))^2$. $\square$

Les divisibilités $\mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A)^2 \mid \mathrm{evo}(\mathrm{End}\, A)^{\mathrm{rg}\,\mathrm{End}\, A}$ et $\mathrm{vol}(\Lambda(A)) \mid d(T)^{1/2}$ se combinent avec ce lemme pour donner un contrôle de volume $\mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A) \mid d(T)^{\mathrm{rg}\,\mathrm{End}\, A/2}$ indépendant de la proposition 12.6.

CHAPITRE 13

ACTION DE GALOIS

Nous établissons dans ce chapitre plusieurs énoncés quantitatifs où intervient l'action du groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ sur des objets associés à une variété abélienne (K étant toujours un sous-corps de $\mathbb{C}$). Pour les formuler, nous avons besoin d'une propriété de finitude que nous examinons maintenant. Lorsque T est une partie finie non vide de S, nous posons avec les notations du chapitre 9 :

$$\Lambda^\flat(T) = \bigcap_{\mathrm{Supp}\, A = T} \Lambda(A) \subset W(T).$$

Nous utilisons cet anneau pour donner le critère de finitude des quantités $\Upsilon(T)$ et $d(T)$ annoncé au début du chapitre 12.

PROPOSITION 13.1. – *Soient T une partie finie de S et $\mathcal{A}(T)$ l'ensemble des variétés abéliennes de support T. Les sept assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *$\Lambda^\flat(T)$ est un réseau de $W(T)$.*
(2) *Il existe une variété abélienne $A \in \mathcal{A}(T)$ avec $\Lambda(A) = \Lambda^\flat(T)$.*
(3) *Il existe une variété abélienne $A \in \mathcal{A}(T)$ telle que $\mathcal{A}(T) \subset \mathcal{D}(A)$.*
(4) *L'ensemble $\{\Lambda(A) \mid A \in \mathcal{A}(T)\}$ de sous-anneaux de $W(T)$ est fini.*
(5) *Chaque classe d'isogénie contenue dans $\mathcal{A}(T)$ est finie.*
(6) *La quantité $\Upsilon(T)$ est finie.*
(7) *La quantité $d(T)$ est finie.*

Démonstration. (6) $\Longrightarrow$ (5) est une conséquence du théorème d'isogénie fourni par la proposition 12.3 puisqu'une variété abélienne fixée A n'a qu'un nombre fini de quotients par un groupe fini de cardinal au plus Δ. (5) $\Longrightarrow$ (4) L'ensemble des $A^\#$ pour $A \in \mathcal{A}(T)$ est contenu dans une classe d'isogénie donc est fini. Il en va donc de même de l'ensemble des $\Lambda(A) = \Lambda(A^\#)$ (théorème 9.5). (4) $\Longrightarrow$ (2) Notons $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}(T)$ des variétés telles que $\{\Lambda(A) \mid A \in \mathcal{A}(T)\} = \{\Lambda(A_1), \ldots, \Lambda(A_n)\}$. Ainsi $\Lambda^\flat(T) = \Lambda(A_1) \cap \cdots \cap \Lambda(A_n) = \Lambda(A_1 \times \cdots \times A_n)$ (lemme 9.3). L'équivalence de (2) et (3) découle immédiatement de la caractérisation de $\mathcal{D}(A)$ par le théorème 9.8 tandis que l'implication (2) $\Longrightarrow$ (1) est immédiate. De son côté, (1) $\Longrightarrow$ (7) est une conséquence du lemme 12.10 puisque si $A \in \mathcal{A}(T)$ l'inclusion $\Lambda^\flat(T) \subset \Lambda(A)$ donne

$\mathrm{vol}(\Lambda(A))^2 \mid \mathrm{vol}(\Lambda^\flat(T))^2$. Il nous reste donc à voir (7) $\Longrightarrow$ (6). Fixons pour cela A, B, θ, $\preceq$ et p comme dans la définition 12.1 et nous constatons

$$\left(\mathcal{D}(\theta,\preceq,p)\prod_{x\in S}\mathrm{vol}(\mathrm{End}\,A_x^{\#})^{p(x)}\right)^{1/p\bullet\nu} \leq d(T)^{1/2}$$

grâce à $\mathcal{D}(\theta,\preceq,p)\leq\mathcal{D}(\theta,\preceq,1_A)^{\max(p)}$ et $\max(p)\leq p\bullet\nu$. □

Nous supposons dans toute la suite de ce chapitre que $T\subset S$ remplit ces conditions. Rappelons que d'après un théorème de Faltings c'est toujours le cas lorsque K est une extension de corps de type fini de $\mathbb{Q}$ (voir le corollaire page 211 de [**8**]).

Parmi toutes les variétés abéliennes A vérifiant la condition (2), il en existe une privilégiée à savoir celle qui vérifie $A\simeq A^{\#}$: elle ne dépend que de la partie T.

NOTATION 13.2. – *Nous notons $T^\flat$ l'unique variété abélienne de support T telle que $(T^\flat)^{\#}=T^\flat$ et $\Lambda(T^\flat)=\Lambda^\flat(T)$.*

Dès que A vérifie (2) nous avons $A^{\#}=T^\flat$. La variété abélienne $T^\flat$ satisfait également l'assertion (3) de la proposition et $\mathcal{D}(T^\flat)$ est l'ensemble de toutes les variétés abéliennes de support contenu dans T (en effet une telle variété est trivialement descendante d'une variété de support T donc de $T^\flat$). Si T' est une partie de T, elle vérifie aussi les conditions (1) à (7) (par exemple car $\Upsilon(T')\leq\Upsilon(T)$ se lit sur la définition 12.1) et $\Lambda^\flat(T)$ est un sous-anneau de $\Lambda^\flat(T')\times\Lambda^\flat(T\setminus T')$ (strict en général, voir l'exemple à la fin du chapitre 18).

LEMME 13.3. – *Nous avons $d(T)=\mathrm{vol}(\Lambda(T^\flat))^2$.*

Démonstration. Nous avons vu $d(T)\mid\mathrm{vol}(\Lambda^\flat(T))^2$ dans la démonstration de (1) $\Longrightarrow$ (7) ci-dessus à partir du lemme 12.10 et l'égalité en découle puisque le ppcm est atteint pour $A=T^\flat$. □

De la même façon, nous pouvons écrire

$$d(T)=\max_{\mathrm{Supp}\,A\subset T}\mathrm{vol}(\Lambda(A))^2=\max_{\mathrm{Supp}\,A=T}\mathrm{vol}(\mathrm{End}\,A^{\#})^2$$

et, dans la définition 12.2, le ppcm peut également être remplacé par un maximum. Notons aussi l'encadrement

$$\Upsilon(T)^2\leq d(T)\leq\Upsilon(T)^{2\dim T^\flat}$$

où la première inégalité a été vue dans la démonstration de (7) $\Longrightarrow$ (6) ci-dessus tandis que la seconde s'obtient en choisissant $p=1_A$ dans la définition 12.1.

Lorsque A est une variété arbitraire de support T, nous avons $(A\times T^\flat)^{\#}=T^\flat$ (puisque $\Lambda(A)\cap\Lambda(T^\flat)=\Lambda(T^\flat)$) et nous disposons donc, par le lemme 9.10, d'une isogénie canonique $\theta\colon T^\flat\to A^{\#}$.

Proposition 13.4. – *Il existe une partie non vide $T' \subset T$ telle que, pour tout ordre total $\preceq$ sur S pour lequel la fonction caractéristique $p = 1_{T'}$ est croissante et toute variété abélienne A de support T et MM, nous avons*

$$\Upsilon(T) = \left(\mathcal{D}(\theta, \preceq, p) \prod_{x \in S} \mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A_x^{\#})^{p(x)}\right)^{1/p\bullet\nu} = d(T')^{1/2\dim(T')^\flat}$$

où $\theta\colon T^\flat \to A^{\#}$ est l'isogénie canonique.

Démonstration. Dans la définition 12.1, il n'y a pas de restriction à limiter le supremum aux variétés A de support égal à T puisque remplacer A par son produit avec une variété abélienne MM de support $T \setminus \mathrm{Supp}\, A$ augmente la quantité considérée. De même, nous pouvons de plus nous limiter à $B = T^\flat$ car l'isogénie canonique $\theta\colon T^\flat \to A^{\#}$ se factorise à travers toutes les isogénies canoniques $(A \times B)^{\#} \to A^{\#}$ en vertu de $\Lambda(T^\flat) \subset \Lambda(A \times B) \subset \Lambda(A)$. Montrons à présent que, pour p et $\preceq$ quelconques, le nombre

$$\alpha_{\preceq,p} = \mathcal{D}(\theta, \preceq, p) \prod_{x \in S} \mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A_x^{\#})^{p(x)}$$

est indépendant du choix de la variété abélienne A de support T et MM. En revenant à la définition 4.1 du degré pondéré, il suffit de voir que c'est le cas de

$$\beta_{T'} = (\deg \theta_{T'})\, \mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A_{T'}^{\#})$$

pour toute partie T' de T. Formons pour cela le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & (T^\flat)_{T'} & \longrightarrow & T^\flat & \longrightarrow & (T \setminus T')^\flat & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \theta_{T'}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \theta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{\theta}} & & \\
0 & \longrightarrow & A_{T'}^{\#} & \longrightarrow & A^{\#} & \longrightarrow & A_{T \setminus T'}^{\#} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où $\widetilde{\theta}$ est l'isogénie canonique (associée au support $T \setminus T'$) et $T^\flat \to (T \setminus T')^\flat$ est la composée de $T^\flat \to (T')^\flat \times (T \setminus T')^\flat$ (donnée par $\Lambda^\flat(T) \subset \Lambda^\flat(T') \times \Lambda^\flat(T \setminus T')$) et de la seconde projection. Notre diagramme de variétés abéliennes correspond (en passant aux réseaux des périodes) à un diagramme de $\mathbb{Z}$-modules libres

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Lambda^\flat(T) \cap W(T') & \longrightarrow & \Lambda^\flat(T) & \longrightarrow & \Lambda^\flat(T \setminus T') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Lambda(A_{T'}) & \longrightarrow & \Lambda(A) & \longrightarrow & \Lambda(A_{T \setminus T'}) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

On constate que ce diagramme est commutatif et que la seconde ligne est exacte (elle est même scindée). Comme les trois flèches verticales sont toutes des injections entre modules de même rang et que $\Lambda^\flat(T) \cap W(T')$ est visiblement saturé dans $\Lambda^\flat(T)$, la première ligne est exacte si l'on omet le 0 final. Enfin le morphisme d'anneaux $\Lambda^\flat(T) \to \Lambda^\flat(T \setminus T')$ est surjectif car son image, étant le réseau des périodes d'une variété abélienne $(T^\flat/(T^\flat)_{T'})$ de support $T \setminus T'$, est un sous-$\Lambda^\flat(T \setminus T')$-module et contient 1.

Tout ceci entraîne

$$\begin{aligned}\beta_{T'} &= [\Lambda(A_{T'}) : \Lambda^\flat(T) \cap W(T')] \operatorname{vol}(\Lambda(A_{T'}))\\ &= \operatorname{vol}(\Lambda^\flat(T)) \operatorname{vol}(\Lambda^\flat(T \setminus T'))^{-1}\end{aligned}$$

puis

$$\alpha_{\preceq,p} = \prod_{x\in S} \left(\frac{\beta_{\preceq x}}{\beta_{\prec x}}\right)^{p(x)} = \prod_{x\in S} \left(\frac{\operatorname{vol}(\Lambda^\flat(\{y \in T \mid y \succeq x\}))}{\operatorname{vol}(\Lambda^\flat(\{y \in T \mid y \succ x\}))}\right)^{p(x)}.$$

Nous voyons que ces quantités sont bien indépendantes du choix de A et si T' est une partie de T telle que $1_{T'}$ est croissante pour $\preceq$ alors $\alpha_{\preceq,1_{T'}} = \operatorname{vol}(\Lambda^\flat(T'))$. Comme une fonction croissante $p\colon S \to [0,+\infty[$ à support dans T est une combinaison linéaire à coefficients positifs de telles fonctions caractéristiques croissantes et que $p \mapsto \log \alpha_{\preceq,p}$ et $p \mapsto p \bullet \nu$ sont deux formes linéaires à coefficients positifs, nous constatons que le maximum de $\alpha_{\preceq,p}^{1/p\bullet\nu}$ est atteint pour un tel $p = 1_{T'}$. □

Cette démonstration montre aussi que $\Upsilon(T)$ est égal au maximum des nombres réels $d(T')^{1/2\dim(T')^\flat}$ lorsque T' parcourt les parties non vides de T.

Pour énoncer nos résultats quantitatifs, nous notons

$$\delta^\flat = \operatorname{ppcm}\{\exp(\Lambda(A)/\Lambda^\flat(T)) \mid A \in \mathcal{A}(T),\ A \text{ est MM}\}$$

et

$$\Delta^\flat = [\Lambda(A) : \Lambda^\flat(T)] = \deg\theta$$

pour une variété abélienne A de support T et MM (où $\theta\colon T^\flat \to A^\#$ est l'isogénie canonique). Cette seconde définition ne dépend pas du choix de A car tous les ordres maximaux de $\Lambda^\flat(T) \otimes \mathbb{Q}$ ont le même volume (voir [**24**, (25.3)]). Nous avons

$$\delta^\flat \mid \Delta^\flat \mid d(T)^{1/2} \leq \Upsilon(T)^{\dim T^\flat}.$$

De plus si nous remplaçons T par $T' \subset T$ alors $\delta^\flat$ est remplacé par un diviseur et de même pour $\Delta^\flat$ (il suffit de faire un produit par une variété MM de support $T \setminus T'$ de la même façon que dans la démonstration du lemme 12.10).

Si A est une variété abélienne et $m \geq 1$ un entier, nous notons $A[m]$ le groupe des $\overline{K}$-points de m-torsion sur lequel agit $G = \operatorname{Gal}(\overline{K}/K)$. Si B est une seconde variété abélienne, nous notons $\operatorname{Hom}_G(A[m], B[m])$ l'ensemble des morphismes de groupes $A[m] \to B[m]$ qui respectent l'action de G. Tout $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, B)$ induit un tel morphisme donc nous avons une application naturelle $\operatorname{Hom}(A, B) \to \operatorname{Hom}_G(A[m], B[m])$.

Proposition 13.5. – *Soient A et B deux variétés abéliennes de supports inclus dans T. Alors $\delta^\flat \operatorname{Hom}_G(A[m], B[m])$ est contenu dans l'image de* $\operatorname{Hom}(A, B)$ *pour tout $m \geq 1$.*

Démonstration. Soit $u \in \operatorname{Hom}_G(A[m], B[m])$ et notons $\Gamma \subset A[m] \times B[m]$ son graphe. Puisque u est G-équivariant, Γ est stable par G donc le quotient $\pi\colon A \times B \to C = (A \times B)/\Gamma$ existe comme variété abélienne sur K. D'après le lemme 12.11, il existe une variété abélienne MM $D \in \mathcal{D}(C)$ et un ordre maximal $\mathcal{O}$ de $\operatorname{End} C \otimes \mathbb{Q}$

tels que $\exp(\Lambda(D)/\Lambda(C))\mathcal{O} \subset \operatorname{End} C$. Ici $\Lambda^\flat(\operatorname{Supp}(A \times B)) \subset \Lambda(C) \subset \Lambda(D)$ donc $\exp(\Lambda(D)/\Lambda(C)) \mid \delta^\flat$. En particulier $\delta^\flat\mathcal{O} \subset \operatorname{End} C$. Comme $\Gamma \cap (0 \times B) = 0$, nous pouvons identifier B à une sous-variété abélienne de C. D'après le corollaire 1.3 de **[25]**, il existe une sous-variété abélienne B' de C avec $C = B + B'$ et $B \cap B' \subset B[\delta^\flat]$. Par suite $C/(B' + B[\delta^\flat]) \simeq B/B[\delta^\flat] \simeq B$ et la composée

$$A \times B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow B$$

s'écrit comme $(-\chi, [\delta^\flat])$ pour un certain $\chi \in \operatorname{Hom}(A, B)$.

Par conséquent, $\Gamma = \operatorname{Ker} \pi$ est contenu dans le noyau de ce morphisme donc si $x \in A[m]$ nous avons $(-\chi, [\delta^\flat])(x, u(x)) = 0$ soit $\delta^\flat u(x) = \chi(x)$ d'où le résultat. □

Cette démonstration peut être vue comme une simplification de l'argument principal de **[20]**. On sait que la proposition 13.5 entraîne l'isomorphisme conjecturé par Tate

$$\operatorname{Hom}(A, B) \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq \operatorname{Hom}_G(T_\ell(A), T_\ell(B))$$

pour tout nombre premier ℓ et toutes variétés abéliennes A et B de supports inclus dans T. Lorsque $A = B$, il est équivalent de dire (par bicommutation) que l'anneau $\mathbb{Z}_\ell[\rho_\ell(G)]$ engendré par l'image de la représentation ℓ-adique $\rho_\ell\colon G \to \operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell(A))$ est d'indice fini dans $\Lambda_\ell(A)$. En fait, si $\operatorname{Supp} A = T$, le morphisme induit $\rho_\ell\colon G \to W_\ell(T)^\times$ est indépendant de A donc l'anneau $\mathbb{Z}_\ell[\rho_\ell(G)]$ ne dépend que de T.

Nous allons relier cet anneau à $T^\flat$. Auparavant, nous incluons, faute d'une référence adéquate, un fait de base sur les modules de Tate.

Lemme 13.6. – *Soient A une variété abélienne, ℓ un nombre premier et M un sous-module d'indice fini de $T_\ell(A)$ stable sous l'action de G. Alors il existe une variété abélienne B et une isogénie $\varphi\colon B \to A$ telles que $T_\ell(\varphi)(T_\ell(B)) = M$.*

Démonstration. Si l'entier $a \geq 0$ est tel que $\ell^a T_\ell(A) \subset M$ alors $M/\ell^a T_\ell(A)$ définit un sous-groupe fini H de $A[\ell^a] \simeq T_\ell(A)/\ell^a T_\ell(A)$ qui est stable sous G. Nous pouvons donc former le quotient $\pi\colon A \to B = A/H$ comme variété abélienne sur K et nous notons $\varphi\colon B \to A$ l'isogénie telle que $\pi \circ \varphi = [\ell^a]$. Restreinte aux points de ℓ^a-torsion, cette égalité donne $\varphi(B[\ell^a]) = \operatorname{Ker} \pi = H$. En identifiant l'application $B[\ell^a] \to A[\ell^a]$ induite par φ et l'application $f\colon T_\ell(B)/\ell^a T_\ell(B) \to T_\ell(A)/\ell^a T_\ell(A)$ induite par $T_\ell(\varphi)$, nous en déduisons que l'image de f est $M/\ell^a T_\ell(A)$ d'où le résultat. □

Voyons maintenant que la $\mathbb{Z}_\ell$-algèbre engendrée par l'image de la représentation galoisienne coïncide avec l'anneau de Lefschetz ℓ-adique de $T^\flat$.

Proposition 13.7. – *Pour toute variété abélienne A de support T et tout nombre premier ℓ, nous avons*

$$\mathbb{Z}_\ell[\rho_\ell(G)] = \Lambda^\flat(T) \otimes \mathbb{Z}_\ell = \Lambda_\ell(T^\flat).$$

Démonstration. Les identifications

$$\Lambda_\ell(T^\flat) = \Lambda(T^\flat) \otimes \mathbb{Z}_\ell = \Omega_{(T^\flat)^\#} \otimes \mathbb{Z}_\ell = \Omega_{T^\flat} \otimes \mathbb{Z}_\ell = T_\ell(T^\flat)$$

permettent de voir $\Lambda_\ell(T^\flat)$ comme le module de Tate ℓ-adique de $T^\flat$. Comme $\mathbb{Z}_\ell[\rho_\ell(G)]$ est d'indice fini dans $T_\ell(T^\flat)$, le lemme fournit une isogénie $B \to T^\flat$ telle que le module de Tate de B s'identifie à $\mathbb{Z}_\ell[\rho_\ell(G)]$. Nous en déduisons (assertion (2) du lemme 8.4)

$$\begin{aligned}\Lambda_\ell(T^\flat \times B) &= \{u \in \Lambda_\ell(T^\flat) \mid u(\mathbb{Z}_\ell[\rho_\ell(G)]) \subset \mathbb{Z}_\ell[\rho_\ell(G)]\} \\ &= \mathbb{Z}_\ell[\rho_\ell(G)] \subset \Lambda_\ell(T^\flat).\end{aligned}$$

Par définition de $T^\flat$, nous avons $\Lambda(T^\flat \times B) = \Lambda(T^\flat) \cap \Lambda(B) = \Lambda(T^\flat)$ donc, par extension des scalaires à $\mathbb{Z}_\ell$, on a $\Lambda_\ell(T^\flat \times B) = \Lambda_\ell(T^\flat)$ qui est l'égalité cherchée. □

Cette propriété permet d'améliorer et de simplifier le théorème 4.6 de [**23**] : pour toute variété abélienne A, il existe une variété abélienne B isogène à une sous-variété abélienne de $A^{2\dim A}$ telle que $\operatorname{End} B \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq \mathbb{Z}_\ell[\rho_\ell(G)]^{\mathrm{op}}$ pour tout nombre premier ℓ. En effet, il suffit de choisir $B = (\operatorname{Supp} A)^\flat$: on a $\operatorname{End} B \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq \Lambda_\ell(B)^{\mathrm{op}}$ (lemme 9.7 (2)) et B est isogène à $A^\# \subset A^{2\dim A}$ (théorème 9.5). L'exposant $2\dim A$ améliore le $Q(\dim A)$ de [**23**] et il n'est pas nécessaire de faire intervenir une algèbre de matrices.

Par ailleurs, nous avons immédiatement un contrôle de l'indice de $\mathbb{Z}_\ell[\rho_\ell(G)]$ dans $\Lambda_\ell(A)$.

Corollaire 13.8. – *Pour toute variété abélienne A de support contenu dans T*

$$\prod_\ell [\Lambda_\ell(A) : \mathbb{Z}_\ell[\rho_\ell(G)]] \mid \Delta^\flat \mid d(T)^{1/2}.$$

Démonstration. Par la proposition, le produit vaut $[\Lambda(A) : \Lambda^\flat(\operatorname{Supp} A)]$. □

Ce corollaire fournit ainsi une version quantitative du théorème 2.7 de Deligne [**7**].

Le dernier objet associé au groupe de Galois que nous pouvons contrôler est le sous-groupe invariant $\operatorname{Br}(A_{\overline{K}})^G$ du groupe de Brauer géométrique.

Proposition 13.9. – *Soit A une variété abélienne de support inclus dans T telle que* $\operatorname{End} A_{\overline{K}} = \operatorname{End} A$.

L'exposant du groupe fini $\operatorname{Br}(A_{\overline{K}})^G$ *divise* $2\delta^\flat \operatorname{vol}(\Lambda(A \times \widehat{A}))^2 \mid 2d(T)^{3/2}$. *Par suite,* $\operatorname{Card} \operatorname{Br}(A_{\overline{K}})^G \mid (2d(T)^{3/2})^{(\dim A)(2\dim A-1)-\operatorname{rg} \operatorname{NS}(A)}$.

Rappelons [**30**, (5)] que pour tout entier $m \geq 1$ la suite exacte de Kummer en cohomologie étale fournit une suite exacte

$$0 \longrightarrow (\operatorname{NS}(A_{\overline{K}}) \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^G \xrightarrow{a} H^2_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mu_m)^G \xrightarrow{b} \operatorname{Br}(A_{\overline{K}})[m]^G.$$

Nous contrôlons séparément l'exposant des conoyaux de a et b.

Lemme 13.10. – *Pour tout $m \geq 1$, on a* $2\delta^\flat \operatorname{Coker} a = 0$.

Démonstration. D'après le lemme 2.6 de **[23]** (donné lorsque m est une puissance de nombre premier mais qui s'étend directement par somme), nous pouvons écrire un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{NS}(A) \arrow[r, "{[-1]}"] \arrow[d] & \mathrm{NS}(A) \arrow[r, hook] & \mathrm{Hom}(A, \widehat{A}) \arrow[d] \\
(\mathrm{NS}(A_{\overline{K}}) \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^G \arrow[r, "a"] & H^2_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mu_m)^G \arrow[r, hook] & \mathrm{Hom}_G(A[m], \widehat{A}[m]).
\end{tikzcd}$$

Soit $u \in H^2_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mu_m)^G$. D'après la proposition 13.5, l'image de $\delta^\flat u$ dans le groupe $\mathrm{Hom}_G(A[m], \widehat{A}[m])$ provient d'un morphisme $\varphi\colon A \to \widehat{A}$. L'élément $\varphi + \widehat{\varphi}$ appartient à $\mathrm{NS}(A) \subset \mathrm{Hom}(A, \widehat{A})$ et son image dans $\mathrm{Hom}_G(A[m], \widehat{A}[m])$ est $2\delta^\flat u$ car u donne un élément symétrique de $\mathrm{Hom}_G(A[m], \widehat{A}[m])$ (voir **[23**, (11)**]**). Le diagramme montre alors que $2\delta^\flat u$ est dans l'image de a d'où le résultat. $\square$

Dans le deuxième cas, la méthode est apparentée à celle de **[23]** mais nous employons l'exposant volumique au lieu du discriminant.

Lemme 13.11. – *Pour tout entier $m \geq 1$, on a* $\mathrm{evo}(\mathrm{End}(A_{\overline{K}} \times \widehat{A}_{\overline{K}}))\,\mathrm{Coker}\, b = 0$.

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où $m = \ell^n$ pour un nombre premier ℓ et $n \geq 1$. Si nous notons Y le $\mathbb{Z}_\ell[G]$-module $H^2_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_\ell(1))$ alors $Y \otimes \mathbb{Z}_\ell/m\mathbb{Z}_\ell \simeq H^2_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mu_m)$ donc en formant la suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell[G]$-modules libres

$$0 \longrightarrow \mathrm{NS}(A_{\overline{K}}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0,$$

nous avons $Z \otimes \mathbb{Z}_\ell/m\mathbb{Z}_\ell \simeq \mathrm{Br}(A_{\overline{K}})[m]$ et ainsi b est $(Y/mY)^G \to (Z/mZ)^G$. En abrégeant $\mathcal{O} = \mathrm{End}(A_{\overline{K}} \times \widehat{A}_{\overline{K}})$, il va nous suffire de montrer qu'il existe un morphisme de $\mathbb{Z}_\ell[G]$-modules $Z \to Y$ tel que la composée

$$Z \longrightarrow Y \longrightarrow Z$$

soit la multiplication par $\mathrm{evo}(\mathcal{O})$. En effet si ce morphisme existe la multiplication $(Z/mZ)^G \to (Z/mZ)^G$ par $\mathrm{evo}(\mathcal{O})$ se factorise à travers b d'où le résultat. L'existence d'un tel morphisme $Z \to Y$ est équivalente à celle d'un sous-$\mathbb{Z}_\ell[G]$-module Z' de Y tel que $\mathrm{evo}(\mathcal{O})Y \subset (\mathrm{NS}(A_{\overline{K}}) \otimes \mathbb{Z}_\ell) \oplus Z'$ que nous allons maintenant établir.

Nous voyons $\mathcal{O}$ comme sous-anneau de $\mathcal{O}_1 = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\Omega_A \times \Omega_{\widehat{A}})$ qui est muni de la trace $\mathrm{Tr}\colon \mathcal{O}_1 \to \mathbb{Z}$ des $\mathbb{Z}$-endomorphismes. Nous posons $\mathcal{O}^\perp = \{f \in \mathcal{O}_1 \mid \mathrm{Tr}(f\mathcal{O}) = 0\}$, un sous-$\mathbb{Z}$-module saturé de $\mathcal{O}_1$. La restriction de $\mathrm{Tr}\colon \mathcal{O}_1 \to \mathbb{Z}$ à $\mathcal{O}$ est la trace donnée par $A_{\overline{K}} \times \widehat{A}_{\overline{K}}$ qui nous a servi à définir $\mathcal{O}^\vee$ donc $\mathrm{evo}(\mathcal{O})$. L'application bilinéaire $\mathcal{O} \times \mathcal{O} \to \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto \mathrm{Tr}(xy)$ est non dégénérée (son discriminant étant $\mathrm{vol}(\mathcal{O})^2 \neq 0$) donc $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}^\perp = 0$ et nous pouvons identifier $\mathcal{O}^\vee$ à $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathbb{Z})$. Ainsi si $f \in \mathcal{O}_1$ l'application $\mathcal{O} \to \mathbb{Z}, \varphi \mapsto \mathrm{Tr}(f\varphi)$ correspond à un élément ψ de $\mathcal{O}^\vee$ c'est-à-dire $\mathrm{Tr}(f\varphi) = \mathrm{Tr}(\psi\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{O}$. Par définition $\mathrm{evo}(\mathcal{O})\mathcal{O}^\vee \subset \mathcal{O}$ donc

$\mathrm{evo}(\mathcal{O})f = \mathrm{evo}(\mathcal{O})\psi + \mathrm{evo}(\mathcal{O})(f-\psi) \in \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}^{\perp}$. Notons $\gamma\colon \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}$ l'application linéaire ainsi définie par $\gamma(f) = \mathrm{evo}(\mathcal{O})\psi$. On vérifie qu'elle respecte la décomposition

$$\mathcal{O}_1 = \mathrm{End}(\Omega_A) \oplus \mathrm{Hom}(\Omega_A, \Omega_{\widehat{A}}) \oplus \mathrm{Hom}(\Omega_{\widehat{A}}, \Omega_A) \oplus \mathrm{End}(\Omega_{\widehat{A}})$$

ainsi que l'involution de dualité sur $\mathcal{O}_1$: $\gamma(\widehat{f}) = \widehat{\gamma(f)}$ (car $\mathrm{Tr}(f_1\widehat{f}_2) = \mathrm{Tr}(\widehat{f}_1 f_2)$ et $\mathcal{O}$ est stable par $f \mapsto \widehat{f}$). En faisant le produit tensoriel avec $\mathbb{Z}_\ell$, nous avons $\mathrm{evo}(\mathcal{O})(\mathcal{O}_1 \otimes \mathbb{Z}_\ell) \subset (\mathcal{O}\otimes\mathbb{Z}_\ell)\oplus(\mathcal{O}^{\perp}\otimes\mathbb{Z}_\ell) \subset \mathcal{O}_1\otimes\mathbb{Z}_\ell$. Ici $\mathcal{O}_1\otimes\mathbb{Z}_\ell = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell(A)\times T_\ell(\widehat{A}))$ admet une action du groupe G qui laisse stable le sous-module $\mathcal{O}\otimes\mathbb{Z}_\ell$ ainsi que l'extension de la trace $\mathrm{Tr}\colon \mathcal{O}_1 \otimes \mathbb{Z}_\ell \to \mathbb{Z}_\ell$.

Par suite $\mathcal{O}^{\perp} \otimes \mathbb{Z}_\ell = \{f \in \mathcal{O}_1 \otimes \mathbb{Z}_\ell \mid \mathrm{Tr}(f(\mathcal{O}\otimes\mathbb{Z}_\ell)) = 0\}$ est aussi un sous-$\mathbb{Z}_\ell[G]$-module de $\mathcal{O}_1 \otimes \mathbb{Z}_\ell$. Enfin $Y = H^2_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_\ell(1))$ s'identifie au sous-$\mathbb{Z}_\ell[G]$-module de $\mathcal{O}_1 \otimes \mathbb{Z}_\ell$ correspondant aux morphismes $T_\ell(A) \to T_\ell(\widehat{A})$ autoduaux et $\mathrm{NS}(A_{\overline{K}}) \otimes \mathbb{Z}_\ell = Y \cap (\mathcal{O}\otimes\mathbb{Z}_\ell)$. Les propriétés de γ montrent que $(\gamma\otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_\ell})(Y) \subset \mathrm{NS}(A_{\overline{K}}) \otimes \mathbb{Z}_\ell$ de sorte qu'il suffit de poser $Z' = Y \cap (\mathcal{O}^{\perp}\otimes\mathbb{Z}_\ell)$ pour avoir $\mathrm{evo}(\mathcal{O})Y \subset (\mathrm{NS}(A_{\overline{K}})\otimes\mathbb{Z}_\ell) \oplus Z'$. □

Démonstration de la proposition 13.9. Puisque nous avons une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, a \longrightarrow \mathrm{Br}(A_{\overline{K}})[m]^G \longrightarrow \mathrm{Coker}\, b \longrightarrow 0,$$

la combinaison des deux lemmes ci-dessus montre que l'exposant de $\mathrm{Br}(A_{\overline{K}})[m]^G = \mathrm{Br}(A_{\overline{K}})^G[m]$ divise $2\delta^\flat\,\mathrm{evo}(\mathrm{End}(A_{\overline{K}} \times \widehat{A}_{\overline{K}}))$. Ceci étant vrai pour tout $m \geq 1$ il en va de même de l'exposant de $\mathrm{Br}(A_{\overline{K}})^G$.

En outre l'hypothèse $\mathrm{End}\, A_{\overline{K}} = \mathrm{End}\, A$ entraîne $\mathrm{End}(A_{\overline{K}} \times \widehat{A}_{\overline{K}}) = \mathrm{End}(A \times \widehat{A})$ et le lemme 12.11 fournit $\mathrm{evo}(\mathrm{End}(A\times\widehat{A})) \mid \mathrm{vol}(\Lambda(A\times\widehat{A}))^2$. Ceci donne l'assertion sur l'exposant et celle sur le cardinal s'en déduit car, comme

$$\mathrm{Br}(A_{\overline{K}}) \simeq (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^r$$

où r est l'entier $\mathrm{rg}\, H^2_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_\ell(1)) - \mathrm{rg}\,\mathrm{NS}(A) = \mathrm{rg} \bigwedge^2 \mathrm{Hom}(T_\ell(A), \mathbb{Z}_\ell) - \mathrm{rg}\,\mathrm{NS}(A) = (\dim A)(2\dim A - 1) - \mathrm{rg}\,\mathrm{NS}(A)$, le sous-groupe $\mathrm{Br}(A_{\overline{K}})[E]$ des éléments d'ordre divisant un entier $E \geq 1$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/E\mathbb{Z})^r$. □

CHAPITRE 14

UN FAISCEAU SUR $A^{\#}$

Ce chapitre présente un résultat technique qui nous servira dans la suite à majorer $\Upsilon(T)$ *via* un théorème des périodes. Il s'agit de construire un faisceau inversible ample sur $A^{\#}$ (lorsque A est simple et MM) qui contrôle le volume de $\operatorname{End} A^{\#}$.

Nous commençons par un énoncé de géométrie des nombres dont la démonstration nous a été communiquée par Pascal Autissier. Lorsque $(\Omega, \|\cdot\|)$ est un réseau euclidien, nous notons $\rho(\Omega)$ son rayon de recouvrement c'est-à-dire le plus petit nombre réel ρ tel que toute boule fermée de rayon ρ de $\Omega \otimes \mathbb{R}$ contienne un point de Ω.

Proposition 14.1. – *Soient $(\Omega, \|\cdot\|)$ un réseau euclidien de rang n et ε un réel tel que $0 < \varepsilon < 1$. Pour tout réel $r \geq 2\rho(\Omega)/\varepsilon$ il existe une famille libre $\omega_1, \ldots, \omega_n$ d'éléments de Ω avec $\|\omega_i\| \leq r$ pour $1 \leq i \leq n$ et*

$$\operatorname{vol}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\omega_i\right)^{1/n} \geq r(1-\varepsilon).$$

Démonstration. – Nous construisons les ω_i par récurrence. Pour $i \geq 1$, nous supposons une famille libre $\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}$ déjà construite et notons

$$V_i = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}(\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}) \subset \Omega \otimes \mathbb{R}$$

(donc $V_1 = \{0\}$). Fixons un vecteur unitaire $e_i \in V_i^{\perp}$. Par définition du rayon de recouvrement, nous pouvons choisir un élément ω_i de Ω tel que $\|\omega_i - (r-\rho(\Omega))e_i\| \leq \rho(\Omega)$. Nous avons bien $\|\omega_i\| \leq r$. D'autre part, pour la distance d sur $\Omega \otimes \mathbb{R}$ associée à la norme $\|\cdot\|$, il vient

$$d(\omega_i, V_i) \geq d((r-\rho(\Omega))e_i, V_i) - d((r-\rho(\Omega))e_i, \omega_i) \geq r - 2\rho(\Omega) \geq r(1-\varepsilon) > 0.$$

En particulier, la famille $\omega_1, \ldots, \omega_i$ est libre. Finalement, lorsque ω_n est construit, nous obtenons

$$\operatorname{vol}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\omega_i\right) = \prod_{i=1}^{n} d(\omega_i, V_i) \geq (r(1-\varepsilon))^n. \qquad \square$$

Comme depuis le début du chapitre 9, le corps de base K est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et l'extension des scalaires qui s'en déduit permet de définir, pour une variété abélienne A sur K, son espace tangent t_A, son réseau des périodes Ω_A et par suite $A^{\#}$. Ici nous notons de plus $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$, pour un faisceau inversible ample $\mathcal{L}$ sur A, la norme hermitienne associée sur t_A qui est donnée par $\|z\|_{\mathcal{L}}^2 = H(z,z)$ pour $z \in t_A$ si $H\colon t_A \times t_A \to \mathbb{C}$ est la forme de Riemann de l'extension de $\mathcal{L}$ à $\mathbb{C}$ (voir paragraphe 2.4 de [**10**]).

Théorème 14.2. – *Soient A une variété abélienne simple et MM sur K, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample et symétrique sur A et $\varepsilon \in]0,1[$ un réel. Pour tout réel*

$$\mu \geq \frac{4 \dim A}{\varepsilon^2 \dim A^{\#}} \rho(\Omega_A)^2$$

il existe un faisceau inversible $\mathcal{N}$ ample et symétrique sur $A^{\#}$ vérifiant $\|\mathrm{id}\|_{\mathcal{N}}^2 \leq 2 \dim A^{\#} \cdot \mu$ et

$$h^0(A^{\#}, \mathcal{N}) \geq \mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A^{\#})(\mu(1-\varepsilon)^2)^{\dim A^{\#}}.$$

Démonstration. Notons $g = \dim A$ et $k = \dim A^{\#}/\dim A$. Appliquons la proposition 14.1 au réseau euclidien $(\Omega_A, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ de rang $n = 2g$ et au réel ε. Nous obtenons une famille libre $\omega_1, \dots, \omega_{2g}$ de Ω_A vérifiant les conditions de la proposition avec $r = \sqrt{k\mu}$. Désignons à présent par f_i ($1 \leq i \leq 2g$) l'image réciproque de ω_i par l'isomorphisme $\mathrm{Hom}(A^{\#}, A) \to \Omega_A$ du lemme 9.6. Définissons alors

$$\mathcal{N} = \bigotimes_{i=1}^{2g} f_i^* \mathcal{L}$$

sur $A^{\#}$. Ce faisceau (symétrique) est ample car le morphisme $(f_1, \dots, f_{2g})\colon A^{\#} \to A^{2g}$ est fini : comme lors de la démonstration du théorème 9.5, l'application sur les espaces tangents s'écrit $\Lambda(A) \otimes \mathbb{R} \to t_A^{2g}$, $u \mapsto (u(\omega_1), \dots, u(\omega_{2g}))$ donc est injective. Pour la norme de l'identité, nous avons

$$\|\mathrm{id}\|_{\mathcal{N}}^2 = \sum_{i=1}^{2g} \|\mathrm{d}\, f_i(\mathrm{id})\|_{\mathcal{L}}^2 = \sum_{i=1}^{2g} \|\omega_i\|_{\mathcal{L}}^2 \leq 2gr^2 = 2 \dim A^{\#} \cdot \mu.$$

Parce que A est MM, $A^{\#}$ est similaire à A^k donc, par le corollaire 10.4, il vient

$$\mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A^{\#})^{1/k} = \widetilde{\mathrm{vol}}(\mathrm{Hom}(A^{\#}, A)) = \frac{h^0(A^{\#}, \mathcal{N})^{1/k}}{h^0(A, \mathcal{L})} \mathrm{vol}(\mathrm{Hom}(A^{\#}, A))$$

où le dernier volume est défini par la métrique de Rosati associée à $\mathcal{N}$ et $\mathcal{L}$. Par l'isomorphisme $\mathrm{Hom}(A^{\#}, A) \to \Omega_A$ et l'égalité $h^0(A, \mathcal{L}) = \mathrm{vol}(\Omega_A)$, nous pouvons écrire

$$\frac{\mathrm{vol}(\mathrm{Hom}(A^{\#}, A))}{h^0(A, \mathcal{L})} = \frac{[\Omega_A : \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Z}\omega_i]\, \mathrm{vol}(\bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Z} f_i)}{[\mathrm{Hom}(A^{\#}, A) : \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Z} f_i]\, \mathrm{vol}(\bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Z}\omega_i)} = \frac{\mathrm{vol}(\bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Z} f_i)}{\mathrm{vol}(\bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Z}\omega_i)}.$$

Nous minorons le dénominateur par $(r(1-\varepsilon))^{2g}$ par le choix des ω_i. Pour le numérateur, les inégalités d'Hadamard et arithmético-géométrique entraînent

$$\operatorname{vol}\left(\bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Z} f_i\right) \leq \prod_{i=1}^{2g} |f_i| \leq (2g)^{-g}\left(\sum_{i=1}^{2g} |f_i|^2\right)^g = (2g)^{-g} \operatorname{Tr}\left(\sum_{i=1}^{2g} f_i^{\dagger} \circ f_i\right)^g .$$

En revenant à la formule pour $\operatorname{vol}(\operatorname{End} A^{\#})$, nous trouvons donc

$$\left(\frac{\operatorname{vol}(\operatorname{End} A^{\#})}{h^0(A^{\#}, \mathcal{N})}\right)^{1/k} \leq \left(\frac{\operatorname{Tr}(\sum_{i=1}^{2g} f_i^{\dagger} \circ f_i)}{2gk\mu(1-\varepsilon)^2}\right)^g .$$

Finalement, par définition de l'involution de Rosati généralisée $\dagger$ sur $\operatorname{Hom}(A^{\#}, A)$ (voir page 2064 de [**11**]), nous calculons

$$\phi_{\mathcal{N}} = \sum_{i=1}^{2g} \phi_{f_i^* \mathcal{L}} = \sum_{i=1}^{2g} \widehat{f}_i \circ \phi_{\mathcal{L}} \circ f_i = \sum_{i=1}^{2g} \phi_{\mathcal{N}} \circ f_i^{\dagger} \circ f_i,$$

donc $\sum_{i=1}^{2g} f_i^{\dagger} \circ f_i = \mathrm{id}_{A^{\#}}$ a pour trace $2 \dim A^{\#} = 2kg$ d'où le résultat. $\square$

CHAPITRE 15

RAFFINEMENTS DU THÉORÈME DES PÉRIODES

Nous démontrons ici à partir des résultats de [**10**] une nouvelle version du théorème des périodes. En effet, le théorème 1.2 de [**10**] présente un inconvénient pour le présent texte : le minimum essentiel $\delta(A_\sigma, \mathcal{L}_\sigma)$ qu'il utilise est défini en faisant intervenir toutes les sous-variétés abéliennes de A_σ. En pratique, cela demande lors de son application de faire une extension de corps et donc, par exemple, au cours de la recherche d'une isogénie $A \to B$, nous trouvons plutôt une isogénie $A_{\overline{K}} \to B_{\overline{K}}$. Cette contrainte pouvait être contournée par un argument de trace dans [**11**] (voir le lemme 3.3) mais ici notre démarche plus directe interdit ce va-et-vient dans une extension. Nous devons donc modifier le théorème des périodes pour faire apparaître la quantité (plus petite que $\delta(A_\sigma, \mathcal{L}_\sigma)$)

$$\delta_\sigma(A, \mathcal{L}) = \sup_B \delta(A_\sigma, \mathcal{L}_\sigma, B_\sigma)$$

où B parcourt les sous-variétés abéliennes de A ($(A, \mathcal{L})$ est une variété abélienne polarisée sur K, σ un plongement $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ et la définition de $\delta(A_\sigma, \mathcal{L}_\sigma, B_\sigma)$ donnée page 360 de [**10**] sera rappelée ci-dessous). Heureusement la souplesse du théorème-clef 4.5 de [**10**] permet cette modification : nous choisirons les sous-variétés abéliennes $B[\sigma]$ de son énoncé comme extensions de sous-variétés abéliennes de A et il s'agira essentiellement de minorer ξ_σ. Concrètement, nous reprendrons en fait une petite partie de la démonstration du théorème-clef au lieu de l'utiliser tel quel afin de réduire certaines constantes.

Nous commençons par quelques préparatifs avant d'énoncer notre résultat. Nous fixons un corps de nombres K et une variété abélienne polarisée $(A, \mathcal{L})$ sur K de dimension g. Pour toute extension K' de K et toute sous-variété abélienne stricte B de $A_{K'}$ nous posons

$$x(B) = \left(\frac{\deg_{\mathcal{L}} B}{\deg_{\mathcal{L}} A}\right)^{1/t} \qquad \text{et} \qquad y(B) = \left(\frac{h^0(B, \mathcal{L})}{h^0(A, \mathcal{L})}\right)^{1/t}$$

où $t = \dim A - \dim B$ (par un léger abus de notations nous confondons ici $\mathcal{L}$ avec son extension à K'). Nous définissons ensuite

$$x = \min_B x(B) \qquad \text{et} \qquad y = \min_B y(B)$$

où, dans les deux cas, B parcourt toutes les sous-variétés abéliennes strictes de $A_{\overline{K}}$. Le réel x est celui défini page 362 de **[10]** (puisque toutes les sous-variétés abéliennes de $A_{\mathbb{C}}$ proviennent de $A_{\overline{K}}$). Avec $\deg_{\mathcal{L}} B = (g-t)!h^0(B,\mathcal{L})$ et $g!/(g-t)! \leq g^t$, nous obtenons $x \leq y \leq gx$ tandis que le choix $B = 0$ donne $y \leq y(0) = h^0(A,\mathcal{L})^{-1/g}$ (en particulier $y \leq 1$).

L'intérêt d'employer y plutôt que x s'explique par le fait suivant, qui nous permettra de nous restreindre aux sous-variétés abéliennes de A et donc de ne pas faire d'extension de corps.

Proposition 15.1. – *Il existe une sous-variété abélienne stricte B de A avec $y = y(B)$.*

Démonstration. Choisissons une sous-variété abélienne stricte B_0 de $A_{\overline{K}}$ telle que $y = y(B_0)$ et de dimension minimale pour cette propriété. Si B_0 s'écrit $B_{\overline{K}}$ pour une sous-variété abélienne B de A, nous avons terminé. Sinon il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ tel que $\sigma(B_0) \neq B_0$. Notons alors B_1 la composante neutre de $B_0 \cap \sigma(B_0)$ et $B_2 = B_0 + \sigma(B_0)$. D'après la proposition 3.1 de **[26]**, nous avons

$$h^0(B_1,\mathcal{L})h^0(B_2,\mathcal{L}) \leq h^0(B_0,\mathcal{L})h^0(\sigma(B_0),\mathcal{L}) = h^0(B_0,\mathcal{L})^2.$$

En divisant par $h^0(A,\mathcal{L})$, ceci devient

$$y(B_1)^{g-\dim B_1} y(B_2)^{g-\dim B_2} \leq y(B_0)^{2(g-\dim B_0)}$$

où, pour couvrir le cas $B_2 = A$, nous donnons une valeur arbitraire à $y(A)$, disons y. Ceci permet d'écrire dans tous les cas $y \leq y(B_2)$.

En utilisant $y(B_0) = y$, $\dim B_1 + \dim B_2 = 2\dim B_0$ et $g - \dim B_1 > 0$, il vient $y(B_1) \leq y$ donc $y(B_1) = y$. Mais $\dim B_1 < \dim B_0$ contredit le choix de B_0 : cette absurdité donne la proposition. □

Voici le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 15.2. – *Si $(A,\mathcal{L})$ est une variété abélienne polarisée de dimension g sur un corps de nombres K, nous avons*

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbb{C}} \frac{1}{\delta_\sigma(A,\mathcal{L})^2} \leq 10(eg)^{2g} y \left(h_F(A) + 1{,}9g^2 - 0{,}92g\log y\right).$$

Comme promis, nous rappelons la définition de $\delta(A_\sigma,\mathcal{L}_\sigma,B_\sigma)$ qui intervient dans $\delta_\sigma(A,\mathcal{L})$. Elle repose sur la métrique sur l'espace tangent (associée à la forme de Riemann) mentionnée avant le théorème 14.2. Comme ici K n'est plus un sous-corps fixé de $\mathbb{C}$ mais que nous faisons varier le plongement $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$, nous notons $\|\cdot\|_{\mathcal{L},\sigma}$ la norme sur t_{A_σ} donnée par l'extension $\mathcal{L}_\sigma$ de $\mathcal{L}$ à A_σ et $d_{\mathcal{L},\sigma}$ la distance associée. Alors nous définissons

$$\delta(A_\sigma,\mathcal{L}_\sigma,B_\sigma) = \min\{d_{\mathcal{L},\sigma}(\omega,t_{B_\sigma}) \mid \omega \in \Omega_{A_\sigma} \setminus \Omega_{B_\sigma}\}.$$

Lorsque B est nulle, nous retrouvons le diamètre d'injectivité $\rho(A_\sigma, \mathcal{L}_\sigma)$ autrement dit la plus petite norme d'une période non nulle de A_σ. Le lemme matriciel suivant dû à Autissier contrôle ce diamètre.

Proposition 15.3. – *Sous les mêmes hypothèses, nous avons*

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbb{C}} \frac{1}{\rho(A_\sigma, \mathcal{L}_\sigma)^2} \leq 2{,}3\left(h_F(A) + \frac{1}{2}\log h^0(A, \mathcal{L})\right) + 5{,}5g.$$

Démonstration. Lorsque $h^0(A, \mathcal{L}) = 1$ l'inégalité découle du corollaire 1.4 de [**1**] dans lequel ε est choisi de sorte que $6 = 2{,}3 \times \pi(1-\varepsilon)$. Le cas général s'obtient par isogénie, exactement comme dans la démonstration de la proposition 3.6 de [**10**]. □

Pour établir le théorème 15.2, nous allons suivre [**10**] en commençant par une réduction du problème similaire à celle de la page 363 de *op. cit.*

Lemme 15.4. – *Pour démontrer le théorème 15.2, nous pouvons supposer $g \geq 2$ et $y \leq 1/3798$.*

Démonstration. Si $g = 1$ et $\mathcal{L}_0$ désigne la polarisation principale sur A, nous avons $\delta_\sigma(A, \mathcal{L})^2 = \delta(A_\sigma, \mathcal{L}_\sigma, 0)^2 = \rho(A_\sigma, (\mathcal{L}_0)_\sigma)^2/y$ pour tout $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$. Il suffit alors d'observer que l'inégalité souhaitée

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbb{C}} \frac{1}{\rho(A_\sigma, (\mathcal{L}_0)_\sigma)^2} \leq 10e^2(h_F(A) + 1{,}9)$$

est une conséquence directe du lemme matriciel qui donne la borne (positive) $2{,}3(h_F(A) + 2{,}4)$. Supposons maintenant $g \geq 2$ et $y > 1/3798$. Cette valeur numérique est choisie pour avoir $2{,}3 \leq 10(eg)^{2g}y$. Comme $\rho(A_\sigma, \mathcal{L}_\sigma) \leq \delta_\sigma(A, \mathcal{L})$ (en considérant $B = 0$ dans la définition) il suffit ici d'établir

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbb{C}} \frac{1}{\rho(A_\sigma, \mathcal{L}_\sigma)^2} \leq 2{,}3(h_F(A) - 0{,}92g\log y + 1{,}9g^2).$$

Ceci découle immédiatement du lemme matriciel qui, grâce à $y \leq h^0(A, \mathcal{L})^{-1/g}$, fournit le majorant $2{,}3(h_F(A) - 0{,}5g\log y + 2{,}4g)$. □

Nous entamons maintenant la démonstration du théorème 15.2. Pour cela, nous choisissons, pour chaque $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$, une sous-variété abélienne $B[\sigma]$ de A_σ qui provient d'une sous-variété abélienne de A et qui vérifie $y(B[\sigma]) = y$. Ceci est possible en vertu de la proposition 15.1. Nous pouvons aussi assurer que $B[\sigma]$ et $B[\overline{\sigma}]$ se correspondent comme dans l'énoncé du théorème 4.5 de [**10**] dont nous reprenons les notations δ_σ et ξ_σ et dont nous allons suivre la démonstration de très près pour montrer

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbb{C}} \left(\frac{\xi_\sigma}{\delta_\sigma}\right)^2 \leq 56{,}1g^{2g}x \times 1{,}1199g^2\left(h_F(A) - 0{,}92g\log y + 1{,}9g^2\right)$$

lorsque $g \geq 2$ et $y \leq 1/3798$. Nous suivons pas à pas [**10**] : le paragraphe 4.3.2 permet de remplacer K par une extension pour prouver cette formule puis nous procédons exactement comme dans la partie 6 de la page 368 à la page 379. Notons que pour assurer la formule (2) page 369, il est nécessaire de corriger légèrement la présentation : il convient de fixer le paramètre n (début de 6.2) avant le choix du modèle de Moret-Bailly (début de 6.1) afin de prendre un modèle de $(A, \mathcal{L}^{\otimes n})$ pour obtenir (2) (voir [**5**] où ceci est rétabli dans le bon ordre). Cette correction ne modifie en rien les calculs qui suivent.

Par ailleurs, nous notons que dans la proposition 4.3 de [**10**] nous pouvons remplacer $\deg_{\mathcal{L}} B$ par $h^0(B, \mathcal{L})$ puisque l'on a en fait $b \leq h^0(B, \mathcal{L})^2$ (voir le paragraphe 2.2). Nous répercutons ceci après l'inégalité (7) page 375 lors de l'usage de cette proposition en remplaçant $\deg_{\mathcal{L}_\sigma} B[\sigma]$ par $h^0(B[\sigma], \mathcal{L}_\sigma)$. Cette altération se propage de façon transparente dans les formules (8), (11) et (13). Nous arrivons ainsi à la page 379. Dans la première formule, nous choisissons 78 au lieu de 105 ce qui remplace 280 par 208 (deux fois). On vérifie par le calcul que ce changement ne modifie pas la valeur 13,2 qui suit (nous avons le droit d'utiliser $x \leq 1/2141$ puisque nous avons même $x \leq y \leq 1/3798$). De cette façon, nous obtenons une inégalité (17) modifiée où 106 est remplacé par 79 et où la seule autre différence est la présence de $h^0(B[\sigma], \mathcal{L}_\sigma)$ dans $\aleph_1$. Ensuite nous modifions réellement les ultimes calculs. Vu la formule que nous voulons montrer, il suffit de combiner cette version de (17) avec l'estimation ci-dessous qui remplace la proposition 6.8.

Lemme 15.5. – *Nous avons*

$$\max\left(79, \aleph_1 + \frac{1}{7} + \frac{3\pi g x}{4}\right) \leq 1{,}1199 g^2 \left(h_F(A) - 0{,}92 g \log y + 1{,}9 g^2\right).$$

Démonstration. Les inégalités $h_F(A) \geq -3g/2$, $g \geq 2$ et $y \leq 1/3798$ entraînent

$$1{,}1199 g^2 \left(h_F(A) - 0{,}92 g \log y + 1{,}9 g^2\right) \geq 4(4 \times 1{,}9 - 3 + 1{,}84 \log 3798) > 79.$$

Nous majorons ensuite les différents termes qui apparaissent dans l'expression de $\aleph_1$. La minoration $h_F(A) \geq -3g/2$ montre que le majorant dans la proposition 4.6 de [**9**] est positif donc, avec $h^0(A, \mathcal{L}) \leq y^{-g}$, nous obtenons

$$g \max(0, \widehat{\mu}_{\max}(\overline{t_A^\vee})) \leq g(0{,}6g+1) h_F(A) + g^3 \log(15{,}2g) - \frac{g^2}{2}\left(\frac{g}{2}+1\right)\log y.$$

Par ailleurs, le lemme matriciel (proposition 15.3) et le lemme 3.19 de [**5**] couplé à la minoration $h_F(A) \geq -3g/2$ qui assure $2{,}3 h_F(A) + 5{,}5 g \geq e$ conduisent à

$$\begin{aligned}\frac{g}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}} \log\max\left(1, \frac{1}{\rho(A_\sigma, \mathcal{L}_\sigma)}\right) &\leq \frac{g}{2} \log\max\left(e, \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}} \frac{1}{\rho(A_\sigma, \mathcal{L}_\sigma)^2}\right) \\ &\leq \frac{g}{2}\log(2{,}3 h_F(A) - 1{,}15 g \log y + 5{,}5 g).\end{aligned}$$

Nous majorons alors ce logarithme en utilisant l'inégalité $\log a \leq \varepsilon a - \log(e\varepsilon)$ vraie pour tous $a, \varepsilon > 0$. Maintenant, par le choix de $B[\sigma]$, nous constatons

$h^0(B[\sigma],\mathcal{L}) = y^{g-\dim B[\sigma]}h^0(A,\mathcal{L}) \leq y^{-\dim B[\sigma]} \leq y^{-(g-1)}$. En majorant encore $2\varepsilon_\sigma \leq g^{-g}$ et en regroupant nos estimations, nous arrivons à

$$\begin{aligned}\aleph_1 \leq g\,(0{,}6g+1+1{,}15\varepsilon)\,h_F(A) - g\left(\frac{g^2}{4} + g(2{,}5+0{,}575\varepsilon) - 2\right)\log y \\ + g^3\log(15{,}2g) + 2g\log g + 2{,}75\varepsilon g^2 - \frac{g}{2}\log(e\varepsilon) + \frac{\log 12}{2g^g}.\end{aligned}$$

Choisissons alors $\varepsilon = 1/29$. Avec $g \geq 2$, nous voyons que le facteur devant $\log y$ est plus petit que $0{,}92g^2(0{,}6g+1+1{,}15\varepsilon)$ tandis que la somme des cinq derniers termes est majorée par $1{,}85g^3(0{,}6g+1+1{,}15\varepsilon)$. Finalement $x \leq 1/3798$ entraîne de même

$$1{,}85g^3(0{,}6g+1+1{,}15\varepsilon) + \frac{1}{7} + \frac{3\pi g x}{4} \leq 1{,}9g^3(0{,}6g+1+1{,}15\varepsilon)$$

qui donne le résultat en observant $0{,}6g+1+1{,}15\varepsilon \leq 1{,}1199g$. □

Nous pouvons maintenant conclure la démonstration du théorème 15.2. Grâce au lemme 15.4, nous supposons $g \geq 2$ et $y \leq 1/3798$ ce qui permet d'utiliser la majoration de la moyenne des $(\xi_\sigma/\delta_\sigma)^2$ que nous venons d'établir. Par ailleurs, le fait que $B[\sigma]$ provienne d'une sous-variété abélienne de A assure $\delta_\sigma = \delta(A_\sigma,\mathcal{L}_\sigma,B[\sigma]) \leq \delta_\sigma(A,\mathcal{L})$. Ceci étant rappelé, le théorème 15.2 découle donc du lemme suivant et de l'inégalité $\frac{56{,}1}{2\pi} \times 1{,}1199 \leq 10$.

Lemme 15.6. – *Pour tout plongement $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$, nous avons*

$$\frac{x}{\xi_\sigma^2 y} \leq \frac{e^{2g}}{2\pi g^2}.$$

Démonstration. Notons ici $b = \dim B[\sigma]$. Par définition de ξ_σ (page 362 de [**10**]) et l'inégalité $y(B[\sigma]) = y \leq gx$, il vient

$$\frac{x}{\xi_\sigma^2 y} = \frac{x(B[\sigma])^{2(g-b)}}{x^{2(g-b)-1}y} \leq g^{2(g-b)-1}\left(\frac{x(B[\sigma])}{y(B[\sigma])}\right)^{2(g-b)} = g^{2(g-b)-1}\frac{b!^2}{g!^2}.$$

Par $b! \leq g^b$, cette expression est majorée par $g^{2g-1}/g!^2$ et l'on conclut par l'inégalité de Stirling $g! \geq (g/e)^g\sqrt{2\pi g}$. □

Si, au lieu de reprendre une partie de sa démonstration, nous avions utilisé le théorème 4.5 de [**10**] tel quel avec ce lemme, nous aurions obtenu à la place du théorème 15.2 que nous venons d'établir l'estimation un peu moins précise en g

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbb{C}}\frac{1}{\delta_\sigma(A,\mathcal{L})^2} \leq 3{,}67(eg)^{2g}g^4y\max(1, h_F(A)+g\log\sqrt{\pi}, \log g! - g\log y)$$

(avec $\deg B[\sigma] \leq \deg A \leq g!y^{-g}$ et $23/2\pi \leq 3{,}67$).

En plus d'être un théorème des périodes ne nécessitant pas d'extension de corps, notre théorème 15.2 présente un autre avantage (par rapport au théorème 1.2 de [**10**]) du fait que nous avons conservé y au lieu de le remplacer par son majorant $h^0(A,\mathcal{L})^{-1/g}$. Ceci nous autorisera à considérer d'autres majorants de y. Ce n'est pas possible directement sur l'énoncé du théorème 15.2 mais le devient sur la version légèrement affaiblie suivante.

COROLLAIRE 15.7. – *Si* $(A, \mathcal{L})$ *est une variété abélienne polarisée de dimension* g *sur un corps de nombres* K*, nous avons*

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}} \frac{1}{\delta_\sigma(A, \mathcal{L})^2} \leq 10(eg)^{2g} y \max\big(h_F(A) + 1{,}9g^2 - 0{,}92g \log y, 0{,}92g\big).$$

En effet, on vérifie sans peine que le membre de droite de l'inégalité du corollaire est une fonction croissante de y (car c'est le cas de $]0, +\infty[\to \mathbb{R}, y \mapsto y \max(1, c - \log y)$ quel que soit le réel c). Cette remarque permet d'introduire un degré pondéré dans le théorème des périodes.

LEMME 15.8. – *Pour tout ordre* $\preceq$ *sur* S *et toute fonction croissante* $p\colon S \to [0, +\infty[$ *avec* $p \bullet d_A \neq 0$*, on a*

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}, \preceq, p)^{1/p \bullet d_A} \leq y^{-1}.$$

Démonstration. Si la formule est vraie pour deux fonctions p et q, elle l'est aussi pour $p + q$ ainsi que pour αp où $\alpha > 0$. Par suite, il suffit de la montrer lorsque p est une fonction caractéristique croissante, disons $p(w) = 1$ si $w \succ v$ et $p(w) = 0$ si $w \preceq v$ où $v \in S$ est fixé. Or dans ce cas

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}, \preceq, p) = \prod_{w \succ v} \frac{h^0(A_{\preceq w}, \mathcal{L})}{h^0(A_{\prec w}, \mathcal{L})} = \frac{h^0(A, \mathcal{L})}{h^0(A_{\preceq v}, \mathcal{L})}$$

tandis que $p \bullet d_A = \sum_{w \succ v} \dim A_w = \dim A_{\succ v} = g - \dim A_{\preceq v}$ d'où le résultat par définition de y. □

CHAPITRE 16

APPLICATION DU THÉORÈME DES PÉRIODES

Nous combinons maintenant les résultats des deux chapitres précédents pour majorer $\Upsilon(T)$ (définition 12.1) lorsque K est un corps de nombres. Pour que cette définition ait un sens, nous fixons un plongement privilégié $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$ qui permet de voir K comme sous-corps de $\mathbb{C}$ et donc de disposer de $A^{\#}$ et des objets associés pour une variété abélienne A sur K. Lors des applications des énoncés du chapitre précédent (théorème des périodes ou lemme matriciel), nous ne garderons que la contribution de σ dans les expressions en moyenne sur tous les plongements.

Pour contrôler $\Upsilon(T)$, nous avons besoin (comme dans l'introduction) de fixer une variété abélienne de référence de support T. Dans la suite, C sera donc une variété abélienne quelconque sur le corps de nombres K et nous majorerons $\Upsilon(\operatorname{Supp} C)$. Nous associons à C les notations suivantes :

$$n = \dim C^{\#} \qquad \text{et} \qquad H = \max\left(h_F(C) + \frac{3}{2}\dim C, \log[K:\mathbb{Q}], 1\right).$$

Théorème 16.1. – *Pour toute variété abélienne C sur K, nous avons*

$$\Upsilon(\operatorname{Supp} C) \leq 241(en)^{2n} n^5 [K:\mathbb{Q}]H.$$

Nous écrivons pour alléger $\Upsilon = \Upsilon(\operatorname{Supp} C)$ et $C^\flat = (\operatorname{Supp} C)^\flat$ (notation 13.2). La majoration de Υ passera ci-dessous par une inégalité de la forme (en première approximation) $\Upsilon \leq a + b \log \Upsilon$ où $a, b > 0$ s'expriment en fonction de $n, [K:\mathbb{Q}], H$. Celle-ci entraîne clairement une majoration de Υ parce que nous savons *a priori* que Υ est fini (voir chapitre 13). En réalité, notre démonstration (comme celle initiale de Masser et Wüstholz ou celle de [**11**]) pourrait redonner cette finitude. Il s'agirait de garder trace des variétés impliquées afin de ne manipuler que des quantités finies. Nous préférons toutefois ne pas alourdir l'argument et utilisons donc le théorème de Faltings de finitude des classes d'isogénie sur un corps de nombres plutôt que de le réétablir.

Nous donnons deux estimations préliminaires avant d'entamer la démonstration du théorème 16.1. La première concerne les hauteurs de Faltings.

Pour $x \in S$, nous choisissons une variété abélienne A_x sur K, simple et MM, de support $\{x\}$ et dont la hauteur de Faltings est minimale dans sa classe d'isogénie. Une telle variété existe par le corollaire 1.3 de [**28**].

Lemme 16.2. – *Nous avons*

(1) $\sum_{x\in\operatorname{Supp} C} h_F(A_x) + \frac{3}{2}\dim A_x \leq h_F(C) + \frac{3}{2}\dim C$.
(2) $h_F(C^\flat) \leq (n/2)(2H - 3 + \log \Upsilon)$.

Démonstration. – (1) Soit D une variété abélienne MM isogène à C et telle que $h_F(D) \leq h_F(C)$ [**28**, corollaire 1.3]. Comme D est MM, elle est isomorphe à un produit $\prod_{i=1}^t D_i$ de variétés abéliennes simples D_i [**25**, théorème 1.6]. Notons x_i l'unique élément du support de D_i de sorte que $\operatorname{Supp} C = \operatorname{Supp} D = \{x_1, \ldots, x_t\}$ (les x_i ne sont pas nécessairement distincts). Nous avons donc $h_F(D_i) \geq h_F(A_{x_i})$ et $\dim D_i = \dim A_{x_i}$. En tenant compte de l'inégalité de Bost, nous obtenons ainsi

$$h_F(D) + \frac{3}{2}\dim D = \sum_{i=1}^t h_F(D_i) + \frac{3}{2}\dim D_i \geq \sum_{x\in\operatorname{Supp} C} h_F(A_x) + \frac{3}{2}\dim A_x$$

et cela donne la conclusion par le choix de D. (2) Posons $A = \prod_{x\in\operatorname{Supp} C} A_x$. L'isogénie canonique $\theta\colon C^\flat \to A^\#$ est de degré $\Delta^\flat \leq \Upsilon^n$ (chapitre 13) donc

$$h_F(C^\flat) \leq h_F(A^\#) + \frac{n}{2}\log \Upsilon.$$

Puisque A_x est simple et MM, $A_x^\#$ est similaire à $A_x^{k_x}$ (lemme 9.7 (5)) pour un entier $k_x \geq 1$ donc sa hauteur de Faltings vaut $k_x h_F(A_x)$. Comme $k_x \leq \dim A^\# = n$, nous déduisons de (1)

$$\begin{aligned} h_F(A^\#) + \frac{3}{2}n &= \sum_{x\in\operatorname{Supp} C} k_x \left(h_F(A_x) + \frac{3}{2}\dim A_x\right) \\ &\leq n\left(h_F(C) + \frac{3}{2}\dim C\right) \leq nH. \end{aligned}$$

□

Nous considérons à présent un réel ε avec $0 < \varepsilon < 1$ et nous lui associons la quantité

$$\mu = \frac{\exp(4{,}1n^3)}{\varepsilon^2}\Upsilon^{n/2}\left([K:\mathbb{Q}]\left(2H + 4n^2 + 0{,}92n^2\log\Upsilon\right)\right)^{2n-1}.$$

Elle permet d'énoncer la version suivante du théorème 14.2.

Proposition 16.3. – *Pour tout élément $x \in \operatorname{Supp} C$, il existe un faisceau inversible $\mathcal{N}_x$ ample et symétrique sur $A_x^\#$ avec $\|\mathrm{id}\|^2_{\mathcal{N}_x,\sigma} \leq 2\dim A_x^\# \cdot \mu$ et $h^0(A_x^\#, \mathcal{N}_x) \geq \operatorname{vol}(\operatorname{End} A_x^\#)(\mu(1-\varepsilon)^2)^{\dim A_x^\#}$.*

Démonstration. – Fixons $x \in \operatorname{Supp} C$ et posons $A = A_x$ ainsi que $g = \dim A$. Nous choisissons un faisceau ample et symétrique $\mathcal{L}$ sur A avec $h^0(A, \mathcal{L})$ minimal et nous lui appliquons le théorème 14.2. Il s'agit donc simplement de vérifier que l'expression $4g\rho(\Omega_A)^2/(\varepsilon^2\dim A^\#)$ est majorée par μ. Supposons tout d'abord $g \geq 2$. D'après le lemme 1 de [**2**], on a $\rho(\Omega_A) \leq \sqrt{g/2}\lambda_{2g}(\Omega_A)$ où $\lambda_{2g}(\Omega_A)$ est le plus grand minimum du réseau euclidien Ω_A muni de la forme de Riemann de $\mathcal{L}_\sigma$. Nous majorons alors ce minimum au moyen du second théorème de Minkowski, le covolume du réseau étant égal à $h^0(A,\mathcal{L})$, et nous obtenons

$$\lambda_{2g}(\Omega_A) \leq (2g)^g \left(\frac{h^0(A,\mathcal{L})^{1/g}}{\rho(A_\sigma,\mathcal{L}_\sigma)^2}\right)^{g-1/2} h^0(A,\mathcal{L})^{\frac{1}{2g}}.$$

Le quotient du milieu peut être majoré avec le théorème 15.2 appliqué à la variété abélienne simple $(A,\mathcal{L})$. En effet, dans ce cas, on a $y = h^0(A,\mathcal{L})^{-1/g}$ et $\delta_\sigma(A,\mathcal{L}) = \rho(A_\sigma,\mathcal{L}_\sigma)$ si bien que le théorème donne

$$\frac{h^0(A,\mathcal{L})^{1/g}}{\rho(A_\sigma,\mathcal{L}_\sigma)^2} \leq 10[K:\mathbb{Q}](eg)^{2g}\left(h_F(A) + 1{,}9g^2 + 0{,}92\log h^0(A,\mathcal{L})\right).$$

Par ailleurs la proposition 12.4 montre $h^0(A,\mathcal{L}) \leq (8g)^{g/4}\Upsilon^{\xi'_A\bullet\nu}$. Nous avons ici $\xi'_A \bullet \nu = \xi'_A(x)\nu(x) \leq n\xi'_A(x)$ (puisque $\operatorname{Supp} A = \{x\}$). Si A n'est pas CM′, $\xi'_A(x) = \xi_A(x)/2 \leq g/2$. Si A est CM′, $\xi'_A(x) = 1 \leq g/2$. Ainsi, dans tous les cas, nous avons $h^0(A,\mathcal{L}) \leq (8g)^{g/4}\Upsilon^{gn/2}$. En particulier, avec le point (1) du lemme précédent combiné à $1{,}9g^2 + 0{,}23g\log(8g) - 3g/2 \leq 2g^2$ et $g \leq n$, nous en déduisons

$$\frac{h^0(A,\mathcal{L})^{1/g}}{\rho(A_\sigma,\mathcal{L}_\sigma)^2} \leq 10[K:\mathbb{Q}](eg)^{2g}\left(H + 2n^2 + 0{,}46n^2\log\Upsilon\right).$$

En reportant ces estimations dans la borne pour $\rho(\Omega_A)$ et en utilisant $g \leq \dim A^\#$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{4g}{\varepsilon^2\dim A^\#}\rho(\Omega_A)^2 \leq{}& \frac{2^{11/4}g^{9/4}}{\varepsilon^2}\left(10g(eg)^{2g}\right)^{2g-1}\Upsilon^{n/2}\\ &\times\left([K:\mathbb{Q}]\left(2H + 4n^2 + 0{,}92n^2\log\Upsilon\right)\right)^{2g-1}.\end{aligned}$$

Il reste à constater que la fonction de g dans ce majorant est plus petite que $\exp(4{,}1g^3)$ (pour $g \geq 2$) et à utiliser $g \leq n$ pour observer que ce majorant est inférieur à μ. Lorsque $g = 1$, nous procédons de même mais $h^0(A,\mathcal{L}) = 1$ et la majoration du rayon de recouvrement s'améliore en $\rho(\Omega_A)^2 \leq \rho(A_\sigma,\mathcal{L}_\sigma)^{-2}/2$ (voir la démonstration du lemme 3.28 de **[5]**). Pour le lemme matriciel, nous utilisons $\rho(A_\sigma,\mathcal{L}_\sigma)^{-2} \leq [K:\mathbb{Q}](2h_F(A) + 6{,}1)$ (voir page 358 de **[10]**) et notre lemme 16.2 pour majorer $h_F(A) \leq H - 3/2$. Ainsi

$$\frac{4g}{\varepsilon^2\dim A^\#}\rho(\Omega_A)^2 \leq \frac{2[K:\mathbb{Q}]}{\varepsilon^2}(2H + 3{,}1) \leq \mu. \qquad \square$$

Nous entamons maintenant la démonstration du théorème 16.1.

Puisqu'il s'agit de majorer Υ, nous utilisons la proposition 13.4 avec la variété abélienne MM $A = \prod_{x\in\operatorname{Supp} C} A_x$. Ainsi, si θ désigne l'isogénie canonique $C^\flat \to A^\# = \prod_{x\in\operatorname{Supp} C} A_x^\#$, il existe un ordre total $\preceq$ sur S et une fonction

$p\colon S \to [0,+\infty[$, croissante pour $\preceq$, nulle en dehors de $\operatorname{Supp} C$ et telle que $p \bullet \nu \neq 0$ de sorte que

$$\Upsilon = \left(\mathcal{D}(\theta, \preceq, p) \prod_{x\in S} \operatorname{vol}(\operatorname{End} A_x^{\#})^{p(x)}\right)^{1/p\bullet\nu}$$

(nous ne faisons pas usage du fait que p peut même être choisie comme la fonction caractéristique d'une partie de $\operatorname{Supp} C$).

Pour tout $x \in \operatorname{Supp} C$, la proposition 16.3 fournit un faisceau $\mathcal{N}_x$ sur $A_x^{\#}$. Nous formons le faisceau produit $\mathcal{N}$ sur $A^{\#} = \prod_{x\in\operatorname{Supp} C} A_x^{\#}$ et nous allons appliquer le théorème des périodes (théorème 15.2) à la variété abélienne polarisée $(C^{\flat}, \theta^*\mathcal{N})$ de dimension n. Nous avons tout d'abord grâce au lemme 9.6

$$\begin{aligned}\delta_\sigma(C^{\flat}, \theta^*\mathcal{N})^2 \leq \|\mathrm{id}\|^2_{\theta^*\mathcal{N},\sigma} = \|\mathrm{id}\|^2_{\mathcal{N},\sigma} &= \sum_{x\in\operatorname{Supp} C} \|\mathrm{id}\|^2_{\mathcal{N}_x,\sigma}\\ &\leq 2 \sum_{x\in\operatorname{Supp} C} \dim A_x^{\#}\cdot\mu = 2n\mu.\end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\theta^*\mathcal{N}, \preceq, p) &= \mathcal{D}(\theta, \preceq, p)\mathcal{D}(\mathcal{N}, \preceq, p)\\ &= \mathcal{D}(\theta, \preceq, p) \prod_{x\in S} h^0(A_x^{\#}, \mathcal{N}_x)^{p(x)}\\ &\geq \mathcal{D}(\theta, \preceq, p)(\mu(1-\varepsilon)^2)^{p\bullet\nu} \prod_{x\in S} \operatorname{vol}(\operatorname{End} A_x^{\#})^{p(x)}.\end{aligned}$$

Comme la fonction p est croissante, nous pouvons utiliser le lemme 15.8 pour majorer $\mathcal{D}(\theta^*\mathcal{N}, \preceq, p)^{1/p\bullet\nu} \leq y^{-1}$ où y est associé au couple $(C^{\flat}, \theta^*\mathcal{N})$. Ainsi $y^{-1} \geq \mu(1-\varepsilon)^2\Upsilon$. Grâce à la croissance de son second membre, nous pouvons remplacer y par $(\mu(1-\varepsilon)^2\Upsilon)^{-1}$ dans le corollaire 15.7. En nous limitant à la place σ, il vient

$$\frac{\mu(1-\varepsilon)^2\Upsilon}{[K:\mathbb{Q}]\delta_\sigma(C^{\flat}, \theta^*\mathcal{N})^2} \leq 10(en)^{2n} \max\Big(0{,}92n, h_F(C^{\flat}) + 1{,}9n^2 + 0{,}92n\log(\mu(1-\varepsilon)^2\Upsilon)\Big).$$

Nous employons $\delta_\sigma(C^{\flat}, \theta^*\mathcal{N})^2 \leq 2n\mu$ et la majoration de $h_F(C^{\flat})$ donnée par le lemme 16.2. Nous en déduisons

$$\Upsilon \leq \frac{20n[K:\mathbb{Q}]}{(1-\varepsilon)^2}(en)^{2n} \max\Big(0{,}92n, \frac{n}{2}(2H - 3 + \log\Upsilon) + 1{,}9n^2 + 0{,}92n\log\big(\mu(1-\varepsilon)^2\Upsilon\big)\Big).$$

De plus comme $H \geq 1$, on a $(2H-3)/2 + 1{,}9n \geq 0{,}92$ et si nous supposons $\varepsilon \leq 1/2$ pour assurer $\mu(1-\varepsilon)^2 \geq 1$, le maximum est réalisé par le second terme. Réécrivons alors la majoration en factorisant le terme $n/2$:

$$\Upsilon \leq \frac{10(en)^{2n}n^2[K:\mathbb{Q}]}{(1-\varepsilon)^2}\left(2H - 3 + 2{,}84\log\Upsilon + 3{,}8n + 1{,}84\log(\mu(1-\varepsilon)^2)\right).$$

Il reste à injecter la définition de μ, à choisir une valeur pour ε et à nous débarrasser des termes logarithmiques en Υ. Pour cette partie calculatoire, nous supposons ici

$n \geq 2$ et nous traiterons le cas $n = 1$ différemment. Nous aurons recours plusieurs fois au lemme technique (mais élémentaire) suivant.

Lemme 16.4. – *Soient a, α, N des nombres réels positifs tels que $N\alpha > 1$ et P et Q deux polynômes de degré au plus a à coefficients réels positifs. Posons $f(z) = P(z) + Q(z)\log Nz$. Si $f(\alpha) \geq \exp(a + 1/\log N\alpha)$ alors la fonction $z \mapsto z^{-1}\log f(z)$ est décroissante sur $[\alpha, +\infty[$. C'est en particulier le cas si $a = 3$, $N\alpha \geq 2e$ et $f(\alpha) \geq 37$.*

Démonstration. Montrons que la dérivée $(z^2 f(z))^{-1}(zf'(z) - f(z)\log f(z))$ est négative sur l'intervalle indiqué. Or $zf'(z)$ vaut

$$zP'(z)+zQ'(z)\log Nz+Q(z) \leq aP(z)+aQ(z)\log Nz+\frac{f(z)}{\log Nz} \leq \left(a + \frac{1}{\log N\alpha}\right) f(z).$$

Puisque f est croissante, ceci est bien majoré par $f(z)\log f(z)$. La dernière assertion résulte de l'estimation numérique $\log 37 \geq 3 + 1/\log 2e$. $\square$

Nous fixons $\varepsilon = 1/100$ et nous raisonnons par l'absurde en supposant $\Upsilon \geq 241(en)^{2n}n^5[K:\mathbb{Q}]H$. Grâce à la valeur de μ (et à la majoration $1{,}84 \times 4{,}1 \leq 7{,}55$), l'inégalité précédant le lemme entraîne

$$\begin{aligned}1 \leq \frac{10(en)^{2n}n^2[K:\mathbb{Q}]}{(1-\varepsilon)^2\Upsilon}\Bigg(&2H - 3 + (2{,}84 + 0{,}92n)\log\Upsilon + 3{,}68\log\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\\ &+ 7{,}55n^3 + 3{,}8n + 1{,}84(2n-1)\log\big([K:\mathbb{Q}](2H + 4n^2 + 0{,}92n^2\log\Upsilon)\big)\Bigg).\end{aligned}$$

Isolons dans cette formule la quantité $M = 2H + 4n^2 + 0{,}92n^2\log\Upsilon$. Remarquons en vue d'appliquer le lemme que $M \geq 75$. Ainsi nous en déduisons que $(\log M)/\Upsilon$ est une fonction décroissante de Υ sur $[\alpha, +\infty[$ où $\alpha = 241(en)^{2n}n^5[K:\mathbb{Q}]H$ (ici $N = 1$). Comme c'est également le cas de $(\log\Upsilon)/\Upsilon$, il en est donc de même du membre de droite de l'inégalité ci-dessus. Par conséquent, dans le cadre de notre démonstration par l'absurde, nous pouvons supposer que nous avons égalité $\Upsilon = 241(en)^{2n}n^5[K:\mathbb{Q}]H$. Avec la majoration $2{,}84 + 0{,}92n \leq 2{,}34n$, nous obtenons

$$\begin{aligned}1 \leq \frac{10}{241(1-\varepsilon)^2n^3H}\Bigg(&2H - 3 + 2{,}34n((2n+5)\log n + 2n + \log(241[K:\mathbb{Q}]H))\\ &+7{,}55n^3 + 3{,}8n + 3{,}68\log\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + 1{,}84(2n-1)\log[K:\mathbb{Q}]M\Bigg),\end{aligned}$$

où maintenant M s'écrit

$$M = 2H + 4n^2 + 0{,}92n^2((2n+5)\log n + 2n + \log(241[K:\mathbb{Q}]H)).$$

Nous continuons sur le même principe : le membre de droite de la nouvelle inégalité est une fonction décroissante de n sur $[2, +\infty[$; ici, nous réemployons le lemme 16.4 ($\alpha = 2$, $N = e$) pour voir que $n^{-1}\log M$ décroît puisque M est bien de la forme $P(n) + Q(n)\log(en)$ avec deux polynômes de degré au plus 3 ; les autres termes se traitent en combinant la décroissance des fonctions $n \mapsto (2n-1)/n^2$, $n \mapsto (\log n)/n^2$ et $n \mapsto (1+\log n)/n$. Il suffit donc de traiter le cas $n=2$. Notre inégalité devient

$$1 \leq \frac{5}{964(1-\varepsilon)^2 H}\Bigg(2H + 4{,}68(9\log 2 + 4 + \log(241[K:\mathbb{Q}]H)) \\ + 65 + 3{,}68\log\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) + 5{,}52\log[K:\mathbb{Q}]M\Bigg).$$

Voyons à présent ceci comme une fonction du paramètre H (le degré $[K:\mathbb{Q}]$ étant fixé). La fonction $(\log 241H)/H$ est décroissante sur $[1,+\infty[$ et nous traitons $H \mapsto (\log M)/H$ par le lemme 16.4 avec $\alpha = \max(1, \log[K:\mathbb{Q}])$ et $N = 241$. Nous pouvons donc supposer $H = \max(1, \log[K:\mathbb{Q}])$. Considérons ensuite la variation de notre second membre avec $[K:\mathbb{Q}]$. Si $[K:\mathbb{Q}] \leq 2$, on a $H=1$ donc nous avons trivialement une fonction croissante de $[K:\mathbb{Q}]$. D'un autre côté, si $[K:\mathbb{Q}] \geq 3$, il vient $H = \log[K:\mathbb{Q}]$: nous constatons ici que les fonctions $(\log 241H)/H$ et $(\log M)/H$ sont décroissantes en $[K:\mathbb{Q}]$; dans le second cas, le lemme 16.4 s'applique avec $z = \log[K:\mathbb{Q}] \geq \alpha = \log 3$ et $N = 241$ car M s'écrit maintenant

$$M = 2z + 16 + 3{,}68(9\log 2 + 4 + z + \log 241z).$$

Cette étude en $[K:\mathbb{Q}]$ montre que nous pouvons supposer $[K:\mathbb{Q}] \in \{2{,}3\}$. Une simple vérification numérique conduit alors à une contradiction dans les deux cas. C'est le cas $[K:\mathbb{Q}] = n = 2$ qui détermine le choix de ε et la valeur 241 : si elle était remplacée par 240, aucun réel ε ne permettrait d'obtenir la contradiction. Nous avons donc terminé la démonstration du théorème 16.1 lorsque $n \geq 2$.

Enfin, si $n=1$, la démarche se trouve grandement simplifiée puisque nous pouvons employer un lemme matriciel au lieu du théorème des périodes. En effet, comme nous l'avons vu dans la démonstration du lemme 15.4, le second membre du théorème 15.2 peut être remplacé par $2{,}3y(h_F(A)+2{,}4)$ lorsque A est une courbe elliptique. En appliquant ceci à la courbe elliptique $C^\flat$ et avec les mêmes estimations $y^{-1} \geq \mu(1-\varepsilon)^2\Upsilon$ et $\delta_\sigma(C^\flat, \theta^*\mathcal{N})^2 \leq 2\mu$ (il se trouve qu'ici la valeur de μ est indifférente), nous aboutissons à

$$\Upsilon \leq 2{,}3[K:\mathbb{Q}](1-\varepsilon)^{-2}\left(2H + 1{,}8 + \log\Upsilon\right).$$

Nous pouvons faire tendre ε vers 0. Montrons $\Upsilon \leq 17[K:\mathbb{Q}]H$. Nous pouvons supposer $\Upsilon = 17[K:\mathbb{Q}]H$ par décroissance. Toujours par la même méthode, nous nous limitons successivement à $H = \max(1, \log[K:\mathbb{Q}])$ puis $2 \leq [K:\mathbb{Q}] \leq 3$. Il reste donc deux calculs directs qui donnent la contradiction souhaitée.

CHAPITRE 17

SYNTHÈSE ET COMPLÉMENTS

Le but de ce chapitre est de démontrer les théorèmes de l'introduction et de donner quelques énoncés supplémentaires.

Dans un premier temps, nous établissons (principe de Lefschetz) qu'il suffit de prouver les théorèmes 1.3 à 1.7 lorsque K est un sous-corps de $\mathbb{C}$, afin de pouvoir nous placer dans le cadre des chapitres 12 et 13. Nous utilisons donc les notations de l'introduction et disposons en particulier de la classe $\mathcal{C}$ de variétés abéliennes sur le corps K de caractéristique nulle. Notons $\widetilde{\mathcal{C}}$ un ensemble de représentants des classes d'isomorphie dans $\mathcal{C}$. Nous considérons l'ensemble de tous les objets suivants :

— les variétés abéliennes A de $\widetilde{\mathcal{C}}$,
— les morphismes $\varphi\colon A \to B$ pour $A, B \in \widetilde{\mathcal{C}}$,
— les faisceaux inversibles symétriques $\mathcal{N}$ sur $A \in \widetilde{\mathcal{C}}$.

D'une part, cet ensemble est dénombrable : $\widetilde{\mathcal{C}}$ l'est car il ne contient, à dimension bornée, qu'un nombre fini de classes d'isogénie et chacune d'entre elles est dénombrable puisque le nombre d'isogénies de source fixée et de degré borné est fini ; lorsque A et B sont fixés, les groupes $\mathrm{Hom}(A, B)$ et $\mathrm{Pic}_{\mathrm{sym}}(A)$ sont dénombrables comme $\mathbb{Z}$-modules de type fini. D'autre part, chaque élément de cet ensemble provient (comme tout objet algébrique) d'un sous-corps de type fini de K. En prenant le compositum de tous ces corps, nous pouvons donc fixer un sous-corps $K_0 \subset K$, de degré de transcendance dénombrable sur $\mathbb{Q}$, tel que chaque objet de notre ensemble provient d'un objet sur K_0. Ces propriétés étant conservées par une extension algébrique, nous supposons sans restriction que K_0 est algébriquement clos dans K. Comme K_0 est de degré de transcendance dénombrable, il est isomorphe à un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Il reste à vérifier que si les théorèmes 1.3 à 1.7 sont vrais pour K_0 alors ils le sont pour la classe $\mathcal{C}$ sur K. Pour cela remarquons que, si nous partons de la classe des variétés abéliennes A sur K_0 telles que $A_K \in \mathcal{C}$, alors les définitions du paragraphe 1.2 donnent les mêmes valeurs pour n, d, Υ que celles obtenues pour $\mathcal{C}$ et $e(A_K) = e(A)$. De même, comme les ensembles de morphismes sont conservés par extension à K, nous constatons que A est MM si et seulement si A_K l'est ou qu'une isogénie φ sur K_0 est nucléaire à gauche si et seulement si φ_K l'est. Ces faits permettent de voir immédiatement que les théorèmes 1.3, 1.4, 1.6 et 1.7 s'étendent. Pour les assertions faisant intervenir l'action de Galois (théorème 1.5), nous utilisons de plus que K_0 est algébriquement clos dans K. Ceci signifie que, pour des clôtures algébriques $\overline{K_0} \subset \overline{K}$ de K_0 et K, nous avons $K \cap \overline{K_0} = K_0$. Nous obtenons par conséquent un morphisme surjectif

$$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K\overline{K_0}/K) \simeq \mathrm{Gal}(\overline{K_0}/K_0)$$

à travers lequel $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ agit sur les objets provenant de K_0. Si A est une variété abélienne sur K_0 avec $A_K \in \mathcal{C}$, c'est le cas des points de torsion $A(\overline{K_0})_{\mathrm{tors}} = A_K(\overline{K})_{\mathrm{tors}}$ de sorte que pour tout entier $m \geq 1$ nous avons

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)}(A_K[m], B_K[m]) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{K_0}/K_0)}(A[m], B[m])$$

où B est une seconde variété abélienne sur K_0 avec $B_K \in \mathcal{C}$. De la même façon, l'action galoisienne sur les deux modules de Tate $T_\ell(A) = T_\ell(A_K)$ est la même donc le groupe G_ℓ de l'assertion (2) du théorème 1.5 peut être défini indifféremment à l'aide de A ou de A_K. Enfin les deux groupes de Galois agissent également de façon compatible sur $\mathrm{Br}(A_{\overline{K}}) = \mathrm{Br}(A_{\overline{K_0}})$ de sorte que $\mathrm{Br}(A_{\overline{K}})^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)} = \mathrm{Br}(A_{\overline{K_0}})^{\mathrm{Gal}(\overline{K_0}/K_0)}$. La conjonction de ces faits montre bien que le théorème 1.5 s'étend lui aussi à K et donc que nous pouvons remplacer K par K_0 dans tous les énoncés de l'introduction sans perte de généralité.

Nous supposons donc dorénavant que K est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Notre seconde tâche consiste à faire le lien entre les notations 1.1 et 1.2 d'une part et les définitions 12.1 et 12.2 d'autre part. Pour cela, nous notons T le support de la variété abélienne C utilisée dans l'introduction. De cette façon, la classe $\mathcal{C}$ est formée des variétés abéliennes de support contenu dans T tandis que $\mathcal{C}'$ correspond aux variétés de support égal à T. De son côté, $\mathcal{C}_0$ est la classe d'isogénie contenant toutes les variétés abéliennes $A^{\#}$ pour $A \in \mathcal{C}'$. On remarque que d'après la proposition 13.1 la finitude de $\mathcal{C}_0$ est équivalente à celle des quantités $\Upsilon(T)$ et $d(T)$ (car la démonstration de (5) $\Longrightarrow$ (4) donne en fait (5) $\Longrightarrow$ $\mathcal{C}_0$ finie $\Longrightarrow$ (4)). Montrons maintenant $d = d(T)$. Nous avons

$$d = \sup_{A \in \mathcal{C}_{0,\#}} \mathrm{disc}(\mathrm{End}\, A) \qquad \text{et} \qquad d(T) = \sup_{A \in \mathcal{C}'} \mathrm{disc}(\mathrm{End}\, A^{\#})$$

(voir la notation 1.1 et la formule qui suit le lemme 13.3). Pour toute variété abélienne A, le réseau des périodes $\Omega_{A^{\#}}$ est un module libre sur $\mathrm{End}\, A^{\#}$ (théorème 9.5 et assertion (2) du lemme 9.7) donc $T_\ell(A^{\#}) \simeq \Omega_{A^{\#}} \otimes \mathbb{Z}_\ell$ est libre sur $\mathrm{End}\, A^{\#} \otimes \mathbb{Z}_\ell$ pour tout nombre premier ℓ. Dès lors si $A \in \mathcal{C}'$ alors $A^{\#} \in \mathcal{C}_{0,\#}$ et ceci donne $d(T) \leq d$. Pour établir l'autre inégalité, considérons $A \in \mathcal{C}_{0,\#}$. Ici $T_\ell(A)$ est un $\mathrm{End}\, A \otimes \mathbb{Z}_\ell$-module libre de rang 1 (pour tout ℓ) donc la définition 8.1 donne

$$\Lambda_\ell(A) \simeq \mathrm{End}_{\mathrm{End}\, A \otimes \mathbb{Z}_\ell} \mathrm{End}\, A \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq (\mathrm{End}\, A \otimes \mathbb{Z}_\ell)^{\mathrm{op}}.$$

Par suite

$$\mathrm{disc}(\mathrm{End}\, A) = \prod_\ell \mathrm{disc}(\mathrm{End}\, A \otimes \mathbb{Z}_\ell) = \prod_\ell \mathrm{disc}(\Lambda_\ell(A)) = \mathrm{disc}\, \Lambda(A).$$

Ceci se réécrit en $\mathrm{disc}(\mathrm{End}\, A) = \mathrm{disc}(\mathrm{End}\, A^{\#})$ et fournit directement $d \leq d(T)$.

Nous avons donc bien $d = d(T)$ et l'égalité $\Upsilon = \Upsilon(T)$ s'en déduit en comparant la notation 1.2 (où $d_{T'} = d(T')$ pour $T' \subset T$) avec la proposition 13.4 et la remarque qui la suit (où $\dim(T')^\flat = n_{T'}$ puisque $(T')^\flat \in \mathcal{C}_0^{(T')}$). Notons au passage que ces égalités montrent que $d(T)$ et $\Upsilon(T)$ ne dépendent pas de la façon dont K est plongé dans $\mathbb{C}$ bien que celle-ci intervienne dans leurs définitions 12.1 et 12.2. Avant de démontrer les théorèmes, identifions une dernière notation du paragraphe 1.2 : l'entier $e(A)$. Si $x \in \operatorname{Supp} A$, pour toute variété abélienne simple C_x de support $\{x\}$, la composante isotypique A_x est isogène à $C_x^{n_x}$ où $n_x = \dim A_x / \dim C_x$. Ainsi la définition se lit

$$e(A) = \sum_{x \in \operatorname{Supp} A} \frac{2n_x (\dim C_x)^2}{(\operatorname{rg} \operatorname{End} C_x \cdot \operatorname{rg} Z(\operatorname{End} C_x))^{1/2}}.$$

Comme $\operatorname{End} A_x \otimes \mathbb{Q} \simeq M_{n_x}(\operatorname{End} C_x \otimes \mathbb{Q})$, nous avons $\operatorname{rg} \operatorname{End} A_x = n_x^2 \operatorname{rg} \operatorname{End} C_x$ ainsi que $\operatorname{rg} Z(\operatorname{End} A_x) = \operatorname{rg} Z(\operatorname{End} C_x)$. Par suite

$$e(A) = \sum_{x \in \operatorname{Supp} A} \left(\frac{\operatorname{rg} \operatorname{End} A_x}{\operatorname{rg} Z(\operatorname{End} A_x)} \right)^{1/2} \frac{2(\dim A_x)^2}{\operatorname{rg} \operatorname{End} A_x} = \xi_A \bullet \nu.$$

Munis de ces trois égalités $d = d(T)$, $\Upsilon = \Upsilon(T)$ et $e(A) = \xi_A \bullet \nu$, nous déduisons très facilement les résultats du paragraphe 1.3 de ceux des chapitres 12 et 13. En effet, pour le théorème 1.3,

(1) découle de l'assertion (2) de la proposition 12.3,
(2) de la proposition 12.5 avec $(2\xi_A - \xi'_A) \bullet \nu \leq (3/2)\xi_A \bullet \nu = 3e(A)/2$ car $\xi'_A \geq \xi_A/2$,
(3) de la dernière phrase du chapitre 12.

Dans le théorème 1.4,

(1) résulte de l'assertion (1) de la proposition 12.3,
(2) de la proposition 12.4 avec $\xi'_A \leq \xi_A$,
(3) de l'assertion (1) de la proposition 12.6.

Pour obtenir le théorème 1.5,

(1) nous combinons la proposition 13.5 et la divisibilité $\delta^\flat \mid d(T)^{1/2}$;
(2) lorsque $A \in \mathcal{C}'$ (c'est-à-dire $\operatorname{Supp} A = T$) la proposition 13.7 donne $\mathbb{Z}_\ell[G_\ell] = \Lambda^\flat(T) \otimes \mathbb{Z}_\ell$ donc

$$\prod_\ell \operatorname{disc}(\mathbb{Z}_\ell[G_\ell]) = \operatorname{disc} \Lambda^\flat(T) = d(T)$$

d'où l'égalité ; si $A \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}'$ le produit vaut $d(\operatorname{Supp} A)$ qui divise $d(T)$;
(3) nous combinons la proposition 13.9 et la majoration

$$g(2g-1) - \operatorname{rg} \operatorname{NS}(A) \leq 2g^2 - 2.$$

Nous en venons maintenant aux résultats de divisibilité du paragraphe 1.4. Pour l'exposant, nous utilisons les estimations suivantes.

LEMME 17.1. – *Soit* $\varphi\colon B \to A$ *une isogénie. Si* φ *engendre* $\operatorname{Hom}(B, \mathcal{D}(A))$ *alors* $\exp \varphi \mid \delta^\flat$. *Si* φ *est nucléaire à gauche alors* $\exp \varphi \mid (\delta^\flat)^2$.

Démonstration. Choisissons (lemme 6.6) une variété abélienne $C \in \mathcal{D}(A)$ isogène à A et MM. Nous avons

$$\Lambda^\flat(\operatorname{Supp} A) \subset \Lambda(A \times B) \subset \Lambda(A) \subset \Lambda(C)$$

(la dernière inclusion provenant du théorème 9.8) donc l'exposant du groupe quotient $\Lambda(A)/\Lambda(A \times B)$ divise celui de $\Lambda(C)/\Lambda^\flat(\operatorname{Supp} A)$ qui, par définition, divise $\delta^\flat$. Si φ engendre $\operatorname{Hom}(B, \mathcal{D}(A))$, le théorème 9.12 montre que $\exp \varphi$ divise l'exposant de $\operatorname{Ker}((A \times B)^\# \to A^\#) \simeq \Lambda(A)/\Lambda(A \times B)$ d'où la première assertion. Pour la seconde, considérons des générateurs $\psi_1 \colon B \to D_1$ de $\operatorname{Hom}(B, \mathcal{D}(C))$ et $\widehat{\psi_2} \colon \widehat{A} \to \widehat{D_2}$ de $\operatorname{Hom}(\widehat{A}, \mathcal{D}(\widehat{C}))$. Comme D_1 et D_2 sont des descendantes isogènes de C, elles sont similaires (lemme 6.7) donc il existe $n \geq 1$ avec $D_1^n \simeq D_2^n$ ce qui permet de considérer la composée $\psi_2^{\times n} \circ \psi_1^{\times n} \colon B^n \to A^n$. D'après le lemme 5.9, $\varphi^{\times n}$ est nucléaire à gauche donc il existe $\chi \colon A^n \to A^n$ telle que $\psi_2^{\times n} \circ \psi_1^{\times n} = \chi \circ \varphi^{\times n}$. Alors

$$\exp \varphi = \exp \varphi^{\times n} \mid \exp(\chi \circ \varphi^{\times n}) \mid \exp(\psi_2^{\times n}) \exp(\psi_1^{\times n}) = \exp(\psi_1) \exp(\widehat{\psi_2})$$

et il reste à appliquer la première assertion aux générateurs ψ_1 et $\widehat{\psi_2}$. □

Établissons le théorème 1.6. La famille des noyaux des isogénies nucléaires à gauche entre éléments de $\mathcal{C}_1$ est primaire d'après le théorème 7.7 (avec $\mathcal{B} = \mathcal{C}_1$). Par le lemme 7.4 (avec $u = \deg$ ou $u = \exp$) il en va de même des familles de leurs degrés ou de leurs exposants. Comme ces deux familles sont finies ($\mathcal{C}_1$ est finie par l'assertion (5) de la proposition 13.1), nous pouvons leur appliquer le lemme 7.3 qui fournit l'existence de φ_1 et φ_2. La divisibilité $\exp \varphi_2 \mid d$ découle du lemme précédent avec $(\delta^\flat)^2 \mid d(T)$.

Pour obtenir l'assertion (1) du théorème 1.7, nous suivons le même principe en appliquant cette fois le théorème 7.7 à la famille des noyaux $\operatorname{Ker}(B, \mathcal{D}(A))$ où B parcourt les variétés abéliennes isogènes à A. Nous pouvons identifier cette famille à celle des noyaux des isogénies $\varphi_B \colon B \to A$ où, pour chaque B isogène à A, nous avons choisi une isogénie φ_B de degré minimal parmi les isogénies $B \to A$: en effet, par principalité, φ_B est nucléaire à gauche (lemme 5.5) donc engendre $\operatorname{Hom}(B, \mathcal{D}_g(A))$ (lemme 6.5) ici égal à $\operatorname{Hom}(B, \mathcal{D}(A))$ car A est MM (lemme 6.7). Ainsi la famille des $\deg \varphi_B$ et celle des $\exp \varphi_B$ sont primaires d'où le résultat voulu avec $\varphi_1 = \varphi_{B_1}$, $\varphi_2 = \varphi_{B_2}$ et $\psi = \varphi_B$. L'inégalité $\deg \varphi_1 \leq \Upsilon^{e(A)}$ découle de l'assertion (1) du théorème 1.4, la divisibilité $\exp \varphi_2 \mid d^{1/2}$ du lemme 17.1.

Montrons l'assertion (2) du théorème 1.7. Par le théorème 1.1 de **[25]**, il existe une variété abélienne A_0 isogène à A telle que $\operatorname{End} A_0 \simeq \mathcal{O}$. Nous appliquons l'assertion (1) à A_0 et à sa duale $\widehat{A_0}$ (dont l'anneau des endomorphismes $\operatorname{End} \widehat{A_0} \simeq \mathcal{O}^{\mathrm{op}}$ est aussi principal). Nous obtenons en particulier deux isogénies $\varphi_1 \colon B_1 \to A_0$ et $\varphi_2 \colon B_2 \to \widehat{A_0}$ qui maximisent respectivement le degré des isogénies vers A_0 et $\widehat{A_0}$. Notons $\chi_1 \colon B \to A_0$ et $\chi_2 \colon \widehat{B'} \to \widehat{A_0}$ deux isogénies de degré minimal. Par ce qui précède, $\deg \chi_1 \mid \deg \varphi_1 \leq \Upsilon^{e(A)}$, $\exp \chi_1 \mid d^{1/2}$, $\deg \chi_2 \mid \deg \varphi_2 \leq \Upsilon^{e(A)}$ et $\exp \chi_2 \mid d^{1/2}$. Nous obtenons donc le résultat souhaité avec $\psi = \widehat{\chi_2} \circ \chi_1$ et $c = (\deg \varphi_1)(\deg \varphi_2)$.

Pour conclure la démonstration des théorèmes de l'introduction, il reste à établir les énoncés du paragraphe 1.5 sur les corps de nombres. S'il n'y a rien à faire pour le théorème 1.8 identique au théorème 16.1, des calculs supplémentaires sont nécessaires pour aboutir au théorème 1.9. Tout d'abord, nous utilisons les résultats de **[27]** sous la forme suivante.

LEMME 17.2. – *Soient A et B deux variétés abéliennes sur K de dimension g et L une extension de K telle que A_L et B_L sont isogènes. Il existe un corps L' avec $K \subset L' \subset L$ tel que* $\mathrm{End}(A\times B)_{L'} = \mathrm{End}(A\times B)_L$ *et*

(1) $[L' : K] \leq (6g)^{2g}$ *dans tous les cas,*
(2) $[L' : K] \leq 12$ *si* $g = 1$ *et*
(3) $[L' : K] \leq 2$ *si* $\mathrm{End}\, A_{\overline{K}} = \mathbb{Z}$.

Démonstration. Notons K' la plus petite extension de K telle que $\mathrm{Hom}(A_{K'}, B_{K'}) = \mathrm{Hom}(A_{\overline{K}}, B_{\overline{K}})$. C'est une extension galoisienne de K, notée $K_{A,B}$ dans **[27]** dont le théorème 1.2 montre $[K' : K] \leq \mathcal{F}(g, g)$ avec les notations de cet article. On a $\mathcal{F}(1, 1) = 12$ et l'on vérifie facilement $\mathcal{F}(g, g) \leq (6g)^{2g}$ pour tout g. Lorsque $\mathrm{End}\, A_{\overline{K}} = \mathbb{Z}$ (et donc $\mathrm{End}\, B_{\overline{K}} = \mathbb{Z}$) la proposition 1.3 de **[27]** fournit $[K' : K] \leq 2$. Posons alors $L' = K' \cap L$. Il nous reste à vérifier $\mathrm{End}(A\times B)_{L'} = \mathrm{End}(A\times B)_L$. Par construction, nous avons $\mathrm{Hom}(A_{L'}, B_{L'}) = \mathrm{Hom}(A_L, B_L)$. En particulier, il existe une isogénie $A_L \to B_L$ qui provient donc d'un morphisme $\psi\colon A_{L'} \to B_{L'}$ qui est automatiquement une isogénie. Notons $N = \deg\psi$ et $\chi\colon B_{L'} \to A_{L'}$ une isogénie telle que $\chi\circ\psi = [N]$. Si $\varphi \in \mathrm{End}\, A_L$, le morphisme $\psi_L \circ \varphi\colon A_L \to B_L$ provient d'un morphisme $A_{L'} \to B_{L'}$ donc de même $N\varphi = \chi_L \circ \psi_L \circ \varphi$ provient de $\varphi' \in \mathrm{End}\, A_{L'}$. Comme $\mathrm{Ker}[N] \subset \mathrm{Ker}\,\varphi'$ il existe $\varphi'' \in \mathrm{End} A_{L'}$ avec $\varphi' = N\varphi''$ et nous obtenons $\varphi = (\varphi'')_L$. Ainsi $\mathrm{End}\, A_{L'} = \mathrm{End}\, A_L$. On montre exactement de la même façon $\mathrm{End}\, B_{L'} = \mathrm{End}\, B_L$ et $\mathrm{Hom}(B_{L'}, A_{L'}) = \mathrm{Hom}(B_L, A_L)$ d'où la conclusion. □

Venons-en à la démonstration du théorème 1.9 dont les notations sont maintenant en vigueur. Pour les uniformiser, nous posons $B = A$ dans les assertions (2) à (6). De plus, comme L n'intervient pas dans (2), (4), (5) et (6), nous pouvons le fixer arbitrairement dans ces cas-là : nous prenons $L = K$ pour (2), (4) et (5) mais $L = \overline{K}$ pour (6). Notons ensuite L' l'extension donnée par le lemme pour ces choix de A, B, K, L. Par construction, il suffit de démontrer (1) et (3) en remplaçant L par L'. Nous travaillons donc sur le corps de nombres L'. Posons $T = \mathrm{Supp}\, A_{L'}$.

LEMME 17.3. – *Si $g \geq 2$, nous avons $g!(8g)^{g/4}\Upsilon(T)^{2g^2} \leq \Xi(A)$.*

Démonstration. Nous employons le théorème 16.1 avec $C = A_{L'}$. Nous majorons $n \leq 2g^2$ et $[L' : \mathbb{Q}] \leq (6g)^{2g}[K : \mathbb{Q}]$.

En particulier $H \leq \max(1 + 3g/2, 1 + 2g\log 6g)\max(1, h_F(A), \log[K : \mathbb{Q}])$. Le premier maximum vaut $1 + 2g\log 6g$ donc la formule de l'énoncé découle de l'inégalité

$$g!^{1/2g^2}(8g)^{1/8g}241(2eg^2)^{4g^2}(2g^2)^5(6g)^{2g}(1 + 2g\log 6g) \leq (6g)^{8g^2}$$

qui s'obtient de manière élémentaire. □

Munis de cette estimation, nous déduisons facilement le théorème 1.9 lorsque $g \geq 2$. En effet, dans son énoncé,

(1) découle de l'assertion (1) du théorème 1.3 (respectivement du théorème 1.4 si A_L donc $A_{L'}$ est MM) avec $e(A_{L'}) \leq 2g^2$ et $\Upsilon(T)^{2g^2} \leq \Xi(A)$.
(2) découle de l'assertion (2) du théorème 1.3 (respectivement du théorème 1.4 si A est MM) avec $g!(8g)^{g/4}\Upsilon(T)^{2g^2} \leq \Xi(A)$.
(3) s'obtient dans le cas MM avec l'assertion (3) du théorème 1.4 et $\operatorname{rg}\operatorname{End} A_L \leq 2g^2$ tandis que dans le cas général nous utilisons l'assertion (3) de la proposition 12.6 combinée à $2(\nu \bullet \xi_{A_L}) \max(d_{A_L}/\nu) \leq g^3$ (lemme 12.7).
(4) et (5) proviennent des assertions (1) et (2) du théorème 1.5 avec $d \leq \Upsilon(T)^{4g^2} \leq \Xi(A)^2$.
(6) se déduit de la proposition 13.9 avec $2^{1/3}d^{1/2} \leq 2^{1/3}\Upsilon(T)^{2g^2} \leq \Xi(A)$ car $\operatorname{Br}(A_{\overline{K}})^{\operatorname{Gal}(\overline{K}/K)}$ est un sous-groupe de $\operatorname{Br}(A_{\overline{L'}})^{\operatorname{Gal}(\overline{L'}/L')}$ (avec $\overline{K} = \overline{L'}$) et, par choix de L', nous avons $\operatorname{End} A_{\overline{L'}} = \operatorname{End} A_{L'}$ puisque $L = \overline{K}$ dans ce cas-là.

Bien entendu, nous pourrions procéder exactement de même dans le cas $g = 1$ avec le théorème 16.1. Simplement, nous n'obtiendrions pas la constante numérique 7 dans $\Xi(A)$. Nous allons donc distinguer plusieurs sous-cas et utiliser des résultats de **[10]** et **[11]** pour aboutir à une constante plus petite.

Nous supposons donc $g = 1$ et remarquons d'abord que les assertions (2) et (6) du théorème 1.9 sont immédiates puisque d'une part la courbe elliptique A admet une polarisation principale et d'autre part $\operatorname{Br}(A_{\overline{K}}) = \{0\}$ (on a $r = 0$ dans la démonstration de la proposition 13.9).

Examinons en premier lieu le cas où $A_{L'}$ est CM$'$. Ici nous procédons comme lorsque $g \geq 2$: le théorème 16.1 avec $C = A_{L'}$ où $n = 1$ et la majoration $[L' : \mathbb{Q}] \leq 12[K : \mathbb{Q}]$ conduisent à

$$\begin{aligned}\Upsilon(T) &\leq 241 \times 12 \times e^2(1 + \log 12)[K : \mathbb{Q}] \max(h_F(A), \log[K : \mathbb{Q}], 1)\\ &\leq 74470[K : \mathbb{Q}] \max(h_F(A), \log[K : \mathbb{Q}], 1) \leq \Xi(A)^{1/2}.\end{aligned}$$

Nous en déduisons immédiatement les assertions (1), (4) et (5). Dans (3), nous verrons dans le chapitre suivant (après le lemme 18.1) que $A_{L'}$ et $A^{\#}_{L'}$ sont similaires. Nous avons alors $\operatorname{vol}\operatorname{End} A_{L'} = \operatorname{vol}\operatorname{End} A^{\#}_{L'}$ (corollaire 10.4) et $\operatorname{vol}\operatorname{End} A^{\#}_{L'} \leq \Upsilon(T)$ par définition de $\Upsilon(T)$. Nous concluons donc à nouveau par $\Upsilon(T) \leq \Xi(A)^{1/2}$.

Nous supposons dorénavant $\operatorname{End} A_{L'} = \mathbb{Z}$. Ceci rend l'assertion (3) claire puisque $\operatorname{vol}\operatorname{End} A_{L'} = \sqrt{2}$ (on rappelle que la norme de Rosati de l'identité de $A_{L'}$ est $\sqrt{2}$ car sa trace vaut $2g = 2$). Il nous reste à établir (1), (4) et (5).

Nous montrons (1) à l'aide des théorèmes d'isogénie de **[10]** et **[11]**. Le théorème 1.4 de **[10]** fournit une isogénie $A_{\overline{K}} \to B_{\overline{K}}$ de degré au plus

$$10^{13}[K : \mathbb{Q}]^2 \max(h_F(A), \log[K : \mathbb{Q}], 1)^2 \leq \Xi(A).$$

Si celle-ci provient d'une isogénie $A_{L'} \to B_{L'}$ nous avons terminé sinon $A_{\overline{K}}$ est nécessairement CM et la proposition 10.2 de **[11]** donne la conclusion (avec

$4 \times 2{,}85 \times 10^5 \leq 10^{13} \leq 7^{16}$). Dans les deux cas bien entendu une isogénie $A_{L'} \to B_{L'}$ induit par dualité une isogénie de même degré.

Enfin, pour obtenir les assertions (4) et (5), il suffit, comme plus haut, de vérifier $\Upsilon(T) \leq \Xi(A)^{1/2}$. Cela découle de l'énoncé légèrement plus précis ($2{,}1 \times 10^6 \leq 7^8$) suivant car nous avons $L = K$ dans (4) et (5).

Lemme 17.4. – *Si A est une courbe elliptique sur un corps de nombres K, alors*

$$\Upsilon(\operatorname{Supp} A) \leq 2{,}1 \times 10^6 [K:\mathbb{Q}] \max(h_F(A), \log[K:\mathbb{Q}], 1).$$

Démonstration. Nous suivons la même approche que pour le théorème 16.1 mais en raffinant quelques ingrédients. Comme nous avons déjà établi ci-dessus une meilleure borne lorsque A est CM′, nous pouvons supposer $\operatorname{End} A = \mathbb{Z}$. Ceci entraîne $A^\# \simeq A^2$ (voir si nécessaire le début du chapitre suivant). Nous notons pour alléger $\Upsilon = \Upsilon(\operatorname{Supp} A)$ et $H_1 = \max(h_F(A), \log[K:\mathbb{Q}], 1)$. Si $\theta\colon A^\flat \to A^\#$ est l'isogénie canonique, nous avons $\Upsilon = 2(\deg\theta)^{1/2}$ car $\operatorname{vol} \operatorname{End} A^\# = 4$. Par suite, $h_F(A^\flat) \leq h_F(A^\#) + (1/2)\log\deg\theta \leq 2H_1 + \log(\Upsilon/2)$. La principale différence d'avec le chapitre 16 se situe dans l'usage de l'assertion suivante qui se substitue à la proposition 16.3 :

($*$) il existe un faisceau inversible ample et symétrique $\mathcal{N}$ sur $A^\#$ tel que l'entier $h = h^0(A^\#, \mathcal{N})$ vérifie $h \leq 62[K:\mathbb{Q}]^2 H_1^2$ et $\|\mathrm{id}\|_{\mathcal{N}}^2 \leq 2h/\sqrt{h-1/4}$.

Nous établissons ceci en suivant la construction du paragraphe 7.3 de **[10]**. Soit donc (ω_1, ω_2) une base minimale du réseau Ω_A muni de la forme de Riemann associée à la polarisation principale $\mathcal{L}$ de A. Nous avons $\omega_2 = \tau\omega_1$ où $|\tau| \geq 1$ et $|\operatorname{Re}\tau| \leq 1/2$ tandis que $\|\omega_1\|_{\mathcal{L}}^2 = \rho(A,\mathcal{L})^2 = (\operatorname{Im}\tau)^{-1}$. Notons f_i $(1 \leq i \leq 2)$ l'image réciproque de ω_i par l'isomorphisme $\operatorname{Hom}(A^\#, A) \to \Omega_A$ du lemme 9.6, $h = \lfloor |\tau|^2 \rfloor$ et $\mathcal{N} = (f_1^*\mathcal{L})^{\otimes h} \otimes f_2^*\mathcal{L}$. Nous avons bien $h = h^0(A^\#, \mathcal{N})$ tandis que

$$\|\mathrm{id}\|_{\mathcal{N}}^2 = h\|\omega_1\|_{\mathcal{L}}^2 + \|\omega_2\|_{\mathcal{L}}^2 = (h + |\tau|^2)\rho(A,\mathcal{L})^2 \leq 2h/\sqrt{h-1/4}$$

résulte du calcul fait en haut de la page 387 de **[10]**. D'un autre côté, la proposition 15.3 (lemme matriciel) fournit $[K:\mathbb{Q}]^{-1}\rho(A,\mathcal{L})^{-2} \leq 2{,}3h_F(A) + 5{,}5 \leq 7{,}8H_1$ d'où $h \leq |\tau|^2 \leq (\operatorname{Im}\tau)^2 + 1/4 \leq ((7{,}8)^2 + 1/4)[K:\mathbb{Q}]^2 H_1^2$. L'égalité $(7{,}8)^2 + 1/4 = 61{,}09$ conclut la démonstration de ($*$).

Nous appliquons à présent le théorème des périodes 15.2 à la surface abélienne $(A^\flat, \theta^*\mathcal{N})$. Nous avons (en omettant dans les normes la mention du plongement privilégié $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$)

$$\delta_\sigma(A^\flat, \theta^*\mathcal{N})^2 \leq \|\mathrm{id}\|_{\theta^*\mathcal{N}}^2 = \|\mathrm{id}\|_{\mathcal{N}}^2 \leq 2h/\sqrt{h-1/4}$$

et, pour un ordre arbitraire $\preceq$,

$$\mathcal{D}(\theta^*\mathcal{N}, \preceq, 1_A) = h^0(A^\flat, \theta^*\mathcal{N}) = \deg\theta \cdot h^0(A^\#, \mathcal{N}) = \Upsilon^2 h/4.$$

Nous pouvons ainsi, grâce au lemme 15.8, remplacer y par $(\Upsilon\sqrt{h}/2)^{-1}$ dans le corollaire 15.7 et nous obtenons

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\frac{\sqrt{h-1/4}}{2h} \leq 10(2e)^4 \left(\frac{2}{\Upsilon\sqrt{h}}\right) \max(h_F(A^\flat) + 7{,}6 + 1{,}84\log(\Upsilon\sqrt{h}/2), 1{,}84)$$

puis (avec $h_F(A^\flat) \leq 2H_1 + \log(\Upsilon/2)$)

$$\Upsilon \leq \frac{40(2e)^4}{\sqrt{1-1/4h}}[K:\mathbb{Q}](2H_1 + 2{,}84\log(\Upsilon/2) + 7{,}6 + 0{,}92\log h).$$

Comme dans le chapitre 16, il suffit de montrer que ceci conduit à une contradiction si $\Upsilon = 2{,}1\times 10^6[K:\mathbb{Q}]H_1$. En majorant $\log[K:\mathbb{Q}] \leq H_1$, il vient

$$2{,}1\times 10^6 \leq \frac{40(2e)^4}{H_1\sqrt{1-1/4h}}(4{,}84H_1 + 2{,}84\log H_1 + 47 + 0{,}92\log h).$$

Une étude de fonction en h montre que sur l'intervalle $[1{,}62H_1^2e^{2H_1}]$ le second membre atteint son maximum en l'une des extrémités. Il suffit donc d'aboutir à une contradiction en substituant $h=1$ ou $h = 62H_1^2e^{2H_1}$. Dans les deux cas, le membre de droite obtenu est une fonction décroissante de H_1 donc nous pouvons prendre $H_1 = 1$ et un calcul direct conclut. □

La démonstration du théorème 1.9 est ainsi terminée. Comme nous l'avons dit dans l'introduction, les bornes qu'il fournit peuvent très souvent être améliorées pour des variétés abéliennes particulières. En voici un nouvel exemple, basé sur le lemme précédent.

Corollaire 17.5. – *Soient E une courbe elliptique sur un corps de nombres K, $g \geq 1$ un entier et A une variété abélienne isogène à E^g. Alors il existe deux isogénies $A \to E^g$ et $E^g \to A$ toutes deux de degré majoré par*

$$(2{,}1\times 10^6[K:\mathbb{Q}]\max(h_F(E), \log[K:\mathbb{Q}], 1))^{2g}.$$

Démonstration. Nous combinons la majoration de Υ du lemme avec l'assertion (1) du théorème 1.3 ou 1.4 puisque, si $\operatorname{End} E = \mathbb{Z}$, E^g est MM et $e(E^g) = 2g$ tandis que, si $\operatorname{End} E$ est de rang 2, alors $e(E^g) = g$. □

Ce résultat est celui évoqué dans la remarque 2.3 de **[17]** qui se trouve ainsi justifiée (et légèrement améliorée puisque $(2{,}1\times 10^6)^2 < 10^{13}$). La dépendance exponentielle en g est optimale car si $\varphi\colon E \to E'$ est une isogénie nucléaire entre courbes elliptiques alors $\varphi^{\times g}\colon E^g \to (E')^g$ est également nucléaire (lemme 5.9) donc de degré minimal $(\deg\varphi)^g$ (voir également l'observation qui suit le corollaire 5.10).

Concluons ce chapitre par une variante des théorèmes d'isogénie qui tire parti de l'information sur l'exposant.

Proposition 17.6. – *Soient A, B et C trois variétés abéliennes sur un corps de nombres K telles que A et B sont toutes deux isogènes à une même sous-variété abélienne d'une puissance de C. Alors il existe deux isogénies $\varphi\colon A \to B$ et $\psi\colon B \to A$ telles que $\psi\circ\varphi = [N]$ où N est un entier naturel non nul plus petit que $\Xi(C)^2$.*

Démonstration. Par l'assertion (1) du théorème 1.3, il existe une isogénie $\varphi\colon A \to B$ d'exposant $N \leq d$. L'inclusion $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}[N]$ donne l'existence de $\psi\colon B \to A$ telle que $\psi \circ \varphi = [N]$. Pour majorer N, nous utilisons $d \leq \Upsilon^{2n}$ où $n = \dim C^{\#} \leq 2(\dim C)^2$ et l'inégalité $\Upsilon^{2(\dim C)^2} \leq \Xi(C)$ qui découle du lemme 17.3 si $\dim C \geq 2$ et du lemme 17.4 si $\dim C = 1$. $\square$

La nouveauté est que la borne pour N ne dépend pas des variétés A et B qui peuvent être en particulier de dimension arbitraire.

CHAPITRE 18

EXEMPLES

Nous détaillons dans ce chapitre plusieurs exemples pour illustrer les notions introduites dans le texte. En particulier, pour une variété abélienne A, nous présentons le calcul de ses descendantes (chapitre 6), de son anneau de Lefschetz $\Lambda(A)$ (chapitre 9) et de la variété abélienne $A^{\#}$ associée. Pour disposer de ces deux derniers objets, nous nous plaçons, sauf mention explicite du contraire, sur un sous-corps K de $\mathbb{C}$.

Considérons en premier lieu le cas où $\operatorname{End} A = \mathbb{Z}$. Ici A est simple et MM. Nous avons donc $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}_g(A) = \mathcal{D}_d(A)$ (lemme 6.7). De plus, si $n \geq 1$, toute sous-variété abélienne de A^n est isomorphe à A^m pour un entier $0 \leq m \leq n$ par principalité de $\operatorname{End} A$ (en effet, le corollaire 5.10 assure que toute variété abélienne similaire à A lui est isomorphe et l'on applique la proposition 1.7 de **[25]**). Par suite

$$\mathcal{D}(A) = \{A^m \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

De son côté, Ω_A est un $\operatorname{End} A$-module libre de rang $2g$ (où $g = \dim A$) donc $\Lambda(A) \simeq M_{2g}(\mathbb{Z})$. La variété abélienne $A^{\#}$ est une descendante de A de dimension $\operatorname{rg} \Lambda(A)/2 = 2g^2$ donc $A^{\#} \simeq A^{2g}$. Remarquons que, si une variété abélienne B est isogène à A sans lui être isomorphe, nous avons aussi $\operatorname{End} B = \mathbb{Z}$ et $\Lambda(B) \simeq M_{2g}(\mathbb{Z})$ mais $\Lambda(A)$ et $\Lambda(B)$ ne sont pas égaux (l'égalité donnerait $B \in \mathcal{D}(A)$ par le théorème 9.8 puis $B \simeq A$) ; nous pouvons cependant écrire $\Lambda(B) = x\Lambda(A)x^{-1}$ pour un élément inversible x de $\Lambda(A) \otimes \mathbb{Q}$: par principalité, tous les ordres maximaux de $M_{2g}(\mathbb{Q})$ sont conjugués (voir la démonstration du lemme 2.2).

Nous examinons ensuite la situation où A est une courbe elliptique CM′. L'ordre $\operatorname{End} A$ est de rang 2 sur $\mathbb{Z}$ et c'est un sous-anneau de l'anneau des entiers du corps quadratique imaginaire $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q}$. Rappelons quelques faits sur les modules sur un tel ordre.

LEMME 18.1. – *Soient $\mathcal{O}$ un ordre tel que $\mathcal{O} \otimes \mathbb{Q}$ est un corps quadratique et M un $\mathcal{O}$-module de type fini sans torsion.*

(1) *M est somme directe de $\mathcal{O}$-modules de rang 1.*
(2) *Si M est de rang 1 et que $\{x \in \mathcal{O} \otimes \mathbb{Q} \mid xM \subset M\} = \mathcal{O}$ alors il existe un entier $n \geq 1$ tel que $M^n \simeq \mathcal{O}^n$.*

Démonstration. Ces deux propriétés sont liées au fait que $\mathcal{O}$ est un anneau de Gorenstein. Nous sommes dans la situation de la partie 7 de [**4**] et, de plus, comme tout idéal non nul de $\mathcal{O}$ est un $\mathbb{Z}$-module de rang 2, il est immédiat que la propriété (c) de cette référence (page 19) est satisfaite. Par suite il en va de même des propriétés (b) et (a). L'assertion (a) donne immédiatement notre assertion (1) (voir aussi le théorème 1.7 de [**3**]) tandis que le corollaire 7.3 de [**4**] montre que, dans le cadre de (2), M est un $\mathcal{O}$-module projectif. Il est par conséquent isomorphe à un idéal inversible de $\mathcal{O}$ (voir page 4 de [**29**]). Le groupe de ces idéaux inversibles est fini par exemple comme conséquence du théorème de Jordan-Zassenhaus [**24**, (26.4)] donc il existe un entier $n \geq 1$ tel que $M^{\otimes n} \simeq \mathcal{O}$. Le module somme directe M^n est lui aussi projectif donc d'après la proposition 7 de [**29**] de la forme $\mathcal{O}^{n-1} \oplus P$ pour un $\mathcal{O}$-module projectif P. En prenant la puissance extérieure n-ème on constate que $P \simeq M^{\otimes n} \simeq \mathcal{O}$ d'où le résultat. □

Dans notre situation, le module Ω_A est de rang 2 sur $\mathbb{Z}$ donc de rang 1 sur $\operatorname{End} A$. Nous avons aussi

$$\operatorname{End} A = \{\varphi \in \operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q} \mid \varphi \cdot \Omega_A \subset \Omega_A\}.$$

Ceci entraîne en particulier $\Lambda(A) \simeq \operatorname{End} A$. Ainsi $A^{\#}$ est une courbe elliptique isogène à A, ayant le même anneau d'endomorphismes que A et telle que $\Omega_{A^{\#}}$ est un $\operatorname{End} A$-module libre de rang 1. Comme ce n'était pas forcément le cas de Ω_A, nous n'avons pas en général $A^{\#} \simeq A$. Remarquons au passage que la classe d'isomorphisme de $A^{\#}$ dépend de la façon dont le corps K est plongé dans $\mathbb{C}$ de même que la classe d'isomorphisme de Ω_A comme $\operatorname{End} A$-module en dépend (il est donc possible que $A^{\#}$ soit isomorphe à A pour un choix de plongement et non isomorphe pour un autre). Quoi qu'il en soit, si A et $A^{\#}$ ne sont pas nécessairement isomorphes, elles sont toujours similaires : d'après l'assertion (2) du lemme ci-dessus, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\Omega_A^n \simeq (\operatorname{End} A)^n$; ainsi les $\Lambda(A)$-modules Ω_{A^n} et $\Omega_{(A^{\#})^n}$ sont isomorphes et cela nous donne un isomorphisme $A^n \simeq (A^{\#})^n$ par l'assertion (5) du lemme 9.3. Déterminons maintenant les descendantes de A. Si $B \in \mathcal{D}(A)$ alors Ω_B est un $\Lambda(A)$-module de type fini sans torsion donc, d'après l'assertion (1) de notre lemme, il est somme de modules de rang 1. Cela signifie que B est produit de courbes elliptiques. Nous en déduisons que $\mathcal{D}(A)$ est l'ensemble de tous les produits de courbes elliptiques E vérifiant $\operatorname{End} A \subset \operatorname{End} E$ (puisqu'en appliquant ce qui précède à E cette inclusion s'écrit aussi $\Lambda(A) \subset \Lambda(E)$). Comme la courbe A est isomorphe à sa duale, nous avons encore dans ce cas $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}_g(A) = \mathcal{D}_d(A)$.

Les deux exemples précédents couvrent toutes les courbes elliptiques en caractéristique nulle. Faisons à présent une petite incursion en caractéristique non nulle pour mentionner le cas des courbes elliptiques supersingulières. Nous supposons donc ici, contrairement à notre hypothèse générale, que la caractéristique du corps K est un nombre premier p et que E est une courbe elliptique telle que $\operatorname{End} E$ est de rang 4. Le corps non commutatif $\operatorname{End} E \otimes \mathbb{Q}$ est une algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$. Lorsque ℓ est un nombre premier différent de p, le module de Tate $T_\ell(E)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell^2$; comme

$\operatorname{End} E \otimes \mathbb{Q}_\ell$ s'injecte dans l'algèbre des endomorphismes de $T_\ell(E) \otimes \mathbb{Q}_\ell \simeq \mathbb{Q}_\ell^2$, il y a un isomorphisme $\operatorname{End} E \otimes \mathbb{Q}_\ell \simeq M_2(\mathbb{Q}_\ell)$. Par définition de l'anneau de Lefschetz ℓ-adique, $\Lambda_\ell(E) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est le commutant de $\operatorname{End} E \otimes \mathbb{Q}_\ell$ dans $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(T_\ell(E) \otimes \mathbb{Q}_\ell)$. Ici ces deux algèbres coïncident donc $\Lambda_\ell(E) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est le centre de $M_2(\mathbb{Q}_\ell)$ soit $\Lambda_\ell(E) \otimes \mathbb{Q}_\ell \simeq \mathbb{Q}_\ell$ ce qui entraîne $\Lambda_\ell(E) \simeq \mathbb{Z}_\ell$. En particulier, il ne peut pas exister d'analogue de la construction du chapitre 9 en caractéristique p au sens où aucune variété abélienne $E^\#$ sur K ne peut satisfaire $T_\ell(E^\#) \simeq \Lambda_\ell(E)$ puisque le module de Tate est toujours un $\mathbb{Z}_\ell$-module de rang pair. Par ailleurs E est MM d'après le théorème 4.2 de **[31]** donc $\mathcal{D}(E) = \mathcal{D}_g(E) = \mathcal{D}_d(E)$ et les résultats de **[25]** montrent que $\mathcal{D}(E)$ est formé des produits de courbes elliptiques similaires à E. D'après un théorème de Deligne (voir théorème 33 de **[14]**), un tel produit est isomorphe à une puissance de E dès qu'il y a au moins deux facteurs donc nous pouvons même dire que $\mathcal{D}(E)$ est formé des courbes elliptiques similaires à E et des puissances de E.

Alors que toutes les variétés abéliennes considérées jusqu'ici étaient simples, nous allons détailler maintenant un exemple de variété non isotypique. Le corps de base K est de nouveau un sous-corps de $\mathbb{C}$, p est un nombre premier et nous fixons deux p-isogénies $\varphi\colon E_1 \to E_2$ et $\psi\colon E_3 \to E_4$ de courbes elliptiques non CM$'$ avec $\operatorname{Supp} E_1 \neq \operatorname{Supp} E_3$ (autrement dit E_1 et E_3 ne sont pas isogènes). Nous supposons $\operatorname{Ker}\varphi \subset E_1(K)$ et $\operatorname{Ker}\psi \subset E_3(K)$. Soit I l'ensemble des $p-1$ isomorphismes de groupes $\chi\colon \operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Ker}\psi$. Nous associons à chaque $\chi \in I$ son graphe $G_\chi \subset \operatorname{Ker}\varphi \times \operatorname{Ker}\psi$ puis la variété abélienne quotient $A_\chi = (E_1 \times E_3)/G_\chi$. Identifions tout d'abord les composantes isotypiques de A_χ. Elles sont au nombre de deux puisque bien entendu $\operatorname{Supp} A_\chi = \operatorname{Supp} E_1 \cup \operatorname{Supp} E_3$. De plus la composée

$$E_1 \simeq E_1 \times \{0\} \hookrightarrow E_1 \times E_3 \longrightarrow A_\chi$$

est injective ($G_\chi \cap (E_1 \times \{0\}) = \{0\}$) donc son image est isomorphe à E_1 et c'est la composante isotypique de A_χ correspondant à $\operatorname{Supp} E_1$. On obtient bien sûr de même la seconde composante, isomorphe à E_3. En fait, ceci nous montre que le morphisme quotient $E_1 \times E_3 \to A_\chi$ s'identifie au morphisme canonique Φ_{A_χ} introduit au chapitre 3 et, en particulier, c'est une isogénie nucléaire à droite. Notons que les deux composantes isotypiques de A_χ sont MM mais que A_χ ne l'est pas (sinon Φ_{A_χ} serait un isomorphisme). Nous pouvons déterminer son anneau d'endomorphismes.

Lemme 18.2. – *Pour tout* $\chi \in I$, *l'anneau* $\operatorname{End} A_\chi$ *est isomorphe à* $\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \equiv b[p]\}$.

Démonstration. Si $f \in \operatorname{End} A_\chi$, le morphisme $f \circ \Phi_{A_\chi}\colon E_1 \times E_3 \to A_\chi$ se factorise en $\Phi_{A_\chi} \circ g$ où $g \in \operatorname{End}(E_1 \times E_3)$ puisque Φ_{A_χ} est nucléaire à droite. Les hypothèses sur E_1 et E_3 donnent $\operatorname{End}(E_1 \times E_3) = \mathbb{Z}^2$ donc il nous suffit de déterminer à quelle condition un couple $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ passe au quotient par G_χ. Cette condition s'écrit $(a,b) \cdot G_\chi \subset G_\chi$ c'est-à-dire $(ay, b\chi(y)) \in G_\chi$ pour tout $y \in \operatorname{Ker}\varphi$ ou encore $\chi(ay) = b\chi(y)$ pour tout $y \in \operatorname{Ker}\varphi$. Comme χ est un isomorphisme de groupes, ceci équivaut à $(a-b) \cdot \operatorname{Ker}\varphi = 0$ d'où le résultat puisque $\operatorname{Ker}\varphi \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. □

Examinons ensuite le lien entre les différents A_χ.

Lemme 18.3. – *Soient $\chi, \chi' \in I$.*

(1) *Les variétés abéliennes A_χ et $A_{\chi'}$ sont isomorphes si et seulement si $\chi = \pm\chi'$.*
(2) *Les variétés abéliennes A_χ^{p-1} et $A_{\chi'}^{p-1}$ sont isomorphes.*

Démonstration. (1) Par le même argument que dans la démonstration précédente, tout isomorphisme $A_\chi \to A_{\chi'}$ se relève en un isomorphisme $E_1 \times E_3 \to E_1 \times E_3$ donc de la forme $(\pm 1, \pm 1)$. Ainsi A_χ et $A_{\chi'}$ sont isomorphes si et seulement s'il existe un choix de signes tel que $(\pm 1, \pm 1) G_\chi = G_{\chi'}$. Il est patent que ceci équivaut à $\chi = \pm\chi'$. (2) Il s'agit de trouver un automorphisme α de E_1^{p-1} et un automorphisme β de E_3^{p-1} tels que $(\alpha, \beta)(G_\chi^{p-1}) = G_{\chi'}^{p-1}$. Il suffit de choisir $\alpha = \mathrm{id}$ et β induisant l'automorphisme $(\chi' \circ \chi^{-1})^{p-1}$ du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $(\operatorname{Ker}\psi)^{p-1}$. Pour vérifier que ce choix de β est possible notons que $\det((\chi' \circ \chi^{-1})^{p-1}) = (\det \chi' \circ \chi^{-1})^{p-1} = 1$; or dans la composée

$$\operatorname{End}(E_3^{p-1}) \simeq M_{p-1}(\mathbb{Z}) \longrightarrow M_{p-1}(\mathbb{F}_p) \simeq M_{p-1}(\operatorname{End}\operatorname{Ker}\psi) \simeq \operatorname{End}((\operatorname{Ker}\psi)^{p-1})$$

la restriction $\mathrm{SL}_{p-1}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_{p-1}(\mathbb{F}_p)$ est surjective (on le voit par exemple en utilisant que le but est engendré par des transvections) donc tout automorphisme de déterminant 1 de $(\operatorname{Ker}\psi)^{p-1}$ provient bien d'un automorphisme de E_3^{p-1}. □

L'assertion (2) établit que A_χ et $A_{\chi'}$ sont toujours similaires donc elles auront exactement les mêmes descendantes, $\Lambda(A_\chi) = \Lambda(A_{\chi'})$ et $A_\chi^\# = A_{\chi'}^\#$. Nous allons expliciter ces objets ci-dessous.

On montrerait de la même façon que pour tous $\chi, \chi_1, \dots, \chi_n \in I$ $(n \geq 1)$ il existe $\chi' \in I$ tel que $A_{\chi_1} \times \cdots \times A_{\chi_n} \simeq A_\chi^{n-1} \times A_{\chi'}$ (comportement partiellement analogue à celui décrit par la proposition 1.7 de **[25]** bien que nous ne soyons pas ici dans le cas MM). L'argument de ce lemme va nous permettre de traiter de quotients plus généraux que les A_χ. Pour simplifier l'écriture, nous notons $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$ pour des variétés abéliennes $A_1, \dots, A_n$ l'ensemble des produits $A_1^{m_1} \times \cdots \times A_n^{m_n}$ où $m_i \in \mathbb{N}$ pour $1 \leq i \leq n$.

Lemme 18.4. – *Soient a et b deux entiers naturels et H un sous-groupe de $(\operatorname{Ker}\varphi)^a \times (\operatorname{Ker}\psi)^b$. Alors la variété abélienne $(E_1^a \times E_3^b)/H$ appartient à*

$$\langle E_1, E_2, E_3, E_4, \{A_\chi \mid \chi \in I\} \rangle.$$

Démonstration. Notons $H_1 = H \cap ((\operatorname{Ker}\varphi)^a \times \{0\}^b)$ et $H_2 = H \cap (\{0\}^a \times (\operatorname{Ker}\psi)^b)$ puis H_3 un supplémentaire de $H_1 + H_2$ dans H (au sens de la structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p$ que H hérite de $(\operatorname{Ker}\varphi)^a \times (\operatorname{Ker}\psi)^b$). Nous avons clairement $H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$. Écrivons encore $p_1 \colon (\operatorname{Ker}\varphi)^a \times (\operatorname{Ker}\psi)^b \to (\operatorname{Ker}\varphi)^a$ et $p_2 \colon (\operatorname{Ker}\varphi)^a \times (\operatorname{Ker}\psi)^b \to (\operatorname{Ker}\psi)^b$ les projections de sorte que par construction $p_1(H) = p_1(H_1 \oplus H_3) \simeq H_1 \oplus H_3$ et $p_2(H) = p_2(H_2 \oplus H_3) \simeq H_2 \oplus H_3$. Maintenant, suivant le même principe que dans la démonstration précédente, nous pouvons faire agir des automorphismes de déterminant 1 de $(\operatorname{Ker}\varphi)^a$ et $(\operatorname{Ker}\psi)^b$ sans changer la variété abélienne quotient. Par conséquent (en abrégeant $h_i = \dim H_i$ pour $1 \leq i \leq 3$), nous pouvons supposer $p_1(H_3) = (\operatorname{Ker}\varphi)^{h_3} \times \{0\}^{a-h_3}$, $p_1(H_1) = \{0\}^{h_3} \times (\operatorname{Ker}\varphi)^{h_1} \times \{0\}^{a-h_1-h_3}$ et de même $p_2(H_3) = (\operatorname{Ker}\psi)^{h_3} \times \{0\}^{b-h_3}$,

$p_2(H_2) = \{0\}^{h_3} \times (\operatorname{Ker}\psi)^{h_2} \times \{0\}^{b-h_2-h_3}$. De cette façon, la variété abélienne $E_1^a \times E_3^b/H$ est isomorphe à

$$((E_1^{h_3} \times E_3^{h_3})/H_3) \times E_1^{a-h_1-h_3} \times E_2^{h_1} \times E_3^{b-h_2-h_3} \times E_4^{h_2}.$$

Enfin, si nous écrivons H_3 comme somme $H_3 = H'_1 \oplus \cdots \oplus H'_{h_3}$ de droites vectorielles, nous pouvons à nouveau faire agir des automorphismes de déterminant 1 pour avoir $p_1(H'_i) = \{0\}^{i-1} \times (\operatorname{Ker}\varphi) \times \{0\}^{a-i}$ et $p_2(H'_i) = \{0\}^{i-1} \times (\operatorname{Ker}\psi) \times \{0\}^{b-i}$ $(1 \leq i \leq h_3)$. Alors H'_i s'identifie à un graphe $G_{\chi_i} \subset \operatorname{Ker}\varphi \times \operatorname{Ker}\psi$ pour $\chi_i \in I$ et $(E_1^{h_3} \times E_3^{h_3})/H_3$ est isomorphe au produit des A_{χ_i}. □

Fixons maintenant $\chi' \in I$ et déterminons les descendantes à gauche de $A = A_{\chi'}$. Si $B \in \mathcal{D}_g(A)$ il existe par définition un entier $n \geq 0$ tel que B est une sous-variété de A^n. Notons B' la composante neutre de l'image réciproque de B dans le quotient $E_1^n \times E_3^n \to A^n$. Le noyau de l'isogénie $B' \to B$ est contenu dans $G_{\chi'}^n \subset (\operatorname{Ker}\varphi)^n \times (\operatorname{Ker}\psi)^n$. D'un autre côté, comme sous-variété abélienne de $E_1^n \times E_3^n$, la variété B' est isomorphe à $E_1^a \times E_3^b$ pour des entiers a, b avec $0 \leq a, b \leq n$ (voir le premier exemple ci-dessus). Nous pouvons donc écrire B' comme l'image d'un morphisme injectif $\gamma\colon E_1^a \times E_3^b \to E_1^n \times E_3^n$. Parce qu'un morphisme injectif $\alpha\colon E_1 \to E_1^n$ est formé de n entiers premiers entre eux, nous constatons $\alpha^{-1}((\operatorname{Ker}\varphi)^n) = \operatorname{Ker}\varphi$ et nous en déduisons (avec une propriété analogue pour E_3) que $\gamma^{-1}((\operatorname{Ker}\varphi)^n \times (\operatorname{Ker}\psi)^n) = (\operatorname{Ker}\varphi)^a \times (\operatorname{Ker}\psi)^b$. Ce groupe contient donc $H = \gamma^{-1}(G_{\chi'}^n)$. La construction montre donc que $B \simeq (E_1^a \times E_3^b)/H$ est de la forme considérée dans le lemme ci-dessus et ainsi nous avons établi

$$\mathcal{D}_g(A) \subset \langle E_1, E_2, E_3, E_4, \{A_\chi \mid \chi \in I\}\rangle.$$

Nous voyons aussi facilement $\langle E_1, E_3, \{A_\chi \mid \chi \in I\}\rangle \subset \mathcal{D}_g(A)$ puisque E_1 et E_3 sont isomorphes à des sous-variétés abéliennes de A (ses composantes isotypiques) et les A_χ lui sont similaires. En revanche E_2 ne peut pas être isomorphe à une sous-variété abélienne de A^n puisque, étant isotypique, celle-ci serait contenue dans l'une des deux composantes isotypiques de A^n isomorphes à E_1^n et E_3^n et donc nous aurions $E_2 \in \mathcal{D}(E_1)$ ou $E_2 \in \mathcal{D}(E_3)$ qui est absurde dans les deux cas puisque $\mathcal{D}(E_1) = \{E_1^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ et $\mathcal{D}(E_3) = \{E_3^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ (premier exemple). De la même façon, il vient $E_4 \notin \mathcal{D}_g(A)$ et nous pouvons conclure

$$\mathcal{D}_g(A) = \langle E_1, E_3, \{A_\chi \mid \chi \in I\}\rangle.$$

Pour les descendantes à droite, nous raisonnons par dualité. Comme les courbes elliptiques sont autoduales, nous pouvons écrire une suite d'isogénies

$$E_1 \times E_3 \longrightarrow A \longrightarrow E_2 \times E_4 \longrightarrow \widehat{A} \longrightarrow E_1 \times E_3,$$

où la composée des deux premières flèches est $\varphi \times \psi$ tandis que celle des deux secondes est $\widehat{\varphi} \times \widehat{\psi}$ où les p-isogénies $\widehat{\varphi}$ et $\widehat{\psi}$ sont définies par $\varphi \circ \widehat{\varphi} = [p]$ et $\psi \circ \widehat{\psi} = [p]$. Par conséquent $\widehat{A}$ s'obtient à partir de $\widehat{\varphi}$ et $\widehat{\psi}$ de la même façon que A s'obtient à partir de φ et ψ (modulo un isomorphisme entre $\operatorname{Ker}\widehat{\varphi}$ et $\operatorname{Ker}\widehat{\psi}$ obtenu par dualité). Ainsi

$$\mathcal{D}_g(\widehat{A}) = \langle E_2, E_4, \{\widehat{A_\chi} \mid \chi \in I\}\rangle$$

et donc

$$\mathcal{D}_d(A) = \langle E_2, E_4, \{A_\chi \mid \chi \in I\}\rangle.$$

Ensuite $\mathcal{D}(A) = \{B \mid B \in \mathcal{D}_g(C),\ C \in \mathcal{D}_d(A)\} = \mathcal{D}_g(E_2 \times E_4 \times A)$ et, si B est une sous-variété abélienne de $E_2^n \times E_4^n \times A^n$, nous voyons comme ci-dessus dans le quotient $E_1^{2n} \times E_3^{2n} \to E_2^n \times E_4^n \times A^n$ que B est de la forme du lemme. Nous pouvons donc conclure

$$\mathcal{D}(A) = \langle E_1, E_2, E_3, E_4, \{A_\chi \mid \chi \in I\}\rangle.$$

Notons que A et $\widehat{A}$ donnent ici un exemple de variétés abéliennes isogènes avec $\widehat{A} \notin \mathcal{D}(A)$ et $A \notin \mathcal{D}(\widehat{A})$: en effet, $\widehat{A}$ ne peut être ni un produit de courbes elliptiques (sinon A en serait un aussi) ni l'un des A_χ puisque $\mathcal{D}_g(\widehat{A}) \neq \mathcal{D}_g(A) = \mathcal{D}_g(A_\chi)$.

Utilisons ce calcul de descendantes pour identifier la classe d'isomorphisme de $A^\#$. Comme $A^\#$ est isogène à $(E_1 \times E_3)^\# \simeq E_1^2 \times E_3^2$ et est une descendante à gauche de A, il y a trois possibilités :

- $A^\# \simeq E_1^2 \times E_3^2$,
- $A^\# \simeq A_{\chi_1} \times A_{\chi_2}$ pour $\chi_1, \chi_2 \in I$,
- $A^\# \simeq E_1 \times E_3 \times A_\chi$ pour $\chi \in I$.

Le premier cas est exclu car $A^\#$ serait MM alors que A ne l'est pas. Si nous étions dans le second cas, nous aurions $\mathcal{D}_d(A^\#) = \mathcal{D}_d(A) \neq \mathcal{D}(A)$ alors que la démonstration du théorème 9.8 montre $\mathcal{D}_d(A^\#) = \mathcal{D}(A)$. Par suite, nous sommes dans le troisième cas. Comme dans le cas des courbes elliptiques CM′ il n'est pas possible de préciser plus le choix de $\chi \in I$ (qui dépend par exemple de la façon dont le corps K est plongé dans $\mathbb{C}$). Nous en déduisons le calcul de $\Lambda(A) = (\operatorname{End} A^\#)^{\mathrm{op}}$: en raisonnant comme plus haut, $\operatorname{End} A^\#$ est le sous-anneau de $\operatorname{End}(E_1^2 \times E_3^2) \simeq M_2(\mathbb{Z})^2$ formé des couples de matrices qui laissent stable $\{0\}^2 \times G_\chi \subset E_1 \times E_3 \times E_1 \times E_3$. Explicitement nous trouvons (après transposition pour passer à l'anneau opposé)

$$\Lambda(A) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right) \in M_2(\mathbb{Z})^2 \mid c, g, d-h \in p\mathbb{Z} \right\}.$$

Une conséquence de ce calcul est que l'inclusion (voir chapitre 13)

$$\Lambda^\flat(\operatorname{Supp} A) \subset \Lambda^\flat(\operatorname{Supp} E_1) \times \Lambda^\flat(\operatorname{Supp} E_3)$$

est stricte : en effet, dans l'écriture matricielle, le membre de droite contient le couple $(\mathrm{id}, 0)$ alors que ce n'est pas le cas du membre de gauche puisque $\Lambda^\flat(\operatorname{Supp} A) \subset \Lambda(A)$.

INDEX DES NOTATIONS

Dans le tableau suivant, nous rassemblons quelques notations utilisées dans ce texte. Le numéro à droite correspond à celui de la page où est introduite la notation.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Autissier – « Un lemme matriciel effectif », *Math. Z.* **273** (2013), p. 355–361.

[2] R. Bantegnie – « Sur une propriété de transfert concernant les boules de R^n », *Monatsh. Math.* **74** (1970), p. 1–5.

[3] H. Bass – « Torsion free and projective modules », *Trans. Amer. Math. Soc.* **102** (1962), p. 319–327.

[4] ______, « On the ubiquity of Gorenstein rings », *Math. Z.* **82** (1963), p. 8–28.

[5] V. Bosser & É. Gaudron – « Logarithmes des points rationnels des variétés abéliennes », *Canad. J. Math.* **71** (2019), p. 247–298.

[6] V. Cantoral-Farfán, Y. Tang, S. Tanimoto & E. Visse – « Effective bounds for Brauer groups of Kummer surfaces over number fields », *J. Lond. Math. Soc.* **97** (2018), p. 353–376.

[7] P. Deligne – « Preuve des conjectures de Tate et de Shafarevitch (d'après G. Faltings) », Séminaire Bourbaki, vol. 1983/84, *Astérisque* **121-122** (1985), p. 25–41.

[8] G. Faltings – « Complements to Mordell », in *Rational points (Bonn, 1983/1984)*, Aspects Math., E6, Friedr. Vieweg, Braunschweig, 1984, p. 203–227.

[9] É. Gaudron – « Some explicit computations in Arakelov geometry of abelian varieties », *J. Ramanujan Math. Soc.* **34** (2019), p. 433–447.

[10] É. Gaudron & G. Rémond – « Théorème des périodes et degrés minimaux d'isogénies », *Comment. Math. Helv.* **89** (2014), p. 343–403.

[11] ______, « Polarisations et isogénies », *Duke Math. J.* **163** (2014), p. 2057–2108.

[12] ______, « Torsion des variétés abéliennes CM », *Proc. Amer. Math. Soc.* **146** (2018), p. 2741–2747.

[13] G. van der Geer & B. Moonen – « Abelian varieties », livre en préparation, `www.math.ru.nl/~bmoonen/research.html#bookabvar`.

[14] D. Goldstein & M. Schacher – « Norms in central simple algebras », *Pacific J. Math.* **292** (2018), p. 373–388.

[15] P. M. Gruber & C. G. Lekkerkerker – *Geometry of numbers*, 2e éd., North-Holland Mathematical Library, vol. 37, North-Holland Publishing Co., 1987.

[16] N. Jacobson – *Basic algebra II*, 2e éd., W. H. Freeman and Company, 1989.

[17] D. Lombardo – « Bounds for Serre's open image theorem for elliptic curves over number fields », *Algebra Number Theory* **9** (2015), p. 2347–2395.

[18] D. W. Masser – « Multiplicative isogeny estimates », *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **64** (1998), p. 178–194.

[19] D. W. Masser & G. Wüstholz – « Factorization estimates for abelian varieties », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **81** (1995), p. 5–24.

[20] ———, « Refinements of the Tate conjecture for abelian varieties », in *Abelian varieties (Egloffstein, 1993)*, de Gruyter, 1995, p. 211–223.

[21] J. S. Milne – « Lefschetz classes on abelian varieties », *Duke Math. J.* **96** (1999), p. 639–675.

[22] D. Mumford – *Abelian varieties*, 2e éd., Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, vol. 5, Oxford Univ. Press, 1974.

[23] M. Orr, A. N. Skorobogatov & Y. G. Zarhin – « On uniformity conjectures for abelian varieties and K3 surfaces », *Amer. J. Math.* **143** (2021), p. 1665–1702.

[24] I. Reiner – *Maximal orders*, London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 28, The Clarendon Press Univ. Press, 2003.

[25] G. Rémond – « Variétés abéliennes et ordres maximaux », *Rev. Mat. Iberoam.* **33** (2017), p. 1173–1195.

[26] ———, « Conjectures uniformes sur les variétés abéliennes », *Q. J. Math.* **69** (2018), p. 459–486.

[27] ———, « Degré de définition des endomorphismes d'une variété abélienne », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **22** (2020), p. 3059–3099.

[28] ———, « Propriétés de la hauteur de Faltings », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **23** (2022), p. 1589–1596.

[29] J-P. Serre – « Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle », in *Séminaire P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot, 1957/58, fasc. 2, exposé 23*, Secrétariat mathématique, 1958.

[30] A. N. Skorobogatov & Y. G. Zarhin – « A finiteness theorem for the Brauer group of abelian varieties and $K3$ surfaces », *J. Algebraic Geom.* **17** (2008), p. 481–502.

[31] W. C. Waterhouse – « Abelian varieties over finite fields », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **2** (1969), p. 521–560.

Série MÉMOIRES DE LA S.M.F.

2022

175. R. OLLIVIER & P. SCHNEIDER – *On the pro-p Iwahori Hecke* Ext*-algebra of* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$
174. R. CARLES & C. CHEVERRY – *Constructive and destructive interferences in nonlinear hyperbolic equations*
173. C. PARK & Z. QIAN – *On mod p local-global compatibility for* $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$ *in the ordinary case*
172. L. BIGORGNE – *Asymptotic properties of small data solutions of the Vlasov-Maxwell system in high dimensions*

2021

171. K. COULIBALY-PASQUIER & L. MICLO – *On the evolution by duality of domains on manifolds*
170. A. ARABIA – *Espaces de configuration généralisés. Espaces topologiques i-acycliques. Suites spectrales basiques*
169. C. ERIGNOU – *Hydrodynamic limit for an active exclusion process*
168. V. A. DOLGUSHEV – *Stable Formality Quasi-isomorphisms for Hochschild Cochains*

2020

167. D. BENOIS – *p-adic height and p-adic Hodge theory*
166. Y. ALMOG & B. HELFFER – *The spectrum of a Schrödinger operator in a wire-like domain with a purely imaginary degenerate potential in the semiclassical limit*
165. D. ARA & G. MALTSINIOTIS – *Joint et tranches pour les ∞-catégories strictes*
164. S. GHAZOUANI & L. PIRIO – *Moduli spaces of flat tori and elliptic hypergeometric functions*

2019

163. D. XU – *Lifting the Cartier transform of Ogus-Vologodsky module p^n*
162. J.-H. CHIENG, C.-Y. HSIAO & I-H. TSAI – *Heat kernel asymptotics, local index theorem and trace integrals for Cauchy-Riemann manifolds with S^1 action*
161. F. JAUBERTEAU, Y. ROLLIN & S. TAPIE – *Discrete geometry and isotropic surfaces*
160. P. VIDOTTO – *Ergodic properties of some negatively curved manifolds with infinite measure*

2018

159. L. POSITSELSKI – *Weakly curved A_∞-algebras over a topological local ring*
158. T. LUPU – *Poisson ensembles of loops of one-dimensional diffusions*
157. M. SPITZWECK – *A commutative $\mathbb{P}^1$-spectrum representing motivic cohomology over Dedekind domains*
156. C. SABBAH – *Irregular Hodge Theory*

2017

155. Y. DING – *Formes modulaires p-adiques sur les courbes de Shimura unitaires et compatibilité local-global*
154. G. MASSUYEAU, V. TURAEV – *Brackets in the Pontryagin algebras of manifolds*
153. M.P. GUALDANI, S. MISCHLER, C. MOUHOT – *Factorization of non-symmetric operators and exponential H-theorem*
152. M. MACULAN – *Diophantine applications of geometric invariant theory*
151. T. SCHOENEBERG – *Semisimple Lie algebras and their classification over $\mathfrak{p}$-adic fields*
150. P.G. LE FLOCH , Y. MA – *The mathematical validity of the $f(R)$ theory of modified gravity*

2016

149. R. BEUZART-PLESSIS – *La conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées des groupes unitaires*
148. M. MOKHTAR-KHARROUBI – *Compactness properties of perturbed sub-stochastic C_0-semigroups on $L^1(\mu)$ with applications to discreteness and spectral gaps*
147. Y. CHITOUR, P. KOKKONEN – *Rolling of manifolds and controllability in dimension three*
146. N. KARALIOLIOS – *Global aspects of the reducibility of quasiperiodic cocycles in compact Lie groups*
145. V. BONNAILLIE-NOËL, M. DAUGE, N. POPOFF – *Ground state energy of the magnetic Laplacian on corner domains*
144. P. AUSCHER, S. STAHLHUT – *Functional calculus for first order systems of Dirac type and boundary value problems*

2015

143. R. DANCHIN, P.B. MUCHA – *Critical functional framework and maximal regularity in action on systems of incompressible flows*
142. J. AYOUB – *Motifs des variétés analytiques rigides*
140/141. Y. LU, B. TEXIER – *A stability criterion for high-frequency oscillations*

2014

138/139. T. MOCHIZUKI – *Holonomic D-modules with Betti structures*
137. P. SEIDEL – *Abstract analogues of flux as symplectic invariants*
136. J. SJÖSTRAND – *Weyl law for semi-classical resonances with randomly perturbed potentials*

2013

135. L. PRELLI – *Microlocalization of subanalytic sheaves*
134. P. BERGER – *Persistence of stratification of normally expanded laminations*
133. L. DESIDERI – *Problème de Plateau, équations fuchsiennes et problème de Riemann Hilbert*
132. X. BRESSAUD, N. FOURNIER – *One-dimensional general forest fire processes*

2012

130/131. Y. NAKKAJIMA – *Weight filtration and slope filtration on the rigid cohomology of a variety in characteristic $p > 0$*
129. W. A STEINMETZ-ZIKESCH – *Algèbres de Lie de dimension infinie et théorie de la descente*
128. D. DOLGOPYAT – *Repulsion from resonances*

2011

127. B. LE STUM – *The overconvergent site*
125/126. J. BERTIN, M. ROMAGNY – *Champs de Hurwitz*
124. G. HENNIART, B. LEMAIRE – *Changement de base et induction automorphe pour GL_n en caractéristique non nulle*

2010

123. C.-H. HSIAO – *Projections in several complex variables*
122. H. DE THÉLIN, G. VIGNY – *Entropy of meromorphic maps and dynamics of birational maps*
121. M. REES – *A Fundamental Domain for V_3*
120. H. CHEN – *Convergence des polygones de Harder-Narasimhan*

2009

119. B. DEMANGE – *Uncertainty principles associated to non-degenerate quadratic forms*
118. A. SIEGEL, J. M. THUSWALDNER – *Topological properties of Rauzy fractals*
117. D. HÄFNER – *Creation of fermions by rotating charged black holes*
116. P. BOYER – *Faisceaux pervers des cycles évanescents des variétés de Drinfeld et groupes de cohomologie du modèle de Deligne-Carayol*

Mémoires de la S.M.F.

Instructions aux auteurs / *Instructions to Authors*

Les *Mémoires* de la SMF publient, en français ou en anglais, des articles longs de recherche ou des monographies de la plus grande qualité qui font au moins 80 pages. Les *Mémoires* sont le supplément du *Bulletin* de la SMF et couvrent l'ensemble des mathématiques. Son comité de rédaction est commun avec celui du *Bulletin*.
Le manuscrit doit être envoyé au format pdf au comité de rédaction, à l'adresse électronique `memoires@smf.emath.fr` Les articles acceptés doivent être composés en LaTeXavec la classe `smfart` ou `smfbook`, disponible sur le site de la SMF `http://smf.emath.fr/` ou avec toute classe standard.

In the Mémoires of the SMF are published, in French or in English, long research articles or monographs of the highest mathematical quality, that are at least 80 pages long. Articles in all areas of mathematics are considered. The Mémoires are the supplement of the Bulletin of the SMF. They share the same editorial board.
The manuscript must be sent in pdf format to the editorial board to the email address `memoires@smf.emath.fr`*. The accepted articles must be composed in LaTeXwith the* `smfart` *or the* `smfbook` *class available on the SMF website* `http://smf.emath.fr/` *or with any standard class.*

Étant donné une extension de type fini K du corps des nombres rationnels et une variété abélienne C sur K, nous considérons la classe de toutes les variétés abéliennes sur K isogènes (sur K) à une sous-variété abélienne d'une puissance de C. Nous expliquons comment définir, dans cette classe et de manière naturelle, une variété abélienne $C^\flat$ dont l'anneau des endomorphismes contrôle toutes les isogénies entre éléments de la classe, au sens suivant : si d désigne le discriminant de l'anneau des endomorphismes de $C^\flat$ alors, pour tout couple de variétés abéliennes isogènes dans la classe, il existe une isogénie entre elles dont le noyau est d'exposant au plus d. En outre, nous montrons que ce nombre d permet de majorer plusieurs invariants attachés à un élément quelconque A de la classe, comme le plus petit degré d'une polarisation sur A, le discriminant de son anneau d'endomorphismes ou le cardinal de la partie invariante sous Galois du groupe de Brauer géométrique de A. Lorsque K est un corps de nombres, le théorème des périodes appliqué à $C^\flat$ et à sa période canonique fournit une borne explicite pour d en termes du degré de K, de la dimension de $C^\flat$ et de la hauteur de Faltings de C. Nous en déduisons donc des majorations explicites des quantités mentionnées ci-dessus pour les isogénies, polarisations, endomorphismes et groupes de Brauer, qui améliorent considérablement les résultats antérieurs.

Given a finitely generated field extension K of the rational numbers and an abelian variety C over K, we consider the class of all abelian varieties over K which are isogenous (over K) to an abelian subvariety of a power of C. We show that there is a single, naturally constructed abelian variety $C^\flat$ in the class whose ring of endomorphisms controls all isogenies in the class. Precisely, this means that if d is the discriminant of this ring then for any pair of isogenous abelian varieties in the class there exists an isogeny between them whose kernel has exponent at most d. Furthermore we prove that, for any element A in the class, the same number d governs several invariants attached to A such as the smallest degree of a polarisation on A, the discriminant of its ring of endomorphisms or the size of the invariant part of its geometric Brauer group. All these are bounded only in terms of d and the dimension of A. In the case where K is a number field we can go further and show that the period theorem applies to $C^\flat$ in a natural way and gives an explicit bound for d in terms of the degree of K, the dimension of $C^\flat$ and the stable Faltings height of C. This in turn yields explicit upper bounds for all the previous quantities related to isogenies, polarisations, endomorphisms, Brauer groups which significantly improve known results.