Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 181

Nouvelle série

COMPLEXES DE MODULES ÉQUIVARIANTS SUR L'ALGÈBRE DE STEENROD ASSOCIÉS À UN $(\mathbb{Z}/2)^n$-CW-COMPLEXE FINI

D. BOURGUIBA, J. LANNES, L. SCHWARTZ & S. ZARATI

2 0 2 4

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
commandes@smf.emath.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 42 € ($ 63)
Abonnement électronique : 128 € ($ 192)
Abonnement avec supplément papier : 220 €, hors Europe : 265 € ($ 397)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
memoires@smf.emath.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN papier 0249-633-X; électronique : 2275-3230

ISBN 978-2-85629-991-3

doi:10.24033/msmf.489

Directeur de la publication : Fabien DURAND

MÉMOIRES DE LA SMF 181

COMPLEXES DE MODULES ÉQUIVARIANTS SUR L'ALGÈBRE DE STEENROD ASSOCIÉS À UN $(\mathbb{Z}/2)^n$-CW-COMPLEXE FINI

Dorra Bourguiba
Jean Lannes
Lionel Schwartz
Saïd Zarati

Société Mathématique de France 2024

D. Bourguiba

Université Tunis El Manar, Faculté des Sciences de Tunis, Département de Mathématiques, TN-2092, El Manar, Tunis, Tunisie.

E-mail : `dorra.bourguiba@fst.utm.tn`

J. Lannes

CMLS, École polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex, France,
Université Paris-Cité, IMJ-PRG.

E-mail : `jean.lannes@polytechnique.edu`

L. Schwartz

LAGA UMR 7539 CNRS, Institut Galilée, Université Sorbonne Paris Nord, av. J.-B. Clément, F-93430 Villetaneuse, France.

E-mail : `lionel-schwartz@wanadoo.fr`

S. Zarati

Université Tunis El Manar, Faculté des Sciences de Tunis, Département de Mathématiques, TN-2092, El Manar, Tunis, Tunisie.

E-mail : `said.zarati@fst.utm.tn`

Soumis le 20 juin 2021 ; révisé le 19 octobre 2022 ; accepté le 25 janvier 2023.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** – 55XX, 18GXX.

Mots-clefs. – Cohomologie équivariante, A-modules instables, H^*V-A-modules instables, foncteurs Fix, modules de Steinberg, filtration par la codimension du support.

Key words and phrases. – Equivariant cohomology, unstable A-modules, unstable H^*V-A-modules, fix functors, Steinberg modules, filtration by codimension of support.

COMPLEXES DE MODULES ÉQUIVARIANTS SUR L'ALGÈBRE DE STEENROD ASSOCIÉS À UN $(\mathbb{Z}/2)^n$-CW-COMPLEXE FINI

Dorra Bourguiba, Jean Lannes, Lionel Schwartz, Saïd Zarati

Résumé. **–** Soient V un 2-groupe abélien élémentaire et X un V-CW-complexe fini.

Dans ce mémoire nous étudions deux complexes de modules sur A, l'algèbre de Steenrod modulo 2, munis d'une action compatible de H^*V, la cohomologie modulo 2 de V, complexes tous deux associés à X. Le premier, que nous appelons le « complexe topologique », est défini à l'aide de la filtration par les orbites de X. Le second, que nous appelons le « complexe algébrique », est défini en termes de la structure de H^*V-A-module instable dont est munie $\mathrm{H}^*_V X$, la cohomologie modulo 2 équivariante de X (ce qui signifie que nous pouvons remplacer dans cette définition $\mathrm{H}^*_V X$ par un H^*V-A-module instable arbitraire). Ces deux complexes sont de longeur $\dim_{\mathbb{Z}/2} V$ et peuvent être coaugmentés par $\mathrm{H}^*_V X$; nous construisons en outre un morphisme κ du complexe algébrique vers le complexe topologique compatible avec la coaugmentation.

Nous montrons en particulier que ces deux complexes coaugmentés sont acycliques si et seulement si $\mathrm{H}^*_V X$ est libre comme H^*V-module. Dans ce cas κ est un isomorphisme ce qui implique que tous les termes du complexe topologique sont des modules instables sur l'algèbre de Steenrod.

Pour illustrer le résultat évoqué ci-dessus nous étudions en détail le cas où $\mathrm{H}^*_V X$ est libre de dimension 1 comme H^*V-module. Ceci a lieu si (et en un certain sens seulement si) X est la compactification à l'infini d'une représentation linéaire réelle (de dimension finie) de V. Dans certains cas particuliers nous donnons des informations très précises sur la structure du complexe (topologique ou algébrique) associé à X.

Il existe un chevauchement notable entre la partie topologique de notre mémoire et l'article « Syzygies in equivariant cohomology in positive characteristic », de Allday, Franz et Puppe, qui vient d'apparaître. Cependant nos techniques sont très différentes des leurs : le nom « Steenrod » ne figure pas dans leur article tandis que notre étude fait un usage intensif de la théorie des H^*V-A-modules instables (en particulier celle des foncteurs Fix) qui est un sous-produit des recherches sur la conjecture de Sullivan.

Les relations entre notre travail et celui de Allday, Franz et Puppe sont examinées en détail.

La relation entre notre travail et l'article de Bob Oliver « Higher limits via Steinberg representations » est également examinée.

Le « complexe algébrique » associé à un H^*V-A-module instable, auquel nous avons fait allusion plus haut, est obtenu formellement à partir d'une filtration décroissante naturelle des H^*V-A-modules instables (dans la catégorie abélienne de ces objets) définie en termes des foncteurs Fix ; nous montrons enfin que cette filtration coincide (en un sens évident) avec la filtration par la codimension du support des H^*V-modules sous-jacents.

***Abstract* (Complexes of equivariant modules over the Steenrod algebra associated with a finite $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$-CW-complex)**

Let V be an elementary abelian 2-group and X be a finite V-CW-complex.

In this memoir we study two cochain complexes of modules over the mod 2 Steenrod algebra A equipped with a compatible action of H^*V, the mod 2 cohomology of V, both associated with X. The first, which we call the "topological complex," is defined using the orbit filtration of X. The second, which we call the "algebraic complex," is defined in terms of the unstable H^*V-A-module structure of $\mathrm{H}^*_V X$, the mod 2 equivariant cohomology of X (which means that we can replace, in the definition of the algebraic complex, $\mathrm{H}^*_V X$ with any unstable H^*V-A-module). Both complexes are of length $\dim_{\mathbb{Z}/2} V$ and can be coaugmented over $\mathrm{H}^*_V X$; furthermore we construct a morphism κ from the algebraic complex into the topological complex, compatible with the coaugmentation.

We show in particular that both coaugmented complexes are acyclic if and only if $\mathrm{H}^*_V X$ is free as an H^*V-module. In this case κ is an isomorphism which implies that all terms of the topological complex are unstable modules over the Steenrod algebra.

To illustrate the result above, we study in detail the case when $\mathrm{H}^*_V X$ is a free of dimension 1 as an H^*V-module. This happens if (and in some sense only if) X is the compactification at infinity of a (finite dimensional) real linear representation of V. In special cases we provide very precise information on the structure of the terms of the complex (topological or algebraic) associated to X.

There is a noteworthy overlap between the topological part of our memoir and the article "Syzygies in equivariant cohomology in positive characteristic," by Allday, Franz and Puppe, which has just appeared. However our techniques are quite different from theirs: the name "Steenrod" does not show up in their article, whereas our study makes intensive use of the theory of unstable H^*V-A-modules (in particular the functors Fix) which is a by-product of researches on the Sullivan conjecture.

The relations of our work with the work of Allday, Franz and Puppe are investigated in detail.

The connexion between our work and Bob Oliver's in "Higher limits via Steinberg representations" is investigated as well.

The "algebraic complex" associated to an unstable H^*V-A-module, alluded above, is formally obtained using a natural decreasing filtration of unstable H^*V-A-modules (in the abelian category of such objects) defined in terms of functors Fix ; we show finally

that this filtration coincides (in an obvious sense) with the filtration by codimension of support of the underlying H^*V-modules.

TABLE DES MATIÈRES

0. Introduction ix
Le complexe topologique ix
Le complexe algébrique xi
Illustrations xiii
Sur le théorème 10.2 de [**2**] xiv

1. Rappels sur la théorie des foncteurs Fix 1

2. Rappels sur les injectifs des catégories V-$\mathcal{U}$ et V_{tf}-$\mathcal{U}$ 15

3. Sur les dérivés du foncteur « partie finie » 21
Complément : localisation de V_{tf}-$\mathcal{U}$ modulo les objets finis 30

4. Le complexe topologique 33
Intermède de topologie générale 34
Fin de l'intermède de topologie générale 36

5. Le complexe algébrique 43
Filtration d'un H^*V-A-module instable 43
La notion de H^*V-A-module instable e-fini 47
Complexe associé à un H^*V-A-module instable 48
Pendant algébrique du théorème 4.8 50
Généralisation du théorème 5.16 51

6. Comparaison entre les complexes algébrique et topologique 59

7. Illustrations 71
Etude du complexe $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$ 76
Les complexes $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{c}_V^h\,\mathrm{H}^*V)$, $h \in \mathbb{N}$ 92

8. Modules de Steinberg et algèbre homologique 97
8.1. Quelques rappels sur les modules de Steinberg 100
8.2. Algèbre homologique dans la catégorie abélienne $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$ 105
8.3. Sur les foncteurs de $\mathcal{W}$ dans V-$\mathcal{U}$ vus comme certaines suites de foncteurs de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}$ 115
8.4. Construction du bicomplexe $\mathrm{B}^{p,q}M$ 118

9. Filtration par la codimension du support et foncteurs Fix 123
9.1. Filtration par la codimension du support 123
9.2. Comparaison entre la filtration d'un H^*V-A-module instable définie en termes des foncteurs Fix et la filtration par la codimension du support du H^*V-module sous-jacent 125
9.3. Compléments 128

10. Stratégies pour $\ell > 2$ 133

Bibliographie 137

Index 141

CHAPITRE 0

INTRODUCTION

Soit V un 2-groupe abélien élémentaire ; V est donc isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^n$ pour un certain entier n. Nous verrons le plus souvent V comme un $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel dont la dimension n sera notée $\dim V$.

Soit X un V-CW-complexe (que nous supposerons le plus souvent fini, pour une référence sur la notion de CW-complexe équivariant, voir par exemple [**15**, Chap. II, Sect. 1]). Nous étudions dans ce mémoire deux complexes de « modules équivariants sur l'algèbre de Steenrod modulo 2 » (cette notion sera bien sûr précisée dans la suite de cette introduction) associés à X. Le premier est défini à l'aide de la filtration par les orbites de X (voir ci-après), nous l'appellerons le « complexe topologique ». Le second est défini de façon plus algébrique ; nous l'appellerons pour cela le « complexe algébrique ».

Le complexe topologique

Soit $W \subset V$ un sous-groupe ; la codimension de W, vu comme un sous-espace vectoriel de V, est notée $\operatorname{codim} W$.

Soit p un entier avec $-1 \leq p \leq n := \dim V$; on pose

$$\mathrm{F}_p\, X := \bigcup_{\operatorname{codim} W \leq p} X^W,$$

W décrivant l'ensemble des sous-groupes de V de codimension inférieure ou égale à p et X^W désignant le sous-V-CW-complexe de X constitué des points fixes par W. On a donc une filtration croissante de X par des sous-V-CW-complexes :

$$\emptyset = \mathrm{F}_{-1}\, X \subset \mathrm{F}_0\, X \subset \mathrm{F}_1\, X \subset \cdots \subset \mathrm{F}_{n-1}\, X \subset \mathrm{F}_n\, X = X.$$

On observera que l'on a $\mathrm{F}_0\, X = X^V$ et que $\mathrm{F}_{n-1}\, X$ est le sous-V-CW-complexe de X constitué des points dont le groupe d'isotropie est non trivial. Le sous-V-CW-complexe $\mathrm{F}_{n-1}\, X$ sera aussi noté $\mathrm{Sing}_V X$ (« partie singulière » de l'action de V sur X) ; l'ouvert complémentaire $X - \mathrm{Sing}_V X$ est la réunion des orbites libres (« partie régulière » de l'action de V sur X). On définit un complexe de cochaînes

$$\mathrm{C}^0_{\mathrm{top}}\, X \to \mathrm{C}^1_{\mathrm{top}}\, X \to \mathrm{C}^2_{\mathrm{top}}\, X \to \cdots \to \mathrm{C}^p_{\mathrm{top}}\, X \to \cdots \to \mathrm{C}^n_{\mathrm{top}}\, X \to 0 \to 0 \to \cdots$$

en posant

$$\begin{aligned}\mathrm{C}^p_{\mathrm{top}}\,X &:= \Sigma^{-p}\,\mathrm{H}^*_V(\mathrm{F}_p\,X, \mathrm{F}_{p-1}\,X;\mathbb{F}_2)\\ &= \bigoplus_{\operatorname{codim} W=p} \Sigma^{-p}\,\mathrm{H}^*(V;\mathbb{F}_2)\otimes_{\mathrm{H}^*(V/W;\mathbb{F}_2)} \mathrm{H}^*_{V/W}(X^W, \mathrm{Sing}_{V/W}X^W;\mathbb{F}_2)\end{aligned}$$

et en prenant pour cobord le connectant de la triade $(\mathrm{F}_{p+1}\,X, \mathrm{F}_p\,X, \mathrm{F}_{p-1}\,X)$. Décryptons un peu la notation. Les notations $\mathrm{H}^*_V(-;\mathbb{F}_2)$ et $\mathrm{H}^*(V;\mathbb{F}_2)$ désignent respectivement la cohomologie V-équivariante modulo 2 et la cohomologie modulo 2 du groupe V. Si $E = (E^m)_{m\in\mathbb{Z}}$ est un « objet » gradué et s un entier relatif alors $\Sigma^s E$ désigne l'objet gradué $(E^{m-s})_{m\in\mathbb{Z}}$. Ci-dessus X^W est considéré comme un V/W-espace et $\mathrm{H}^*(V/W;\mathbb{F}_2)$ est identifiée à une sous-algèbre de $\mathrm{H}^*(V;\mathbb{F}_2)$.

Le complexe $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}}\,X$ est muni d'une coaugmentation naturelle $\mathrm{H}^*_V(X;\mathbb{F}_2) =: \mathrm{C}^{-1}_{\mathrm{top}}\,X \to \mathrm{C}^0_{\mathrm{top}}\,X$; le complexe coaugmenté associé est noté $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,X$.

Notre premier résultat est le suivant :

Théorème 0.1. – *Soient V un 2-groupe abélien élémentaire et X un V-CW-complexe fini. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le $\mathrm{H}^*(V;\mathbb{F}_2)$-module $\mathrm{H}^*_V(X;\mathbb{F}_2)$ est libre.*
(ii) *Le complexe coaugmenté $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,X$ est acyclique.*

Ici deux commentaires s'imposent :

1) Le problème analogue, le 2-groupe abélien élémentaire V étant remplacé par un tore T et $\mathrm{H}^*_V(-;\mathbb{F}_2)$ par $\mathrm{H}^*_T(-;\mathbb{Q})$, est étudié en détail dans [**1**].

2) Peu de temps avant l'achèvement de la rédaction de ce mémoire est apparu le preprint de [**2**] qui traite notamment de V-espaces. Le théorème ci-dessus est un cas particulier du théorème 10.2 de cette référence (dans lequel $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,X$ est appelé *the augmented Atiyah-Bredon sequence for X*). Nous décrivons ci-après les techniques que nous employons pour démontrer le théorème 0.1. Nous reviendrons sur [**2**, Theorem 10.2] dans la dernière partie de cette introduction.

Nous démontrons l'énoncé 0.1 en exploitant les structures « linéaires » de $\mathrm{H}^*_V(-;\mathbb{F}_2)$ que nous passons en revue ci-après. La cohomologie que nous considérons dans ce mémoire (en particulier dans la suite de cette introduction) est à coefficients dans $\mathbb{F}_2$, à l'exception des sections 1, 2 et 10 dans lesquelles V est un ℓ-groupe abélien élémentaire avec ℓ un nombre premier arbitraire et où la cohomologie est à coefficients dans $\mathbb{F}_\ell$. Dans tous les cas nous allègerons $\mathrm{H}^*(-;\mathbb{F}_\ell)$ en $\mathrm{H}^*(-)$ et $\mathrm{H}^*_V(-;\mathbb{F}_\ell)$ en $\mathrm{H}^*_V(-)$; $\mathrm{H}^*(V;\mathbb{F}_\ell) = \mathrm{H}^*_V(\mathrm{point};\mathbb{F}_\ell)$ sera simplement notée H^*V.

Soit (X,Y) une paire de V-espaces. La cohomologie équivariante $\mathrm{H}^*_V(X,Y)$ est un $\mathbb{F}_2$-espace gradué. C'est un H^*V-module (au sens gradué) ; on rappelle que H^*V est isomorphe à une algèbre de polynômes, à coefficients dans $\mathbb{F}_2$, en n indéterminées, chacune de degré 1. Soit A l'algèbre de Steenrod modulo 2. La cohomologie équivariante $\mathrm{H}^*_V(X,Y)$ est un A-module et cet A-module est instable

($\mathrm{Sq}^i : \mathrm{H}_V^m(X,Y) \to \mathrm{H}_V^{m+i}(X,Y)$ est trivial pour $i > m$) ; puisque l'on a $\mathrm{H}^*V = \mathrm{H}_V^*(\text{point})$ il en est de même pour H^*V. L'application de structure

$$\mathrm{H}^*V \otimes \mathrm{H}_V^*(X,Y) \to \mathrm{H}_V^*(X,Y)$$

est A-linéaire ; on rappelle que la structure d'algèbre de Hopf de A fait du produit tensoriel de deux A-modules (resp. A-modules instables) un A-module (resp. A-module instable). On dit que $\mathrm{H}_V^*(X,Y)$ est un H^*V-A-module instable ; la catégorie de ces objets est notée V-$\mathcal{U}$ (la catégorie des A-modules instables est elle notée $\mathcal{U}$). Si (X,Y) est une paire de V-CW-complexes finis alors $\mathrm{H}_V^*(X,Y)$ est de type fini comme H^*V-module ; la sous-catégorie pleine de V-$\mathcal{U}$ dont les objets sont les H^*V-A-modules instables qui sont de type fini comme H^*V-modules est notée V_{tf}-$\mathcal{U}$.(1)

Le complexe algébrique

Nous décrivons maintenant un complexe de cochaînes uniquement défini en fonction du H^*V-A-module instable H_V^*X.

Le complexe $\mathrm{C}_{\mathrm{top}}^\bullet X$ n'est rien d'autre que le terme E_1 de la suite spectrale convergeant vers H_V^*X définie par la filtration V-équivariante de X introduite plus haut. La filtration décroissante de H_V^*X associée, disons

$$\mathrm{H}_V^*X = \mathrm{F}_{(1)}^0 \supset \mathrm{F}_{(1)}^1 \supset \cdots \supset \mathrm{F}_{(1)}^n \supset \mathrm{F}_{(1)}^{n+1} = 0,$$

est définie par

$$\mathrm{F}_{(1)}^p\mathrm{H}_V^*X := \ker\left(\mathrm{H}_V^*X \to \mathrm{H}_V^*\mathrm{F}_{p-1}\,X\right)$$

pour $0 \le p \le n+1$. On peut définir une seconde filtration de H_V^*X, variante de la précédente, en posant

$$\mathrm{F}_{(2)}^p\mathrm{H}_V^*X := \bigcap_{\operatorname{codim} W < p} \ker\left(\mathrm{H}_V^*X \to \mathrm{H}_V^*X^W\right) ;$$

on observera que l'on a $\mathrm{F}_{(1)}^p\mathrm{H}_V^*X \subset \mathrm{F}_{(2)}^p\mathrm{H}_V^*X$ pour tout p.

Supposons à présent que X est un V-CW-complexe fini. Dans ce cas cette seconde filtration peut être définie « algébriquement » en termes de la structure de H^*V-A-module instable de H_V^*X. Précisons un peu. Soient $W \subset V$ un sous-groupe et $\mathrm{Fix}_{(V,W)} : V\text{-}\mathcal{U} \to V/W\text{-}\mathcal{U}$ « le » foncteur adjoint à gauche du foncteur « extension des scalaires » $V/W\text{-}\mathcal{U} \to V\text{-}\mathcal{U}, N \mapsto \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N$ (pour un « primer » sur les foncteurs Fix voir la section 1) ; l'homomorphisme $\mathrm{Fix}_{(V,W)}\mathrm{H}_V^*X \to \mathrm{H}_{V/W}^*X^{\mathrm{W}}$ adjoint de l'homomorphisme de H^*V-A-modules instables $\mathrm{H}_V^*X \to \mathrm{H}_V^*X^{\mathrm{W}} = \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{H}_{V/W}^*X^{\mathrm{W}}$ induit par l'inclusion $i : X^W \to X$ est un isomorphisme et l'unité d'adjonction

$$\eta_{(V,W)} : \mathrm{H}_V^*X \to \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)}\mathrm{H}_V^*X$$

(1) Dans l'article [33] la catégorie des H^*V-A-modules instables (resp. des H^*V-A-modules instables de type fini comme H^*V-modules) est notée H^*V-$\mathcal{U}$ (resp. $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-$\mathcal{U}$). La seule justification de la notation adoptée dans ce mémoire est d'obtenir des formulations plus compactes.

s'identifie à $\mathrm{H}_V^* i$ (voir 1.1). On est donc amené à introduire, pour tout H^*V-A-module instable M, une filtration décroissante (par des sous-H^*V-A-modules instables)

$$M = \mathrm{F}^0 M \supset \mathrm{F}^1 M \supset \cdots \supset \mathrm{F}^n M \supset \mathrm{F}^{n+1} M = 0$$

en posant

$$\mathrm{F}^p M := \bigcap_{\operatorname{codim} W < p} \ker\left(\eta_{(V,W)} : M \to \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)} M\right)$$

telle que l'on a $\mathrm{F}^p_{(2)} \mathrm{H}_V^* X = \mathrm{F}^p \mathrm{H}_V^* X$. On constate que $\mathrm{F}^1 M$ et $\mathrm{F}^n M$ peuvent être définis en termes de la structure de H^*V-module de M : $\mathrm{F}^1 M$ est la H^*V-torsion et $\mathrm{F}^n M$ est constitué des éléments annulés par une puissance de l'idéal d'augmentation $\widetilde{\mathrm{H}}^* V$. Nous montrerons que toute la filtration $(\mathrm{F}^p M)_{0 \leq p \leq n+1}$ peut être en fait définie en termes de la structure de H^*V-module de M : c'est la « filtration par la codimension du support » (voir section 9). On observera que si M est de type fini comme H^*V-module alors $\mathrm{F}^n M$ est le plus grand sous-H^*V-module fini de M ; nous le noterons $\mathrm{Pf}_V M$ (Pf pour « partie finie »).

Disposant de la filtration décrite ci-dessus, on définit un complexe de cochaines $\mathrm{C}^\bullet M$ de la façon suivante. Soit $M \to I^\bullet$ une résolution injective de M dans la catégorie V-$\mathcal{U}$; on pose $\mathrm{C}^p M = \mathrm{H}^p(\mathrm{F}^p I^\bullet / \mathrm{F}^{p+1} I^\bullet)$ et on prend pour cobord le connectant évident. À nouveau $\mathrm{C}^\bullet M$ est muni d'une coaugmentation naturelle $M := \mathrm{C}^{-1} M \to \mathrm{C}^0 M$; le complexe coaugmenté associé est noté $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet M$. Supposons M de type fini comme H^*V-module ; on constate que $\mathrm{C}^p M$ vérifie alors une formule analogue à celle que nous avons donnée plus haut pour $\mathrm{C}^p_{\mathrm{top}} X$:

$$\mathrm{C}^p M = \bigoplus_{\operatorname{codim} W = p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{R}^p \mathrm{Pf}_{V/W}\left(\mathrm{Fix}_{(V,W)} M\right).$$

Expliquons la notation. Si M est de type fini comme H^*V-module alors il en est de même pour $\mathrm{Fix}_{(V,W)} M$ comme H^*V/W-module ; $\mathrm{R}^p \mathrm{Pf}_{V/W}$ désigne le p-ième foncteur dérivé à droite de l'endofoncteur $\mathrm{Pf}_{V/W}$ de V/W_{tf}-$\mathcal{U}$.

Notre deuxième résultat est le suivant :

Théorème 0.2. – *Soient V un 2-groupe abélien élémentaire et M un H^*V-A-module instable qui est de type fini comme H^*V-module. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le H^*V-module M est libre.*
(ii) *Le complexe coaugmenté $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet M$ est acyclique.*

Posons $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{alg}} X := \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet \mathrm{H}_V^* X$; les deux complexes $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}} X$ et $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{alg}} X$ sont reliés :

Proposition 0.3. – *Soient V un 2-groupe abélien élémentaire et X un V-CW-complexe fini.*

(a) *Il existe un homomorphisme de complexes de cochaînes coaugmentés*

$$\varkappa : \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{alg}} X \longrightarrow \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}} X$$

tel que $\varkappa^p$ *est un homomorphisme de* H^*V*-*A*-modules pour* $-1 \leq p \leq n$ *(et l'identité pour* $p = -1$*).*

(b) *Si le* H^*V*-module* $\mathrm{H}^*_V X$ *est libre alors* $\varkappa$ *est un isomorphisme.*

Le lecteur notera que l'adjectif « instable » n'apparaît pas à la fin de l'énoncé du point (a) ci-dessus ; en effet le A-module $\mathrm{C}^p_{\mathrm{top}}\, X$ n'est pas *a priori* instable pour $p > 0$. Cependant le point (b) implique :

Scholie 0.4. – *Soient* V *un* 2*-groupe abélien élémentaire et* X *un* V*-CW-complexe fini. Si* $\mathrm{H}^*_V X$ *est libre comme* H^*V*-module alors le* A*-module* $\mathrm{C}^p_{\mathrm{top}}\, X$ *est instable pour tout* p*.*

Illustrations

Nous illustrons les énoncés 0.1, 0.2 et 0.3 en considérant des représentations linéaires réelles d'un 2-groupe abélien élémentaire $V \simeq (\mathbb{Z}/2)^n$.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie m muni d'une action linéaire de V. Soient f la dimension du sous-espace invariant E^V et $\mathrm{w}_{m-f}(E)$ la $(m-f)$-ième classe de Stiefel-Whitney de E ($\mathrm{w}_{m-f}(E)$ appartient à $\mathrm{H}^{m-f}\, V$ et est un produit d'éléments de $\mathrm{H}^1 V - \{0\}$).

L'isomorphisme de Thom fournit un isomorphisme de H^*V-A-modules instables $\mathrm{H}^*_V(E, E - \{0\}) \cong \Sigma^f\, \mathrm{w}_{m-f}(E)\, \mathrm{H}^*V$; $\mathrm{H}^*_V(E, E - \{0\})$ est donc un exemple de H^*V-A-module instable qui est libre de dimension de dimension 1 comme H^*V-module. En fait, un résultat de J-P. Serre [**40**, §2, corollaire] (voir 9.14) implique que la correspondance $E \mapsto \mathrm{H}^*_V(E, E - \{0\})$ induit une bijection entre classes d'isomorphisme de représentations linéaires réelles (de dimension finie) de V et classes d'isomorphisme de H^*V-A-modules instables qui sont libres de dimension 1 comme H^*V-modules (voir 7.6).

Supposons que E est un espace euclidien et que V agit par isométries ; on a d'après ce qui précède $\mathrm{H}^*_V(\mathrm{D}(E), \mathrm{S}(E)) \cong \Sigma^f\, \mathrm{w}_{m-f}(E)\, \mathrm{H}^*V$ (les notations $\mathrm{D}(-)$ et $\mathrm{S}(-)$ désignent respectivement la boule et la sphère unité d'un espace euclidien), soit encore $\mathrm{H}^*_V \mathrm{S}(E \oplus \mathbb{R}_0) \cong \Sigma^f\, \mathrm{w}_{m-f}(E)\, \mathrm{H}^*V \oplus \mathrm{H}^*V$ ($\mathbb{R}_0$ désigne l'espace euclidien $\mathbb{R}$ muni de l'action triviale de V).

Le théorème 0.1 (en prenant $X = \mathrm{S}(E \oplus \mathbb{R}_0)$), le théorème 0.2 et la proposition 0.3 conduisent par exemple à l'énoncé suivant :

Proposition 0.5. – *Soit* $E_{\text{rég}}$ *le plus grand ouvert de* E *sur lequel l'action de* V *est libre et* $V \backslash E_{\text{rég}}$ *le quotient de cette action (*$V \backslash E_{\text{rég}}$ *est une variété de classe* C^∞*).*

On a un isomorphisme canonique de H^*V*-*A*-modules instables*

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(V \backslash E_{\text{rég}}) \cong \Sigma^{f+n}\, \mathrm{R}^n \mathrm{Pf}_V\, (\mathrm{w}_{m-f}(E)\, \mathrm{H}^*V).$$

(La notation $\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}$ désigne ici la cohomologie modulo 2 à support compact.)

L'ouvert $E_{\text{rég}}$ est le complémentaire d'un ensemble de sous-espaces vectoriels et l'étude de la cohomologie des espaces du type $V\backslash E_{\text{rég}}$ a fait l'objet de nombreuses recherches ; Nguyen Dang Ho Hai nous a signalé à ce sujet les références **[14]** et **[12]**.

Nous explorons plus en détails le cas $E = \widetilde{\mathbb{R}}[V]^{\oplus h}$, en clair le cas où E est la somme directe de h copies de la représentation régulière réelle réduite de V ; on a alors $E^V = 0$, $\dim E = h\,(2^n - 1)$ et $\mathrm{w}_{h\,(2^n-1)} = \mathrm{c}_V^h$, ($\mathrm{c}_V$ désignant le produit des éléments de $\mathrm{H}^1 V - \{0\}$). On a :

$$\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\, \mathrm{S}(E \oplus \mathbb{R}_0) \;\cong\; \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{alg}}\, \mathrm{S}(E \oplus \mathbb{R}_0) \;\cong\; \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}(\mathrm{c}_V^h \mathrm{H}^* V) \oplus \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}(\mathrm{H}^* V)\,;$$

les complexes ci-dessus (qui sont des complexes de cochaînes dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$) sont acycliques d'après 0.1 ou 0.2, le premier isomorphisme est donné par 0.3. La spécificité de ces exemples tient à ce que les deux complexes de gauche sont naturellement munis d'une action (à droite) du groupe $\mathrm{GL}(V)$, que l'isomorphisme $\varkappa$ de 0.3 est équivariant et que l'action respecte la décomposition en somme directe de droite. Posons

$$\mathrm{M}(V,h) := \mathrm{R}^n \mathrm{Pf}_V\,(\mathrm{c}_V^h \mathrm{H}^* V)\,(\cong \mathrm{C}^n(\mathrm{c}_V^h \mathrm{H}^* V) \cong \Sigma^{-n} \mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(V\backslash \widetilde{\mathbb{R}}[V]^{\oplus h}_{\text{rég}}))\,;$$

nous montrons que $(\mathrm{M}(V,h))^0$ (le sous-espace des éléments de degré 0 de $\mathrm{M}(V,h)$) est isomorphe comme $\mathbb{F}_2[\mathrm{GL}(V)]$-module à droite à la duale St_V^*, de la représentation de Steinberg modulo 2 de $\mathrm{GL}(V)$ (voir 8.1) et que $\mathrm{M}(V,h)$ est engendré comme H^*V-module par $(\mathrm{M}(V,h))^0$.

Comme St_V^* est un objet projectif de la catégorie des $\mathbb{F}_2[\mathrm{GL}(V)]$-modules à droite, le foncteur $\mathrm{Hom}_{(\mathbb{F}_2[\mathrm{GL}(V)])^{\mathrm{op}}}(\mathrm{St}_V^*, -) =: \mathrm{e}_V^{\mathrm{St}}(-)$ est exact, si bien que l'on peut obtenir de nouveaux complexes acycliques (dans la catégorie $\mathcal{U}$), en appliquant ce foncteur aux complexes ci-dessus. Le cas $h = 2$ de ce programme est intimement relié au récent article **[19]** de Nguyen Dang Ho Hai dans lequel il obtient, à l'aide d'un résultat d'Inoue **[27]**, le « dual de Poincaré » de l'isomorphisme de A-modules instables suivant

$$\mathrm{e}_V^{\mathrm{St}}\,(\Sigma^{-n}\, \mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(V\backslash \widetilde{\mathbb{R}}[V]^{\oplus 2}_{\text{rég}})) \;\cong\; \bigoplus_{0 \le i \le n} \mathrm{J}(2^i - 1)$$

(la notation $\mathrm{J}(k)$, k entier naturel, désigne « le k-ième $\mathcal{U}$-injectif de Brown-Gitler », voir le début de la section 2 : $\mathrm{J}(k) = \mathrm{J}_0(k)$). Ceci doit permettre de faire le lien entre les complexes acycliques $\mathrm{e}_V^{\mathrm{St}}(\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}(\mathrm{c}_V^2 \mathrm{H}^* V))$ et les résolutions injectives minimales de **[20]**.

Sur le théorème 10.2 de [2]

Avant d'énoncer une version édulcorée du théorème en question, nous rappelons la notion de j-syzygie (dans le cas particulier qui nous intéresse) :

Définition 0.6. – *Soient M un H^*V-module $\mathbb{N}$-gradué et $j \geq 0$ un entier. On dit que M est une* H^*V-j-syzygie, H^*V-j-syzygie *s'il existe une suite exacte de H^*V-modules $\mathbb{N}$-gradués*

$$0 \to M \to L^0 \to L^1 \to \cdots \to L^{j-1}$$

avec $L^0, L^1, \dots, L^{j-1}$ *libres (on convient que tout* M *est une* H^*V-0-*syzygie).*

THÉORÈME 0.7 (Allday, Franz et Puppe [**2**]). – *Soient* V *un* 2*-groupe abélien élémentaire,* X *un* V*-*CW*-complexe fini et* $j \geq 0$ *un entier. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *le* H^*V*-module sous-jacent à* $\mathrm{H}^*_V X$ *est une* H^*V*-*j*-syzygie ;*
(ii) *on a* $\mathrm{H}^p\,\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}X = 0$ *pour* $p \leq j-2$.

Ce théorème est bien une généralisation du théorème 0.1 :

Pour $j = n$ la propriété (i) ci-dessus coïncide avec la propriété (i) de 0.1 (voir le scholie 5.23) ; la propriété (ii) ci-dessus implique quant à elle la propriété (ii) de 0.1 grâce à un lemme facile [**1**, Lemma 5.6] (lemme 4.13 dans le cas qui nous occupe).

Allday, Franz et Puppe obtiennent le théorème 0.7 à l'aide de résultats d'algèbre commutative concernant la catégorie des H^*V-modules $\mathbb{N}$-gradués. L'article [**2**] fait d'ailleurs suite à l'article [**1**] où le rôle de l'algèbre de polynômes $\mathbb{F}_2[U_1, U_2, \dots, U_n]$ ($\simeq \mathrm{H}^*V$) était tenu par l'algèbre de polynômes $\mathbb{Q}[T_1, T_2, \dots, T_n]$ ($\simeq \mathrm{H}^*(\mathrm{B}T; \mathbb{Q})$, T tore de rang n).

Nous démontrons une version du théorème 0.7 (théorème 0.9 ci-dessous) en utilisant, comme pour le théorème 0.1, la théorie des H^*V-A-modules instables (sous-produit des recherches sur la conjecture de Sullivan) et plus précisément la théorie des H^*V-A-modules instables qui sont de type fini comme H^*V-modules. En fait la structure des H^*V-A-modules instables qui sont de type fini comme H^*V-modules est beaucoup plus accessible que celle des H^*V-modules $\mathbb{N}$-gradués de type fini généraux (voir la section 9 et en particulier la sous-section 9.3).

Avant d'énoncer le théorème 0.9 nous devons introduire une définition :

DÉFINITION 0.8. – *Soient* M *un* H^*V-A*-module instable de type fini comme* H^*V*-module et* $j \geq 0$ *un entier. Nous dirons que* M *est une* $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$*-*$j$-syzygie, $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$*-*$j$-syzygie *s'il existe une suite exacte dans la catégorie* $V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$

$$0 \to M \to L^0 \to L^1 \to \cdots \to L^{j-1}$$

avec $L^0, L^1, \dots, L^{j-1}$ *libres comme* H^*V*-modules (nous convenons que tout* M *est une* $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$-0-*syzygie).*

THÉORÈME 0.9. – *Soient* V *un* 2*-groupe abélien élémentaire,* X *un* V*-*CW*-complexe fini et* $j \geq 0$ *un entier. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{H}^*_V X$ *est une* $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$*-*$j$*-syzygie ;*
(ii) *le* H^*V*-module sous-jacent à* $\mathrm{H}^*_V X$ *est une* H^*V*-*j*-syzygie ;*
(iii) *on a* $\mathrm{H}^p\,\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}X = 0$ *pour* $p \leq j-2$.

Ce théorème est essentiellement conséquence de sa version algébrique :

THÉORÈME 0.10. – *Soient* M *un* H^*V-A*-module instable qui est de type fini comme* H^*V*-module et* $j \geq 0$ *un entier. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) M *est une* $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$*-*$j$*-syzygie ;*

(ii) *le* H^*V*-module sous-jacent à* M *est une* H^*V*-*j*-syzygie ;*
(iii) *on a* $\mathrm{H}^p\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet M = 0$ *pour* $p \leq j-2$.

et de la généralisation suivante du point (b) de la proposition 0.3 :

Proposition 0.11. – *Soient* V *un 2-groupe abélien élémentaire,* X *un* V*-CW-complexe fini et* $j \geq 0$ *un entier. Si le* H^*V*-module sous-jacent à* $\mathrm{H}^*_V X$ *est une* H^*V*-*j*-syzygie, alors l'homomorphisme de* H^*V*-*A*-modules*

$$\varkappa^p : \widetilde{\mathrm{C}}^p_{\mathrm{alg}}\,X \longrightarrow \widetilde{\mathrm{C}}^p_{\mathrm{top}}\,X$$

est un isomorphisme pour $p \leq j$.

L'implication (ii)⇒(i) du théorème 0.10 est assez piquante. Nous montrons en fait un énoncé plus précis :

Proposition 0.12. – *Soient* M *un* H^*V*-*A*-module instable qui est de type fini comme* H^*V*-module et* $j \geq 1$ *un entier.*

Il existe un complexe de cochaînes coaugmenté dans la catégorie V_{tf}*-*$\mathcal{U}$

$$\widetilde{\mathrm{L}}^\bullet_j M = (M \to \mathrm{L}^0_j M \to \mathrm{L}^1_j M \to \cdots \to \mathrm{L}^{j-1}_j M),$$

dépendant fonctoriellement de M*, qui vérifie la propriété suivante :*

Si le H^*V*-module sous-jacent à* M *est une* H^*V*-*j*-syzygie alors* $\widetilde{\mathrm{L}}^\bullet_j M$ *est acyclique et les* H^*V*-modules sous-jacents aux* $\mathrm{L}^k_j M$*,* $0 \leq k \leq j-1$*, sont libres.*

(Pour une explicitation du complexe $\widetilde{\mathrm{L}}^\bullet_j M$, voir la proposition 5.32, la remarque 5.33 et la sous-section 8.4.)

Nous obtenons la proposition ci-dessus par des techniques d'algèbre homologique. Précisons un peu. Soit $\mathcal{W}$ l'ensemble des sous-espaces W de V ; $\mathcal{W}$ est ordonné par inclusion et peut donc être vu comme une catégorie. Nous considérons la catégorie des foncteurs définis sur $\mathcal{W}$ et à valeurs dans la catégorie $\mathcal{E}$ des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels. L'outil principal qui nous permet d'arriver à un énoncé du type 0.12 est l'explicitation d'une résolution injective, dans la catégorie abélienne $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$, d'un objet arbitraire (sous-section 8.2).

On observera au passage (remarque 8.43) que les techniques évoquées ci-dessus apportent un nouvel éclairage sur le complexe $\mathrm{C}^\bullet M$.

Remerciements. – Dorra Bourguiba, Jean Lannes et Saïd Zarati tiennent à remercier la Société Mathématique de Tunisie dont les congrès annuels ont contribué à la maturation de ce travail.

Jean Lannes et Saïd Zarati ont bénéficié du programme Recherches en Binôme du CIRM.

Jean Lannes a bénéficié de l'hospitalité du CMLS.

Lionel Schwartz a bénéficié du soutien du VIASM (Hanoï) lors de plusieurs visites ces dernières années, en particulier à l'automne 2019, visites durant lesquelles il a travaillé sur le contenu de ce mémoire.

Enfin, les quatre auteurs remercient le rapporteur pour sa lecture approfondie et ses recommandations judicieuses.

Dédicace. – Nous dédions ce mémoire à notre collègue et ami Michel Zisman qui nous a quittés peu avant sa parution.

CHAPITRE 1

RAPPELS SUR LA THÉORIE DES FONCTEURS Fix

Soient ℓ un nombre premier (il n'y a aucune raison dans cette section de se limiter au cas $\ell = 2$), V un ℓ-groupe abélien élémentaire et $W \subset V$ un sous-groupe ; l'homomorphisme canonique, $q : V \to V/W$, induit un homomorphisme (injectif) de A-algèbres instables $q^* : \mathrm{H}^*V/W \to \mathrm{H}^*V$. La notation A désigne ici l'algèbre de Steenrod modulo ℓ, la cohomologie modulo ℓ d'un espace est le type même d'une A-algèbre instable, pour une définition explicite de la catégorie $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{K}$) des A-modules instables (resp. A-algèbres instables) voir par exemple [**31**, 1.7.1 (resp. 1.7.2)] ; rappelons que nous avons convenu d'abréger la notation $\mathrm{H}^*(-;\mathbb{F}_\ell)$ en H^*. On note

$$\mathrm{Fix}_{(V,W)} : V\text{-}\mathcal{U} \to V/W\text{-}\mathcal{U}$$

« le » foncteur adjoint à gauche du foncteur « extension des scalaires »

$$V/W\text{-}\mathcal{U} \to V\text{-}\mathcal{U},\ N \mapsto \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N$$

(pour des commentaires concernant les guillemets qui entourent l'article défini voir 1.9 et 1.10, la notation V-$\mathcal{U}$ est la généralisation évidente de celle introduite pour $\ell = 2$). On a donc, par définition,

$$\mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathcal{U}}(M, \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N) \cong \mathrm{Hom}_{V/W\text{-}\mathcal{U}}(\mathrm{Fix}_{(V,W)}M, N),$$

pour tout H^*V-A-module instable M et tout H^*V/W-A-module instable N.

Les foncteurs $\mathrm{Fix}_{(V,W)}$ sont introduits et étudiés dans [**34**] (ce sont des avatars des foncteurs $\mathrm{Fix}_{V',V''}$, définis pour $V = V' \oplus V''$, introduits et étudiés dans [**33**]). Le foncteur $\mathrm{Fix}_{(V,V)} : V\text{-}\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ est aussi noté Fix_V dans [**33**]. Ce foncteur est introduit et étudié dans [**31**] (où il est d'ailleurs simplement noté Fix). On rappelle ci-dessous l'origine de cette notation.

Soit X un espace muni d'une action de V. Soient $\underline{X}$ l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(\mathrm{E}V, X)$ et $\mathrm{i} : X \to \underline{X}$ l'application induite par l'application $\mathrm{E}V \to \mathrm{pt}$; on observera que l'inclusion i est une équivalence d'homotopie. L'action de V, au but et à la source, munit $\mathbf{hom}(\mathrm{E}V, X)$ d'une action de $V \times V^{\mathrm{op}}$ et induit *via* l'homomorphisme $V \to V \times V^{\mathrm{op}}, v \mapsto (v, v^{-1})$, une action de V sur $\underline{X}$ telle que i est V-équivariante. On observera également que $\mathrm{H}^*_V\mathrm{i} : \mathrm{H}^*_V\underline{X} \to \mathrm{H}^*_V X$ est un isomorphisme. L'espace $(\underline{X})^V (= \mathbf{hom}_V(\mathrm{E}V, X))$ est appelé l'espace des points fixes homotopiques de l'action de V sur X et noté $X^{\mathrm{h}V}$.

L'inclusion $X^V \hookrightarrow X$ induit un homomorphisme de H^*V-A-modules instables $\mathrm{H}^*_V X \to \mathrm{H}^*_V X^V = \mathrm{H}^*V \otimes \mathrm{H}^*X^V$ et par adjonction un homomorphisme de H^*V-A-modules instables $\nu_X : \mathrm{Fix}_V \mathrm{H}^*_V X \to \mathrm{H}^*X^V$. On note λ_X l'homomorphisme composé

$$\mathrm{Fix}_V \mathrm{H}^*_V X \xrightarrow[\cong]{(\mathrm{Fix}_V(\mathrm{H}^*_V \mathrm{i}))^{-1}} \mathrm{Fix}_V \mathrm{H}^*_V \underline{X} \xrightarrow{\nu_{\underline{X}}} \mathrm{H}^*(\underline{X})^V = \mathrm{H}^*X^{\mathrm{h}V}.$$

On montre dans [**31**, Chap. 4] que λ_X est en fait sous-jacent à un homomorphisme de A-algèbres instables qui est « souvent » un isomorphisme.

Pareillement, on définit un homomorphisme de H^*V/W-A-modules instables

$$\nu_X : \mathrm{Fix}_{(V,W)} \mathrm{H}^*_V X \to \mathrm{H}^*_{V/W} X^W$$

comme adjoint de l'homomorphisme $\mathrm{H}^*_V X \to \mathrm{H}^*_V X^W \cong \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{H}^*_{V/W} X^W$ induit par l'inclusion $X^W \hookrightarrow X$. (*Mutatis mutandis* on peut définir une transformation naturelle $\lambda_X : \mathrm{Fix}_{(V,W)} \mathrm{H}^*_V X \to \mathrm{H}^*_{V/W} X^{\mathrm{h}W}$ qui vérifie des propriétés analogues à celles que l'on a pour $W = V$.)

Proposition 1.1. – *Si X est un V-CW-complexe fini alors l'homomorphisme*

$$\nu_X : \mathrm{Fix}_{(V,W)} \mathrm{H}^*_V X \to \mathrm{H}^*_{V/W} X^W$$

est un isomorphisme.

Scholie 1.2. – *Soit X un V-CW-complexe fini. L'unité d'adjonction*

$$\mathrm{H}^*_V X \to \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)} \mathrm{H}^*_V X$$

s'identifie à l'homomorphisme de H^*V-A-modules instables $\mathrm{H}^*_V X \to \mathrm{H}^*_V X^W$.

Démonstration. – « Abstract nonsense ». Soient M un H^*V-A-module instable, N un H^*V/W-A-module instable, $f : M \to \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N$ un homomorphisme et $\widetilde{f} : \mathrm{Fix}_{(V,W)} M \to N$ son adjoint, alors f est le composé de l'unité d'adjonction $M \to \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)} M$ et de l'homomorphisme $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \widetilde{f}$. □

La démonstration de la proposition 1.1 est renvoyée à la fin de cette section. Avant cela nous rappelons, de manière assez détaillée et relativement « self-contained », la théorie (algébrique) des foncteurs Fix. C'est en fait un sous-produit de celle des foncteurs T pour laquelle nous renvoyons à [**31**]. La présentation que nous en donnons ci-après est légèrement différente de celle de [**33**], [**34**] et [**31**, Chap. 4] (pour le cas $W = V$) ; le lecteur est invité à la comparer à [**16**, §2].

On commence par quelques observations très simples concernant le produit fibré $V \underset{V/W}{\times} V$ de deux copies de V au-dessus de V/W (en clair, le sous-groupe de $V \times V$ constitué des couples (z,t) avec $z \equiv t \bmod W$) ; on observe que l'homomorphisme canonique de A-algèbres instables

$$\mathrm{H}^*V \underset{\mathrm{H}^*V/W}{\otimes} \mathrm{H}^*V \to \mathrm{H}^*(V \underset{V/W}{\times} V)$$

est un isomorphisme. On observe également que l'homomorphisme de groupes $\iota : W \oplus V \to V \underset{V/W}{\times} V, (x,y) \mapsto (x+y,y)$ est un isomorphisme. On a donc un isomorphisme canonique de A-algèbres instables

$$\mathrm{H}^*V \underset{\mathrm{H}^*V/W}{\otimes} \mathrm{H}^*V \cong \mathrm{H}^*W \otimes \mathrm{H}^*V.$$

Scholie 1.3. – *Soient* $\varphi : \mathrm{H}^*V \to \mathrm{H}^*W \otimes \mathrm{H}^*V$ *l'homomorphisme de* A-*algèbres instables induit par l'application linéaire* $W \oplus V \to V, (x,y) \mapsto x+y$ *et* N *un* H^*V-A-*module instable, alors on a un isomorphisme canonique de* H^*V-A-*modules instables, naturel en* N,

$$\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N \cong \mathrm{H}^*W \otimes N,$$

$\mathrm{H}^*W \otimes N$ *étant un* H^*V-*module via* φ.

Démonstration. – Soient α et β les deux homomorphismes $V \underset{V/W}{\times} V \to V$ respectivement induits par la première et seconde projection. On constate que l'on a des isomorphismes canoniques de H^*V-A-modules instables

$$\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N \cong (\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{H}^*V) \otimes_{\mathrm{H}^*V} N,$$

$\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{H}^*V$ étant un H^*V-module à gauche *via* α^* et un H^*V-module à droite *via* β^*. On a donc d'après ce qui précède

$$\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N \cong (\mathrm{H}^*W \otimes \mathrm{H}^*V) \otimes_{\mathrm{H}^*V} N,$$

$\mathrm{H}^*W \otimes \mathrm{H}^*V$ étant un H^*V-module à gauche *via* $(\alpha \circ \iota)^*$, c'est-à-dire l'homomorphisme de A-algèbres instables induit par l'application linéaire $W \oplus V \to V, (x,y) \mapsto x+y$, et un H^*V-module à droite *via* $(\beta \circ \iota)^*$, c'est-à-dire l'homomorphisme de A-algèbres instables induit par la projection $W \oplus V \to V$. $\square$

On rappelle que l'on note $\mathrm{T}_W : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ l'adjoint à gauche du foncteur $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $N \mapsto \mathrm{H}^*W \otimes N$ (T_W est « canonisé » dans [**31**], d'où l'article défini). Soit M un A-module instable ; comme T_W « préserve les produits tensoriels », $\mathrm{T}_W M$ est naturellement un $\mathrm{T}_W\mathrm{H}^*V$-A-module instable. Le scholie ci-dessus entraîne :

Proposition 1.4. – *Soient* M *et* N *deux* H^*V-A-*modules instables. On a un isomorphisme, naturel en* M *et* N,

$$\mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathcal{U}}(M, \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N) \cong \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathcal{U}}(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{T}_W\mathrm{H}^*V} \mathrm{T}_W M, N),$$

H^*V *étant dans le membre de droite un* $\mathrm{T}_W\mathrm{H}^*V$-*module via l'homomorphisme de* A-*algèbres instables* $\widetilde{\varphi} : \mathrm{T}_W\mathrm{H}^*V \to \mathrm{H}^*V$ *adjoint de* φ. *En d'autres termes le foncteur* $V\text{-}\mathcal{U} \to V\text{-}\mathcal{U}, M \mapsto \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{T}_W\mathrm{H}^*V} \mathrm{T}_W M$ *est un adjoint à gauche du foncteur* $V\text{-}\mathcal{U} \to V\text{-}\mathcal{U}, N \mapsto \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N$.

Démonstration. – On a

$$\mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathcal{U}}(M, \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N) \cong \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathcal{U}}(M, \mathrm{H}^*W \otimes N)$$

d'après 1.3. Or l'inclusion $\mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathcal{U}}(M, \mathrm{H}^*W \otimes N) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, \mathrm{H}^*W \otimes N)$ s'identifie par adjonction à l'inclusion

$$\mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathcal{U}}(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{T}_W \mathrm{H}^*V} \mathrm{T}_W M, N) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathrm{T}_W M, N).$$

On s'en convainc grâce à [**33**, proposition 1.3.1] : faire $K = L = \mathrm{H}^*V$, $E = W$ et prendre pour $\varphi : K \to \mathrm{H}^*E \otimes L$ l'homomorphisme de A-algèbres instables que l'on a intentionnellement noté φ dans 1.3. □

L'endofoncteur de la catégorie V-$\mathcal{U}$

$$M \mapsto \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{T}_W \mathrm{H}^*V} \mathrm{T}_W M$$

(H^*V étant un $\mathrm{T}_W\mathrm{H}^*V$-module *via* l'adjoint de φ), qui apparaît dans la proposition 1.4, jouera un rôle important dans ce mémoire ; pour alléger nous le noterons $\mathrm{EFix}_{(V,W)}$. Cette notation entend suggérer le lien avec le foncteur $\mathrm{Fix}_{(V,W)}$ que nous précisons ci-après ([**34**, proposition 3.1]). (Dans [**16**], $\mathrm{EFix}_{(V,W)}M$ est noté $\mathrm{T}^W_{i^*}M$, $i^* : \mathrm{H}^*V \to \mathrm{H}^*W$ désignant l'homomorphisme de A-algèbres instables induit par l'inclusion i de W dans V.)

PROPOSITION-DÉFINITION 1.5. – *Soit M un* H^*V-A-*module instable ; on a un isomorphisme de* H^*V-A-*modules instables, naturel en M*

$$\mathrm{EFix}_{(V,W)}M \cong \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)}M.$$

En d'autres termes on a un isomorphisme naturel, entre endofoncteurs de V-$\mathcal{U}$,

$$\mathrm{EFix}_{(V,W)} \cong \mathrm{e}_{(V,W)} \circ \mathrm{Fix}_{(V,W)},$$

$\mathrm{e}_{(V,W)} : V/W\text{-}\mathcal{U} \to V\text{-}\mathcal{U}$ *désignant le foncteur* $N \mapsto \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N$.

Démonstration. – Soit $\mathrm{E}_{(V,W)} : V\text{-}\mathcal{U} \to V\text{-}\mathcal{U}$ le foncteur $N \mapsto \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N$; la proposition 1.4 dit que $\mathrm{EFix}_{(V,W)}$ est adjoint à gauche de $\mathrm{E}_{(V,W)}$. On a un isomorphisme naturel, entre endofoncteurs de V-$\mathcal{U}$,

$$\mathrm{E}_{(V,W)} \cong \mathrm{e}_{(V,W)} \circ \mathcal{O}_{(V,W)},$$

$\mathcal{O}_{(V,W)} : V\text{-}\mathcal{U} \to V/W\text{-}\mathcal{U}$ désignant le foncteur oubli évident. Comme les foncteurs $\mathrm{Fix}_{(V,W)} : V\text{-}\mathcal{U} \to V/W\text{-}\mathcal{U}$ et $\mathrm{e}_{(V,W)} : V/W\text{-}\mathcal{U} \to V\text{-}\mathcal{U}$ sont respectivement adjoints à gauche des foncteurs $\mathrm{e}_{(V,W)}$ et $\mathcal{O}_{(V,W)}$, on a un isomorphisme naturel $\mathrm{EFix}_{(V,W)} \cong \mathrm{e}_{(V,W)} \circ \mathrm{Fix}_{(V,W)}$ (spécialisation de [**37**, Chap. IV, §8, Theorem 1], noter l'ordre des facteurs dans la composition ci-dessus !). □

REMARQUE 1.6. – Pour $W = V$ l'isomorphisme naturel de 1.5 est celui de la proposition 4.5 de [**31**]. La démonstration que nous en donnons ci-dessus est plus directe que celle de [**31**] qui imite la démonstration de la proposition « topologique » 4.2 de cette référence.

Nous dégageons incidemment une variante de la proposition 1.1 dont la démonstration sera évoquée à la fin de cette section. Soient X un V-espace et W un sous-groupe de V. On note $\mathrm{a}_W : W \oplus V \to V$ l'homomorphisme de groupes $(x, y) \mapsto x + y$; on fait agir $W \oplus V$ sur X *via* a_W. On note $\delta_{W,X} : \mathrm{H}^*_V X \to \mathrm{H}^* V \otimes_{\mathrm{H}^* V/W} \mathrm{H}^*_V X^W$ l'homomorphisme composé

$$\mathrm{H}^*_V X \to \mathrm{H}^*_{W\oplus V} X \to \mathrm{H}^*_{W\oplus V} X^W \cong \mathrm{H}^* W \otimes \mathrm{H}^*_V X^W \cong \mathrm{H}^* V \otimes_{\mathrm{H}^* V/W} \mathrm{H}^*_V X^W,$$

la flèche de gauche étant induite par a_W et celle de droite par l'inclusion de X^W dans X ; $\delta_{W,X}$ est un morphisme dans la catégorie V-$\mathcal{U}$. On note

$$\mathrm{E}\,\nu_X : \mathrm{EFix}_{(V,W)} \mathrm{H}^*_V X \to \mathrm{H}^*_V X^W$$

l'homomorphisme de $\mathrm{H}^* V$-A-modules instables adjoint de $\delta_{W,X}$.

Proposition 1.7. – *Si X est un V-CW-complexe fini alors l'homomorphisme*

$$\mathrm{E}\,\nu_X : \mathrm{EFix}_{(V,W)} \mathrm{H}^*_V X \to \mathrm{H}^*_V X^W$$

est un isomorphisme.

Les formules de 1.5 « s'inversent » aisément :

Proposition 1.8. – *Soit $s : V/W \to V$ une section linéaire de $q : V \to V/W$. On considère $\mathrm{H}^* V/W$ comme un $(\mathrm{H}^* V/W, \mathrm{H}^* V)$-bimodule, la structure de $\mathrm{H}^* V/W$-module à gauche étant la structure évidente et la structure de $\mathrm{H}^* V$-module à droite étant induite par l'homomorphisme (surjectif) de A-algèbres instables $s^* : \mathrm{H}^* V \to \mathrm{H}^* V/W$. Soit M un $\mathrm{H}^* V$-A-module instable ; on a un isomorphisme de $\mathrm{H}^* V/W$-A-modules instables, naturel en M :*

$$\mathrm{Fix}_{(V,W)} M \;\cong\; \mathrm{H}^* V/W \otimes_{\mathrm{H}^* V} \mathrm{EFix}_{(V,W)} M.$$

Commentaire 1.9. – Il n'est pas difficile de se convaincre *a priori* de l'existence d'un adjoint à gauche pour le foncteur $\mathrm{e}_{(V,W)}$ (existence que nous avons implicitement admise dans notre exposition). En fait, les propriétés d'adjonction des foncteurs T impliquent cette existence. Précisons un peu. Soit $\mathrm{e}_s : V/W$-$\mathcal{U} \to V$-$\mathcal{U}$ le foncteur défini *via* s^*. On fait les deux observations suivantes :

(O_1) L'endofoncteur $\mathcal{O}_{(V,W)} \circ \mathrm{e}_s : V/W$-$\mathcal{U} \to V/W$-$\mathcal{U}$ est l'identité.

(O_2) Soit $\mathrm{f}_s : V$-$\mathcal{U} \to V/W$-$\mathcal{U}, M \mapsto \mathrm{H}^* V/W \otimes_{\mathrm{H}^* V} M$, le foncteur défini grâce à la structure de bimodule sur $\mathrm{H}^* V/W$ considérée en 1.8 ; f_s est adjoint à gauche de e_s.

On a $\mathrm{e}_{(V,W)} = \mathrm{e}_{(V,W)} \circ \mathcal{O}_{(V,W)} \circ \mathrm{e}_s$ d'après (O_1). Le foncteur $\mathrm{e}_{(V,W)}$ admet donc comme adjoint à gauche le composé $\mathrm{f}_s \circ \mathrm{EFix}_{(V,W)}$, d'après l'observation (O_2) et la proposition 1.4. On retrouve ainsi l'énoncé 1.8. On vérifie que le foncteur $\mathrm{f}_s \circ \mathrm{EFix}_{(V,W)}$ s'identifie au foncteur $\mathrm{Fix}_{W,s(V/W)}$ de [**33**, 1.3.4][(1)] *via* l'isomorphisme évident $\mathrm{H}^* V/W \cong \mathrm{H}^* s(V/W)$.

---

(1) Signalons incidemment une coquille dans la dernière formule de la page 14 de cette référence : Fix'_V doit être remplacé par $\mathrm{Fix}_{V'}$.

Commentaire 1.10. – L'expression que donne la proposition 1.8 pour le foncteur $\mathrm{Fix}_{(V,W)}$ dépend du choix de s. Cela peut paraître inesthétique, mais ce n'est pas surprenant car un foncteur adjoint est défini à isomorphisme fonctoriel (canonique) près. Expliquons le phénomène dans le cas qui nous occupe. Notons H^*V/W-s le $(\mathrm{H}^*V/W, \mathrm{H}^*V)$-bimodule introduit en 1.8 ; soient s_0 et s_1 deux sections linéaires de q, alors les deux bimodules H^*V/W-s_0 et H^*V/W-s_1 (avec toutes leurs structures) sont canoniquement isomorphes.

On fait maintenant la liste des propriétés des foncteurs Fix (et EFix) immédiatement impliquées par celles des foncteurs T.

Proposition 1.11. – *Le foncteur* $\mathrm{EFix}_{(V,W)}$ *est exact.*

Démonstration. – Cette exactitude résulte de celle du foncteur T_W et du fait que H^*V est un $\mathrm{T}_W\mathrm{H}^*V$-module plat *via* $\widetilde{\varphi}$. □

Proposition 1.12. – *Le foncteur* $\mathrm{Fix}_{(V,W)}$ *est exact.*

Démonstration. – Compte tenu de la proposition 1.5, cette exactitude résulte de celle du foncteur $\mathrm{EFix}_{(V,W)}$ et du fait que H^*V est un H^*V/W-module fidèlement plat. □

Proposition 1.13. – *Soient M_1 et M_2 deux* H^*V-A-*modules instables. On a un isomorphisme de* H^*V-A-*modules instables, naturel en M_1 et M_2 :*

$$\mathrm{EFix}_{(V,W)}(M_1 \otimes_{\mathrm{H}^*V} M_2) \cong \mathrm{EFix}_{(V,W)}(M_1) \otimes_{\mathrm{H}^*V} \mathrm{EFix}_{(V,W)}(M_2).$$

Démonstration. – Résulte du fait que le foncteur T_W préserve les produits tensoriels. □

Compte tenu de 1.8 (ou 1.5), la proposition 1.13 fournit aisément l'énoncé suivant (qui généralise le théorème 4.6.2.1 de [**31**]) :

Corollaire 1.14. – *Soient M_1 et M_2 deux* H^*V-A-*modules instables. On a un isomorphisme de* H^*V/W-A-*modules instables, naturel en M_1 et M_2 :*

$$\mathrm{Fix}_{(V,W)}(M_1 \otimes_{\mathrm{H}^*V} M_2) \cong \mathrm{Fix}_{(V,W)}(M_1) \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)}(M_2).$$

Le slogan pour la proposition 1.13 (resp. le corollaire 1.14) est que les foncteurs EFix (resp. Fix) « préservent les produits tensoriels ». Voici quelques conséquences de cette préservation.

Soit S un A-module instable ; les deux énoncés qui suivent font intervenir le foncteur de $V\text{-}\mathcal{U} \to V\text{-}\mathcal{U}, M \mapsto S \otimes M$. On observera que pour $S = \Sigma\,\mathbb{F}_\ell$ ce foncteur est le *foncteur suspension.*

Corollaire 1.15. – *Soit S un* A*-module instable.*

(a) *On a un isomorphisme de* H^*V-A*-modules instables, naturel en le* H^*V-A*-module instable M (et en le* A*-module instable S) :*

$$\mathrm{EFix}_{(V,W)}(S \otimes M) \;\cong\; \mathrm{T}_W S \otimes \mathrm{EFix}_{(V,W)} M.$$

(b) *Si S est fini, alors on a un isomorphisme de* H^*V-A*-modules instables, naturel en le* H^*V-A*-module instable M (et en le* A*-module instable fini S) :*

$$\mathrm{EFix}_{(V,W)}(S \otimes M) \;\cong\; S \otimes \mathrm{EFix}_{(V,W)} M.$$

Démonstration. – Le point (b) est conséquence du point (a) car si S est fini alors on a un isomorphisme (canonique) de A-modules instables $\mathrm{T}_W S \cong S$. Pour démontrer le point (a) on observe que l'on a $S \otimes M \cong (S \otimes \mathrm{H}^*V) \otimes_{\mathrm{H}^*V} M$, on vérifie l'isomorphisme $\mathrm{EFix}_{(V,W)}(S \otimes \mathrm{H}^*V) \cong \mathrm{T}_W S \otimes \mathrm{H}^*V$ et on invoque la proposition 1.13. □

Corollaire 1.16. – *Soit S un* A*-module instable.*

(a) *On a un isomorphisme de* H^*V-A*-modules instables, naturel en le* H^*V-A*-module instable M (et en le* A*-module instable S) :*

$$\mathrm{Fix}_{(V,W)}(S \otimes M) \;\cong\; \mathrm{T}_W S \otimes \mathrm{Fix}_{(V,W)} M.$$

(b) *Si S est fini, alors on a un isomorphisme de* H^*V-A*-modules instables, naturel en le* H^*V-A*-module instable M (et en le* A*-module instable fini S) :*

$$\mathrm{Fix}_{(V,W)}(S \otimes M) \;\cong\; S \otimes \mathrm{Fix}_{(V,W)} M.$$

Proposition-Définition 1.17. – *Soient V un ℓ-groupe abélien élémentaire, $W \subset V$ un sous-groupe, M_1 et M_2 deux* H^*V-A*-modules instables et p un entier naturel.*

(a) *La structure de* H^*V*-module gradué de* $\mathrm{Tor}_p^{\mathrm{H}^*V}(M_1, M_2)$ *peut être naturellement enrichie en une structure de* H^*V-A*-module instable. Le* H^*V-A*-module instable ainsi obtenu sera toujours noté* $\mathrm{Tor}_p^{\mathrm{H}^*V}(M_1, M_2)$.

(b) *On a un isomorphisme de* H^*V/W-A*-modules instables*

$$\mathrm{Fix}_{(V,W)} \mathrm{Tor}_p^{\mathrm{H}^*V}(M_1, M_2) \;\cong\; \mathrm{Tor}_p^{\mathrm{H}^*V/W}(\mathrm{Fix}_{(V,W)} M_1, \mathrm{Fix}_{(V,W)} M_2),$$

naturel en M_1 et M_2.

Démonstration. – Rappelons pour commencer la théorie des projectifs de la catégorie abélienne V-$\mathcal{U}$. Cette théorie est banale :

– Le foncteur $M \mapsto M^k$, $k \in \mathbb{N}$, défini sur la catégorie V-$\mathcal{U}$ et à valeurs dans la catégorie des $\mathbb{F}_\ell$-espaces vectoriels, est représentable :

$$M^k \;\cong\; \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathcal{U}}(\mathrm{H}^*V \otimes \mathrm{F}(k), M),$$

$\mathrm{F}(k)$ désignant le A-module instable librement engendré par un élément de degré k ; $\mathrm{H}^*V \otimes \mathrm{F}(k)$ est donc « tautologiquement » un projectif de V-$\mathcal{U}$ (compte tenu de sa définition, on dit aussi qu'il est libre).

– Tout objet de V-$\mathcal{U}$ est fonctoriellement quotient d'une somme directe de ces projectifs tautologiques. En particulier V-$\mathcal{U}$ a assez de projectifs.

– Tout projectif de V-$\mathcal{U}$ est isomorphe à une telle somme directe.

Après ce préalable, passons à la démonstration.

Soit $M_i \leftarrow P_{i,\bullet}$, $i = 1, 2$, une résolution projective de M_i dans la catégorie V-$\mathcal{U}$; on considère le H^*V-A-module instable

$$\Theta_p := \mathrm{H}_p \operatorname{Tot}(P_{1,\bullet} \otimes_{\mathrm{H}^*V} P_{2,\bullet})$$

(la notation Tot désigne le totalisé d'un bicomplexe). Les arguments habituels montrent que Θ_p « est indépendant » du choix des résolutions et que l'on a des isomorphismes canoniques

$$\Theta_p \cong \mathrm{H}_p(P_{1,\bullet} \otimes_{\mathrm{H}^*V} M_2) \text{ et } \Theta_p \cong \mathrm{H}_p(M_1 \otimes_{\mathrm{H}^*V} P_{2,\bullet}).$$

On fait les deux observations suivantes :

– Le H^*V-module sous-jacent à un projectif de V-$\mathcal{U}$ est libre.

– Le foncteur $\mathrm{Fix}_{(V,W)} : V\text{-}\mathcal{U} \to V/W\text{-}\mathcal{U}$ transforme projectif en projectif. Ceci résulte formellement du fait que $\mathrm{Fix}_{(V,W)}$ est adjoint à gauche d'un foncteur exact.

La première observation montre que $M_i \leftarrow P_{i,\bullet}$ est une résolution libre du H^*V-module sous-jacent à M_i et conduit au point (a) : le H^*V-module sous-jacent à Θ_p est bien $\operatorname{Tor}_p^{\mathrm{H}^*V}(M_1, M_2)$. La seconde observation et l'exactitude de $\mathrm{Fix}_{(V,W)}$ montrent que $\mathrm{Fix}_{(V,W)} M_i \leftarrow \mathrm{Fix}_{(V,W)} P_{i,\bullet}$ est une résolution projective dans la catégorie V/W-$\mathcal{U}$ et l'on obtient le point (b) en invoquant le fait que $\mathrm{Fix}_{(V,W)}$ « préserve les produits tensoriels » (corollaire 1.14) et le point (a). □

REMARQUE 1.18. – Soit $\mathrm{gtens}_{M_1} : V\text{-}\mathcal{U} \to V\text{-}\mathcal{U}$ (resp. $\mathrm{dtens}_{M_2} : V\text{-}\mathcal{U} \to V\text{-}\mathcal{U}$) le foncteur $M \mapsto M_1 \otimes_{\mathrm{H}^*V} M$ (resp. $M \mapsto M \otimes_{\mathrm{H}^*V} M_2$) ; gtens_{M_1} (resp. dtens_{M_2}) est exact à droite et l'on a

$$\operatorname{Tor}_p^{\mathrm{H}^*V}(M_1, M_2) = (\mathrm{L}_p \,\mathrm{gtens}_{M_1})(M_2) = (\mathrm{L}_p \,\mathrm{dtens}_{M_2})(M_1) = \Theta_p.$$

Voici une spécialisation du point (b) de la proposition précédente que nous utiliserons dans les sections 4 et 5.

COROLLAIRE 1.19. – *Soient M un H^*V-A-module instable et p un entier naturel ; on a un isomorphisme de H^*V/W-A-modules instables*

$$\mathrm{Fix}_{(V,W)} \operatorname{Tor}_p^{\mathrm{H}^*V}(\mathrm{H}^*W, M) \cong \operatorname{Tor}_p^{\mathrm{H}^*V/W}(\mathbb{F}_\ell, \mathrm{Fix}_{(V,W)} M),$$

naturel en M.

Démonstration. – On a $\mathrm{Fix}_{(V,W)}\mathrm{H}^*W \cong \mathbb{F}_\ell$ (pour s'en convaincre on peut voir H^*W comme le produit tensoriel $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathbb{F}_\ell$ et invoquer 1.26). □

On clôt la liste déroulée ci-dessus par la proposition-définition 1.20 ci-après ; cette proposition traite de la « fonctorialité en W » des H^*V-A-modules instables $\mathrm{EFix}_{(V,W)} M$, sa démonstration est laissée au lecteur.

Proposition-Définition 1.20. – *Soient W_0 et W_1 deux sous-groupes de V avec $W_0 \subset W_1$. La transformation naturelle $\mathrm{T}_{W_0} \to \mathrm{T}_{W_1}$ induit une transformation naturelle*

$$\rho\,(W_0, W_1) : \mathrm{EFix}_{(V,W_0)} \to \mathrm{EFix}_{(V,W_1)}.$$

Soient W_0, W_1 et W_2 trois sous-groupes de V avec $W_0 \subset W_1 \subset W_2$; on a :

$$\rho\,(W_0, W_2) = \rho\,(W_1, W_2) \circ \rho\,(W_0, W_1).$$

Soit W un sous-groupe de V ; la transformation naturelle $\rho(0, W)$ s'identifie à une transformation naturelle $\mathrm{id} \to \mathrm{EFix}_{(V,W)}$ *qui sera aussi notée $\rho_{(V,W)}$.*

Remarque 1.21. – D'après 1.4, les endofoncteurs $\mathrm{EFix}_{(V,W_0)}$ et $\mathrm{EFix}_{(V,W_1)}$ sont respectivement adjoints à gauche des endofoncteurs $\mathrm{E}_{(V,W_0)}$ et $\mathrm{E}_{(V,W_1)}$ (on rappelle que $\mathrm{E}_{(V,W)}$ est le foncteur $V\text{-}\mathcal{U} \to V\text{-}\mathcal{U}, N \mapsto \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N$). On vérifie que la transformation naturelle $\rho\,(W_0, W_1)$ correspond par adjonction à la transformation naturelle $\sigma\,(W_1, W_0) : \mathrm{E}_{(V,W_1)} \to \mathrm{E}_{(V,W_0)}$ telle que $\sigma\,(W_1, W_0)_N$ est l'épimorphisme canonique $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W_1} N \to \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W_0} N$ (spécialisation de [**37**, Chap. IV, §7, Theorem 2]).

Remarque 1.22. – Soient W_0, W_1 deux sous-groupes de V avec $W_0 \subset W_1$ et X un V-CW-complexe fini. On vérifie que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{EFix}_{(V,W_0)}\mathrm{H}^*_V X \arrow[r, "\mathrm{E}\,\nu_{W_0,X}", "\cong"'] \arrow[d, "\rho\,(W_0,W_1)"'] & \mathrm{H}^*_V X^{W_0} \arrow[d] \\
\mathrm{EFix}_{(V,W_1)}\mathrm{H}^*_V X \arrow[r, "\mathrm{E}\,\nu_{W_1,X}", "\cong"'] & \mathrm{H}^*_V X^{W_1}
\end{tikzcd}$$

est commutatif (pour des raisons évidentes on a précisé ci-dessus la notation $\mathrm{E}\,\nu_X$ de 1.7 en $\mathrm{E}\,\nu_{W,X}$).

Remarque 1.23. – L'homomorphisme de restriction $\mathrm{H}^*_V X^{W_0} \to \mathrm{H}^*_V X^{W_1}$ qui apparaît dans la remarque précédente peut s'écrire $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W_0} r$, r désignant l'homomorphisme de restriction $\mathrm{H}^*_{V/W_0} X^{W_0} \to \mathrm{H}^*_{V/W_0} X^{W_1}$. La version « purement algébrique » de cette observation est la suivante :

Soit M un H^*V-A-module instable. On considère l'homomorphisme de H^*V-A-modules instables

$$\rho(W_0, W_1)_M \ : \mathrm{EFix}_{(V,W_0)}\, M \longrightarrow \mathrm{EFix}_{(V,W_1)}\, M$$

et l'homomorphisme de H^*V/W_0-A-modules instables

$$\rho_{(V/W_0, W_1/W_0)_{\mathrm{Fix}_{(V,W_0)}M}} \ : \mathrm{Fix}_{(V,W_0)}M \longrightarrow \mathrm{EFix}_{(V/W_0,W_1/W_0)}\, \mathrm{Fix}_{(V,W_0)}M$$

(la notation $\rho_{(-,-)}$ est introduite à la toute fin de 1.20) ; on a l'identification

$$\rho(W_0, W_1)_M = \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W_0} \ \rho_{(V/W_0,W_1/W_0)_{\mathrm{Fix}_{(V,W_0)}M}}.$$

On s'en convainc en contemplant les identités :

$$\mathrm{E}_{(V,W_1)} = \mathrm{e}_{(V,W_0)} \circ \mathrm{E}_{(V/W_0,W_1/W_0)} \circ \mathcal{O}_{(V,W_0)},\ \mathrm{E}_{(V,W_0)} = \mathrm{e}_{(V,W_0)} \circ \mathrm{id} \circ \mathcal{O}_{(V,W_0)}$$

(id désigne ici le foncteur identique de la catégorie V/W_0-$\mathcal{U}$) et en observant que la transformation naturelle $\sigma\,(W_1, W_0)\ :\ \mathrm{E}_{(V,W_1)} \to \mathrm{E}_{(V,W_0)}$ de 1.21 est induite par $\sigma\,(W_1/W_0, 0) : \mathrm{E}_{(V/W_0,W_1/W_0)} \to \mathrm{E}_{(V/W_0\,,\,0)} = \mathrm{id}$.

Compte tenu de 1.5 la transformation naturelle $\rho_{(V,W)} : \mathrm{id} \to \mathrm{EFix}_{(V,W)}$ s'identifie à une transformation naturelle $\mathrm{id} \to \mathrm{e}_{(V,W)} \circ \mathrm{Fix}_{(V,W)}$; on constate sans surprise que l'on a l'énoncé suivant :

Proposition 1.24. – *Soit $\kappa_{(V,W)}\ :\ \mathrm{EFix}_{(V,W)} \to \mathrm{e}_{(V,W)} \circ \mathrm{Fix}_{(V,W)}$ l'isomorphisme naturel de 1.5, alors la transformation naturelle composée*

$$\mathrm{id} \xrightarrow{\rho_{(V,W)}} \mathrm{EFix}_{(V,W)} \xrightarrow{\kappa_{(V,W)}} \mathrm{e}_{(V,W)} \circ \mathrm{Fix}_{(V,W)}$$

est l'unité de l'adjonction du couple de foncteurs adjoints $(\mathrm{Fix}_{(V,W)}, \mathrm{e}_{(V,W)})$.

Démonstration. – Elle fait intervenir les unités des adjonctions, pour les paires de foncteurs adjoints $(\mathrm{Fix}_{(V,W)}, \mathrm{e}_{(V,W)})$ et $(\mathrm{EFix}_{(V,W)}, \mathrm{e}_{(V,W)} \circ \mathcal{O}_{(V,W)})$ et la co-unité de l'adjonction de la paire de foncteurs adjoints $(\mathrm{e}_{(V,W)}, \mathcal{O}_{(V,W)})$. Les détails (fastidieux) sont laissés au lecteur. □

On en vient maintenant à des propriétés plus techniques des foncteurs Fix (1.25, 1.26 et 1.27) qui auront un rôle à jouer dans notre mémoire.

Compte tenu de 1.1, 1.5 et 1.8, les énoncés 1.25, 1.26 et 1.27 ci-après constituent le pendant algébrique de la simple observation suivante :

Soit X un V/U-CW-complexe fini tel que l'action de V/U sur X est libre. Si l'on considère X comme un V-CW-complexe (fini) alors on a

$$X^W = \begin{cases} X & \text{pour } W \subset U, \\ \emptyset & \text{pour } W \not\subset U. \end{cases}$$

Proposition 1.25. – *Soient V un ℓ-groupe abélien élémentaire et W, U des sous-groupes ; soit N un* H^*V/U-A-*module instable fini.*

(a) *Si l'on a $W \subset U$ alors l'homomorphisme de* H^*V-A-*modules instables*

$$\rho_{(V,W)_{\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N}}\ :\ \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N \to \mathrm{EFix}_{(V,W)}(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N)$$

(introduit en 1.20) est un isomorphisme.

(b) *Si l'on a $W \not\subset U$ alors* $\mathrm{EFix}_{(V,W)}(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N)$ *est nul.*

Démonstration. – Il faut montrer en particulier que l'on a

$$(*) \qquad \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{T}_W \mathrm{H}^*V} \mathrm{T}_W(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N) \cong \begin{cases} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N & \text{pour } W \subset U, \\ 0 & \text{pour } W \not\subset U, \end{cases}$$

H^*V étant ci-dessus un $\mathrm{T}_W\mathrm{H}^*V$-module à droite *via* $\widetilde{\varphi}$ ou ce qui revient au même *via* l'homomorphisme composé

$$\mathrm{T}_W\mathrm{H}^*V \cong (\mathrm{H}^*V)^{\mathrm{Hom}(W,V)} \xrightarrow{\pi_i} \mathrm{H}^*V,$$

π_i désignant la projection sur la composante indexée par l'inclusion i de W dans V. Comme T_W « commute aux produits tensoriels », on dispose d'un isomorphisme (naturel en N) de $\mathrm{T}_W\mathrm{H}^*V$-A-modules instables

$$\mathrm{T}_W(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N) \cong \mathrm{T}_W\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{T}_W\, \mathrm{H}^*V/U} \mathrm{T}_W N.$$

Si N est fini alors on a $\mathrm{T}_W N \cong N$, ce que l'on peut préciser ainsi : l'homorphisme canonique $\mathrm{T}_0 N \to \mathrm{T}_W N$ induit par l'inclusion de 0 dans W est un isomorphisme. Il en résulte

$$\mathrm{T}_W(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N) \cong \mathrm{T}_W\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{T}_W\, \mathrm{H}^*V/U} N,$$

N étant $\mathrm{T}_W\, \mathrm{H}^*V/U$-module à gauche *via* l'homomorphisme composé

$$\mathrm{T}_W\, \mathrm{H}^*V/U \cong (\mathrm{H}^*V/U)^{\mathrm{Hom}(W,V/U)} \xrightarrow{\pi_0} \mathrm{H}^*V/U,$$

π_0 désignant la projection sur la composante indexée par l'homorphisme nul de W dans V/U. On note $\kappa : W \to V/U$ l'homorphisme composé $q_U \circ i$, q_U désignant la surjection canonique $V \to V/U$; on obtient au bout du compte un isomorphisme (naturel en N) de H^*V-A-modules instables

$$\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{T}_W \mathrm{H}^*V} \mathrm{T}_W(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N) \cong \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} K \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N$$

avec

$$K := \mathrm{H}^*V/U \otimes_{(\mathrm{H}^*V/U)^{\mathrm{Hom}(W,V/U)}} \mathrm{H}^*V/U,$$

H^*V/U étant à gauche un $(\mathrm{H}^*V/U)^{\mathrm{Hom}(W,V/U)}$-module à droite *via* π_κ (la projection sur la composante indexée par κ) et H^*V/U étant à droite un $(\mathrm{H}^*V/U)^{\mathrm{Hom}(W,V/U)}$-module à gauche *via* π_0. On constate que l'on a

$$K \cong \begin{cases} \mathrm{H}^*V/U & \text{pour } \kappa = 0, \\ 0 & \text{pour } \kappa \neq 0, \end{cases}$$

ce qui conduit bien à $(*)$.

Pour achever la démonstration, il reste à vérifier que dans le cas $W \subset U$ l'inverse de l'isomorphisme (*) coïncide avec la transformation naturelle $\rho_{(V,W)}$ introduite en 1.20, ou encore que le composé de $\rho_{(V,W)}$ et de l'isomorphisme (*) est l'identité. Cette dernière vérification est immédiate. □

Corollaire 1.26. – *Soient V un ℓ-groupe abélien élémentaire et W, U des sous-groupes ; soit N un H^*V/U-A-module instable. Si N est fini, alors on a un isomorphisme de H^*V/W-A-modules instables, naturel en N*

$$\mathrm{Fix}_{(V,W)}(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N) \cong \begin{cases} \mathrm{H}^*V/W \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N & \textit{pour } W \subset U, \\ 0 & \textit{pour } W \not\subset U. \end{cases}$$

Démonstration. – Conséquence de 1.8 et 1.25. □

Compte tenu de 1.24, la proposition 1.25 peut être reformulée ainsi :

Proposition 1.27. – *Soient V un ℓ-groupe abélien élémentaire et W, U des sous-groupes ; soit N un H^*V/U-A-module instable fini. Alors l'unité d'adjonction*

$$\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N \xrightarrow{\eta_{(V,W)}} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)}(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N)$$

est un isomorphisme si l'on a $W \subset U$ et est nulle si l'on a $W \not\subset U$.

Démonstration de la proposition 1.1. – Elle est analogue à celle que l'on trouve dans [**31**, paragraphe 4.7]. On la divise en trois étapes.

1) On étend la transformation naturelle ν_X en une transformation naturelle entre foncteurs définis sur la catégorie des paires de V-espaces

$$\nu_{(X,Y)} : \mathrm{Fix}_{(V,W)}\mathrm{H}^*_V(X,Y) \to \mathrm{H}^*_{V/W}(X^W, Y^W).$$

On observe que l'énoncé suivant est vérifié :

Proposition 1.28. – *Soit (X,Y) une paire de V-espaces, alors le diagramme d'homomorphismes de H^*V/W-A-modules instables*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fix}_{(V,W)}\mathrm{H}^*_V(X,Y) \arrow[r, "\mathrm{Fix}_{(V,W)}\,\partial"] \arrow[d, "\nu_{(X,Y)}"'] & \Sigma\,\mathrm{Fix}_{(V,W)}\mathrm{H}^*_V Y \arrow[d, "\Sigma\,\nu_Y"'] \\ \mathrm{H}^*_{V/W}(X^W, Y^W) \arrow[r, "\partial"] & \Sigma\,\mathrm{H}^*_{V/W} Y^W \end{tikzcd}$$

est commutatif.

(Au-dessus de la flèche horizontale du haut ∂ désigne le connectant, en cohomologie V-équivariante de la paire (X,Y), au-dessus de la flèche horizontale du bas ∂ désigne le connectant, en cohomologie V/W-équivariante de la paire (X^W, Y^W).)

On en déduit que si ν_Y et $\nu_{(X,Y)}$ sont des isomorphisme alors il en est de même pour ν_X.

2) On vérifie que $\nu_{(X,Y)}$ est un isomorphisme pour $(X,Y) = (\mathrm{D}^m, \mathrm{S}^{m-1}) \times V/U$ avec m un entier naturel et U un sous-groupe de V. Compte tenu du point (b) de 1.16 (avec $S = \Sigma^m \mathbb{F}_\ell$), il suffit d'effectuer cette vérification pour $m = 0$, c'est-à-dire de se convaincre que ν_X est un isomorphisme pour $X = V/U$.

On pose donc $X = V/U$. On a $\mathrm{H}^*_V X \cong \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} \mathrm{H}^*_{V/U} X \cong \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} \mathbb{F}_\ell$, si bien que l'on peut appliquer 1.26 ; on obtient :

$$\mathrm{Fix}_{(V,W)}\mathrm{H}^*_V X \;\cong\; \begin{cases} \mathrm{H}^*_{V/W} X & \text{pour } W \subset U, \\ 0 & \text{pour } W \not\subset U. \end{cases}$$

Dans les deux cas le second membre est égal à $\mathrm{H}^*_{V/W} X^W$, en effet :

$$X^W = \begin{cases} X & \text{pour } W \subset U, \\ \emptyset & \text{pour } W \not\subset U. \end{cases}$$

Dans le cas $W \not\subset U$ il n'y a plus rien à démontrer ; passons au cas $W \subset U$. Par « abstract nonsense » (même argument que pour 1.2), le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^*_V X & \xrightarrow{\eta_{(V,W)}} & \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)}\mathrm{H}^*_V X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \nu_X} \\ \mathrm{H}^*_V X^W & \longleftarrow & \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{H}^*_{V/W} X^W \end{array}$$

est commutatif. Il est clair que la flèche verticale de gauche et la flèche horizontale du bas sont des isomorphismes ; l'unité d'adjonction $\eta_{(V,W)}$ est un isomorphisme d'après 1.27. Il en résulte que $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \nu_X$ est un isomorphisme et donc que ν_X en est un aussi puisque H^*V est un H^*V/W-module fidèlement plat.

3) Soit maintenant X un V-CW-complexe fini arbitraire. Soit $\mathrm{Sk}_m X$ son m-ième squelette ; on montre que $\nu_{\mathrm{Sk}_m X}$ est un isomorphisme par récurrence sur l'entier m grâce à la deuxième étape. Comme l'on a par hypothèse $X = \mathrm{Sk}_m X$ pour m assez grand la démonstration de la proposition 1.1 est achevée.

Corollaire 1.29. – *Si (X, Y) est une paire de V-CW-complexes finis alors $\nu_{(X,Y)}$ est un isomorphisme.*

Démonstration de la proposition 1.7. – On étend la transformation naturelle $\mathrm{E}\nu_X$ en une transformation naturelle entre foncteurs définis sur la catégorie des paires de V-espaces

$$\mathrm{E}\nu_{(X,Y)} : \mathrm{EFix}_{(V,W)}\mathrm{H}^*_V(X,Y) \to \mathrm{H}^*_V(X^W, Y^W)$$

et on procède *mutatis mutandis* comme précédemment. On obtient du même coup l'énoncé suivant :

Corollaire 1.30. – *Si (X, Y) est une paire de V-CW-complexes finis alors $\mathrm{E}\nu_{(X,Y)}$ est un isomorphisme.*

CHAPITRE 2

RAPPELS SUR LES INJECTIFS DES CATÉGORIES V-$\mathcal{U}$ ET V_{tf}-$\mathcal{U}$

Comme dans la section précedente, ℓ est un nombre premier arbitraire, V est un ℓ-groupe abélien élémentaire, H^*V est la cohomologie modulo ℓ de V et A est l'algèbre de Steenrod modulo ℓ. Rappelons que les notations V-$\mathcal{U}$ et V_{tf}-$\mathcal{U}$ désignent respectivement la catégorie des H^*V-A-modules instables et sa sous-catégorie pleine dont les objets sont les H^*V-A-modules instables qui sont de type fini comme H^*V-module. Cette dernière hypothèse intervient très souvent dans ce mémoire, aussi nous abrégerons souvent « H^*V-A-module instable de type fini comme H^*V-module » en « $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-*module instable* ». Les catégories V-$\mathcal{U}$ et V_{tf}-$\mathcal{U}$ sont toutes deux des catégories abéliennes qui ont assez d'injectifs. C'est formel dans le cas de V-$\mathcal{U}$ (voir ci-dessous) ; cela l'est moins dans le cas de V_{tf}-$\mathcal{U}$ (pour une généralisation voir [**23**, Theorem 0.1]). La référence principale pour cette section est [**33**].

On commence par exhiber quelques injectifs de ces catégories.

1) On note $\mathrm{J}_V(k)$, $k \in \mathbb{N}$, le H^*V-A-module instable caractérisé, à isomorphisme près, par l'isomorphisme fonctoriel en le H^*V-A-module instable M :

$$\mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathcal{U}}(M, \mathrm{J}_V(k)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_\ell}(M^k, \mathbb{F}_\ell)$$

(M^k désigne ci-dessus le F_ℓ-espace vectoriel constitué des éléments de degré k de M). Il est clair que $\mathrm{J}_V(k)$ est un injectif de V-$\mathcal{U}$. On constate qu'il est fini et donc *a fortiori* de type fini comme H^*V-module. L'homomorphisme canonique $M \to \prod_{k\in\mathbb{N}} \prod_{u\in \mathrm{H}_k M} \mathrm{J}_V(k)$ est par construction injectif ; il en résulte que la catégorie V-$\mathcal{U}$ a assez d'injectifs.

2) Soient W un sous-groupe de V et $k \geq 0$ un entier. L'isomorphisme,

$$\mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathcal{U}}(M, \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{J}_{V/W}(k)) \cong \mathrm{Hom}_{V/W\text{-}\mathcal{U}}(\mathrm{Fix}_{(V,W)}M, \mathrm{J}_{V/W}(k))$$

et l'exactitude du foncteur $\mathrm{Fix}_{(V,W)}$ montrent que $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{J}_{V/W}(k)$ est un injectif de V-$\mathcal{U}$. On constate à nouveau qu'il est de type fini comme H^*V-module.

Ce qui précède se généralise ; l'exactitude du foncteur $\mathrm{Fix}_{(V,W)}$ est équivalente à l'énoncé suivant :

Proposition 2.1. – *Si I est un V/W-$\mathcal{U}$-injectif alors $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} I$ est un V-$\mathcal{U}$-injectif.*

3) Soient E un ℓ-groupe abélien élémentaire et I un injectif de V-$\mathcal{U}$. On montre que $\mathrm{H}^*E\otimes I$ est un injectif de V-$\mathcal{U}$ (comme dans les énoncés 1.15 et 1.16, la structure de H^*V-A-module instable de $\mathrm{H}^*E\otimes I$ provient « exclusivement » de celle de I). Evidemment, si L est un facteur direct, comme A-module (instable), de H^*E, alors $L\otimes I$ est encore un injectif de V-$\mathcal{U}$; $L\otimes I$ est de type fini comme H^*V-module si et seulement si L est isomorphe à $(\mathbb{F}_\ell)^m$ avec $m\in\mathbb{N}$ et si I est de type fini comme H^*V-module.

On énonce maintenant le théorème de classification des H^*V-A-modules instables injectifs [**33**, théorème 0.12]. Cet énoncé nécessite l'introduction de deux notations :

– $\mathcal{L}$ désigne un système de représentants pour les classes de $\mathcal{U}$-isomorphismes des facteurs directs indécomposables de $\mathrm{H}^*(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^d$, d parcourant $\mathbb{N}$ (chacune de ces classes est donc représentée dans $\mathcal{L}$ une et une seule fois) ;

– $\mathcal{W}$ désigne l'ensemble des sous-groupes de V.

Théorème 2.2. – *Soit I un V-$\mathcal{U}$-injectif. Alors il existe une unique famille de cardinaux $(a_{L,W,k})_{(L,W,k)\in\mathcal{L}\times\mathcal{W}\times\mathbb{N}}$ telle que I est isomorphe à la somme directe*

$$\bigoplus_{(L,W,k)\in\mathcal{L}\times\mathcal{W}\times\mathbb{N}} (L\otimes(\mathrm{H}^*V\otimes_{\mathrm{H}^*V/W}\mathrm{J}_{V/W}(k)))^{\oplus\, a_{L,W,k}}.$$

(Réciproquement tout H^*V-A-*module instable de cette forme est un V-$\mathcal{U}$-injectif.)*

On montre dans [**33**] que le théorème ci-dessus a pour sous-produit l'énoncé suivant (voir [**33**, théorème 0.13]) :

Théorème 2.3. – *Soient M un* H^*V-A-*module instable et $i: M\to E$ une enveloppe injective de M dans la catégorie V-$\mathcal{U}$. Si M est de type fini comme* H^*V-*module alors E est isomorphe à une somme directe finie de V-$\mathcal{U}$-injectifs de la forme* $\mathrm{H}^*V\otimes_{\mathrm{H}^*V/W}\mathrm{J}_{V/W}(k)$. *En particulier E est aussi de type fini comme* H^*V-*module.*

En observant qu'un V-$\mathcal{U}$-injectif qui est de type fini comme H^*V-module est un V_{tf}-$\mathcal{U}$-injectif (V_{tf}-$\mathcal{U}$-injectif est une abréviation pour injectif de la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$), on peut dédoubler (voire détripler) le théorème 2.3 :

Théorème 2.4. – *La catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$ a assez d'injectifs.*

Théorème 2.5. – *Soit I un V_{tf}-$\mathcal{U}$-injectif. Alors il existe une unique application $a:\mathcal{W}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, à support fini, en clair avec $a(W,k)=0$ en dehors d'un sous-ensemble fini de $\mathcal{W}\times\mathbb{N}$, telle que I est isomorphe à la somme directe*

$$\bigoplus_{(W,k)\in\mathcal{W}\times\mathbb{N}} (\mathrm{H}^*V\otimes_{\mathrm{H}^*V/W}\mathrm{J}_{V/W}(k))^{\,a(W,k)}.$$

(Réciproquement tout H^*V-A-*module instable de cette forme est un V_{tf}-$\mathcal{U}$-injectif.)*

Démonstration. – La partie « unicité » est conséquence de celle de 2.2. □

SCHOLIE 2.6. – *Un V_{tf}-$\mathcal{U}$-injectif est aussi un V-$\mathcal{U}$-injectif. Soient M un objet de V_{tf}-$\mathcal{U}$ et $i : M \to E$ un morphisme de V-$\mathcal{U}$ alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *i est une enveloppe injective dans la catégorie V-$\mathcal{U}$;*
(ii) *i est une enveloppe injective dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$.*

PROPOSITION-DÉFINITION 2.7. – *L'application à support fini $a : \mathcal{W} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui apparaît dans 2.5 ne dépend que de la classe d'isomorphisme de I ; on la note $\mathbf{a}_I$. Soient M un objet de V_{tf}-$\mathcal{U}$ et $i : M \to E$ une enveloppe injective dans cette catégorie, alors l'application $\mathbf{a}_E$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme de M ; on la note $\mathbf{a}_M$. Les conditions $M = 0$ et $\mathbf{a}_M = 0$ sont équivalentes.*

Démonstration. – La première partie de la proposition résulte de l'unicité qui figure dans l'énoncé 2.5, la deuxième de « l'unicité » de l'enveloppe injective, la troisième est triviale. □

PROPOSITION 2.8. – *Soit W un sous-groupe de V.*

(a) *Soit I un V-$\mathcal{U}$-injectif. Alors* $\mathrm{EFix}_{(V,W)}\, I$ *(resp.* $\mathrm{Fix}_{(V,W)}\, I$*) est un V-$\mathcal{U}$-injectif (resp. V/W-$\mathcal{U}$-injectif).*

(b) *Soit I un V_{tf}-$\mathcal{U}$-injectif. Alors* $\mathrm{EFix}_{(V,W)}\, I$ *(resp.* $\mathrm{Fix}_{(V,W)}\, I$*) est un V_{tf}-$\mathcal{U}$-injectif (resp. V/W_{tf}-$\mathcal{U}$-injectif).*

Démonstration. – Pour le (a) utiliser 2.2, 1.15 (resp. 1.16), l'isomorphisme $\mathrm{T}_W \mathrm{H}^* E \cong (\mathrm{H}^* E)^{\mathrm{Hom}(W,E)}$, et 1.25 (resp. 1.26). Pour le (b) utiliser 2.5 et 1.25 (resp. 1.26). □

Comme la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$ a assez d'injectifs et que les algèbres H^*V et H^*V/W sont noethériennes, le point (b) de 2.8 implique l'énoncé suivant (pour une preuve alternative dans le cas de $\mathrm{Fix}_V = \mathrm{Fix}_{(V,V)}$ voir [**33**, lemme 2.4.2], pour une vaste généralisation, avec une approche très différente, voir [**16**, Theorem 1.4]) :

PROPOSITION 2.9. – *Soit M un* H^*V-A-*module instable. Si M est de type fini comme* H^*V*-module alors* $\mathrm{EFix}_{(V,W)} M$ *(resp.* $\mathrm{Fix}_{(V,W)} M$*) est de type fini comme* H^*V*-module (resp.* H^*V/W*-module).*

Dans le cas particulier $W = V$ on obtient (voir à nouveau [**33**, lemme 2.4.2]) :

COROLLAIRE 2.10. – *Soit M un* H^*V-A-*module instable. Si M est de type fini comme* H^*V*-module alors le* A*-module instable* $\mathrm{Fix}_V M$ *est fini.*

La proposition 2.9 montre que le foncteur $\mathrm{EFix}_{(V,W)} : V\text{-}\mathcal{U} \to V\text{-}\mathcal{U}$ (resp. $\mathrm{Fix}_{(V,W)} : V\text{-}\mathcal{U} \to V/W\text{-}\mathcal{U}$) induit un foncteur $\mathrm{EFix}_{(V,W)} : V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U} \to V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$ (resp. $\mathrm{Fix}_{(V,W)} : V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U} \to V/W_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$). Compte tenu de 1.7, le point (b) de la proposition-définition ci-après est le pendant algébrique de l'énoncé trivial suivant : soient X un V-CW-complexe fini et W_1, W_2 deux sous-groupes de V, on a $(X^{W_2})^{W_1} = X^{W_1+W_2}$.

PROPOSITION-DÉFINITION 2.11. – *Soient W_1 et W_2 deux sous-groupes de V.*

(a) *L'isomorphisme fonctoriel $\mathrm{T}_{W_1} \circ \mathrm{T}_{W_2} \cong \mathrm{T}_{W_1 \oplus W_2}$ et le morphisme fonctoriel $\mathrm{T}_{W_1 \oplus W_2} \to \mathrm{T}_{W_1 + W_2}$ induisent un morphisme fonctoriel*

$$\mu : \mathrm{EFix}_{(V,W_1)} \circ \mathrm{EFix}_{(V,W_2)} \to \mathrm{EFix}_{(V,W_1+W_2)}$$

tel que μ_M est un épimorphisme pour tout H^*V-A*-module instable.*

(b) *Si M est un* $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-$\mathrm{A}$*-module instable alors μ_M est un isomorphisme; en d'autres termes μ induit isomorphisme fonctoriel*

$$\mathrm{EFix}_{(V,W_1)} \circ \mathrm{EFix}_{(V,W_2)} \cong \mathrm{EFix}_{(V,W_1+W_2)}$$

entre endofoncteurs de V_{tf}-$\mathcal{U}$.

On montre l'existence d'un morphisme fonctoriel canonique

$$\mu : \mathrm{EFix}_{(V,W_1)} \circ \mathrm{EFix}_{(V,W_2)} \to \mathrm{EFix}_{(V,W_1+W_2)}$$

tel que μ_M est un épimorphisme pour tout H^*V-A-module instable; on laisse au lecteur le soin de vérifier qu'il est bien induit par l'isomorphisme fonctoriel $\mathrm{T}_{W_1} \circ \mathrm{T}_{W_2} \cong \mathrm{T}_{W_1 \oplus W_2}$ et le morphisme fonctoriel $\mathrm{T}_{W_1 \oplus W_2} \to \mathrm{T}_{W_1+W_2]}$.

La proposition 1.4 dit que le foncteur $\mathrm{EFix}_{(V,W)} : V\text{-}\mathcal{U} \to V\text{-}\mathcal{U}$ est l'adjoint à gauche du foncteur $\mathrm{E}_{(V,W)} : V\text{-}\mathcal{U} \to V\text{-}\mathcal{U}, N \mapsto \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N$. Le scholie 1.3 dit que l'on a un isomorphisme naturel de H^*V-A-modules instables $\mathrm{E}_{(V,W)}N \cong \mathrm{H}^*W \otimes N$ le membre de gauche étant muni de la structure de H^*V-module induite par l'homomorphisme $W \oplus V \to V, (x,y) \mapsto x+y$. Il en résulte que le H^*V-A-module instable $(\mathrm{E}_{(V,W_2)} \circ \mathrm{E}_{(V,W_1)})(N)$ est naturellement isomorphe à $\mathrm{H}^*(W_2 \oplus W_1) \otimes N$, cet A-module instable étant muni de la structure de H^*V-module induite par l'homomorphisme $W_2 \oplus W_1 \oplus V \to V$, $(x_2, x_1, y) \mapsto x_2 + x_1 + y$. En considérant le monomorphisme évident $\mathrm{H}^*(W_2 + W_1) \to \mathrm{H}^*(W_2 \oplus W_1)$ on constate au bout du compte que l'on dispose d'un monomorphisme naturel $\widetilde{\mu}_N : \mathrm{E}_{(V,W_1+W_2)}N \hookrightarrow (\mathrm{E}_{(V,W_2)} \circ \mathrm{E}_{(V,W_1)})(N)$. Par adjonction on obtient un épimorphisme naturel

$$\mu_M : (\mathrm{EFix}_{(V,W_1)} \circ \mathrm{EFix}_{(V,W_2)})(M) \twoheadrightarrow \mathrm{EFix}_{(V,W_1+W_2)}M. \qquad \square$$

On prend tout d'abord $M = \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N$ avec N un H^*V/W-A-module instable fini. La proposition 1.25 entraîne que l'on a dans ce cas un $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$-isomorphisme $(\mathrm{EFix}_{(V,W_1)} \circ \mathrm{EFix}_{(V,W_2)})(M) \cong \mathrm{E}_{(V,W_1+W_2)}M$; μ_M est nécessairement un $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$-isomorphisme, en effet, en un degré donné, μ_M est une surjection entre deux $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels de même dimension finie. Il en résulte compte tenu de 2.5 que μ_I est un isomorphisme pour I un $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$-injectif. On obtient le cas général en considérant le début $0 \to M \to I^0 \to I^1$ d'une résolution injective de M dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$.

L'énoncé ci-dessous précise le point (b) de 2.8 [**34**, proposition 3.3.3] :

PROPOSITION 2.12. – *Les deux foncteurs $\mathrm{EFix}_{(V,W)} : V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U} \to V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$ et $\mathrm{Fix}_{(V,W)} : V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U} \to V/W_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$ préservent les enveloppes injectives.*

Démonstration. – On suit celle de [**34**][1]. Soient M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable et $i : M \to E$ une enveloppe injective de M dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$.

1) Le cas du foncteur $\mathrm{EFix}_{(V,W)}$. On note η_M la transformation naturelle $M \to \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)}M = \mathrm{EFix}_{(V,W)}M$ et on identifie i et $\mathrm{EFix}_{(V,W)}(i)$ avec des inclusions $M \subset E$ et $\mathrm{EFix}_{(V,W)}M \subset \mathrm{EFix}_{(V,W)}E$. La proposition 1.27 montre que le H^*V-A-module instable E se décompose naturellement en une somme directe $\mathrm{EFix}_{(V,W)}E \oplus \ker \eta_E$ et l'on a $\ker \eta_M = M \cap \ker \eta_E$. Soit maintenant P un sous-module de $\mathrm{EFix}_{(V,W)}E$ avec $P \cap \mathrm{EFix}_{(V,W)}M = 0$; on constate que P s'identifie avec un sous-module de E vérifiant $P \cap M = 0$. On a donc $P = 0$. □

2) Le cas du foncteur $\mathrm{Fix}_{(V,W)}$. Soit Q un sous-module de $\mathrm{Fix}_{(V,W)}E$ avec $Q \cap \mathrm{Fix}_{(V,W)}M = 0$, alors le produit tensoriel $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} Q$ s'identifie à un sous-module de $\mathrm{EFix}_{(V,W)}E$ dont l'intersection avec $\mathrm{EFix}_{(V,W)}E$ est triviale, on a donc $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} Q = 0$ d'après le 1). Ceci implique $Q = 0$ puisque H^*V est un H^*V/W-module fidèlement plat. □

Soit M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable ; les propositions 1.25, 1.26 et 2.12 permettent d'exprimer l'invariant $\mathbf{a}$ (définition 2.7) de $\mathrm{EFix}_{(V,W)}M$ et $\mathrm{Fix}_{(V,W)}M$ en fonction de celui de M :

Scholie 2.13. – *Soit M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable.*

(a) *Soient U un sous-groupe de V et k un entier naturel ; on a*

$$\mathbf{a}_{\mathrm{EFix}_{(V,W)}M}(U,k) = \begin{cases} \mathbf{a}_M(U,k) & \textit{pour } W \subset U, \\ 0 & \textit{pour } W \not\subset U. \end{cases}$$

(b) *Soient U un sous-groupe de V/W et k un entier naturel ; on a*

$$\mathbf{a}_{\mathrm{Fix}_{(V,W)}M}(U,k) = \mathbf{a}_M(q^{-1}(U),k),$$

q désignant la surjection canonique de V dans V/W.

Le scholie ci-dessus conduit à l'énoncé suivant (qui est implicite dans la démonstration de [**34**, lemme 3.2.3], pour une généralisation voir [**23**, Corollary 2.13]) :

Proposition 2.14. – *Soit M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathbf{a}_M(U,k) = 0$ *pour tout* (U,k) *avec* $U \neq 0$ *;*
(ii) $\mathrm{EFix}_{(V,W)}M = 0$ *pour tout* $W \neq 0$ *;*
(ii-bis) $\mathrm{EFix}_{(V,W)}M = 0$ *pour tout* W *avec* $\dim W = 1$ *;*
(iii) $\mathrm{Fix}_{(V,W)}M = 0$ *pour tout* $W \neq 0$ *;*
(iii-bis) $\mathrm{Fix}_{(V,W)}M = 0$ *pour tout* W *avec* $\dim W = 1$ *;*
(iv) *M est fini.*

[1] Signalons incidemment une coquille dans la version publiée de cette démonstration : dans le diagramme qui y apparaît, les flèches verticales pointent dans la mauvaise direction.

Démonstration. – D'après 2.13 la condition (i) est équivalente à chacune des conditions (ii), (ii-bis), (iii) et (iii-bis). Si (i) est satisfaite alors M s'injecte dans $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}}(\mathrm{J}_V(k))^{\mathbf{a}_M(0,k)}$ qui est fini ; on a donc (i)$\Rightarrow$(iv). On montre facilement qu'un H^*V-A-module instable fini s'injecte dans une somme directe finie de $\mathrm{J}_V(k)$ (voir la proposition 2.16 ci-après) ; on en déduit (iv)$\Rightarrow$(i). □

Remarque 2.15. – L'implication (iv)$\Rightarrow$(iii) de la proposition 2.14 est en fait très élémentaire :

Soit M un H^*V-A-module instable fini et N un H^*V/W-A-module instable. On a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}^*V}(M, \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N) = 0$ (homomorphismes dans la catégorie des H^*V-modules gradués). En effet il est facile de se convaincre que si W est non nul alors tout sous-H^*V-module fini de $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N$ est trivial (voir lemme 3.12). On a *a fortiori* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{V}\text{-}\mathcal{U}}(M, \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N) = 0$ et donc $\mathrm{Fix}_{(V,W)}M = 0$.

Compte tenu de 1.5 la même remarque vaut pour l'implication (iv)$\Rightarrow$(ii).

Soit M un H^*V-A-module instable, on note $\|M\|$ l'élément de $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ défini par $\|M\| := \sup\{k; M^k \neq 0\}$ (on a donc $\|0\| = 0$).

Proposition 2.16. – *Soit M un* H^*V-A-*module instable fini ; M admet une résolution injective dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$ dont chaque terme est une somme finie de* $\mathrm{J}_V(k)$ *et dont la longueur est inférieure ou égale à $\|M\|$.*

Démonstration. – Celle-ci généralise celle de **[32**, proposition 6.1.3]. Le cas $\|M\| = 0$ est trivial. On suppose $\|M\| \geq 1$ et on considère l'homomorphisme canonique

$$i : M \longrightarrow \bigoplus_{k=0}^{\|M\|} M^k \otimes \mathrm{J}_V(k).$$

Par construction i est injectif. De plus i est un isomorphisme en degré $\|M\|$ si bien que l'on a $\|\operatorname{coker} i\| \leq \|M\| - 1$. On conclut par récurrence. □

On achève cette section par deux commentaires :

Commentaire 2.17. – La théorie des V_{tf}-$\mathcal{U}$-injectifs est un outil important dans la preuve, par le premier et quatrième auteur **[9]**, de la conjecture de Landweber et Stong **[30]** sur la profondeur d'un anneau d'invariants $\mathbb{F}_\ell[X_1, X_2, \ldots, X_n]^G$, G désignant un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)$. Nous verrons également en 9.3 que cette théorie fournit une démonstration (assez détournée !) du résultat de Serre concernant les idéaux homogènes de H^*V stables sous l'action de l'algèbre de Steenrod.

Commentaire 2.18. – Comme nous l'avons rappelé en préambule à la démonstration de 1.14 le fait que V-$\mathcal{U}$ a assez de projectifs est formel. La situation est différente dans le cas de V_{tf}-$\mathcal{U}$: on peut se convaincre de ce qu'un objet P de V_{tf}-$\mathcal{U}$ est projectif si et seulement l'on a $P \simeq (\mathrm{H}^*V)^{\oplus m}$ avec $m \in \mathbb{N}$. Il en résulte que V_{tf}-$\mathcal{U}$ n'a pas assez de projectifs, en effet on a $\mathrm{Hom}_{V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}}(\mathrm{H}^*V, M) \cong M^0$ si bien qu'un objet M de V_{tf}-$\mathcal{U}$, avec $M^0 = 0$, qui est quotient d'un projectif, est nul.

CHAPITRE 3

SUR LES DÉRIVÉS DU FONCTEUR « PARTIE FINIE »

Soit M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable. Il n'est pas difficile de se convaincre que l'ensemble des sous-H^*V-A-modules finis de M (ordonné par inclusion) possède un plus grand élément (voir 3.3) ; nous l'appelons la *partie finie* de M. L'endofoncteur de V_{tf}-$\mathcal{U}$ qui associe à M sa partie finie est un foncteur (additif) exact à gauche ; l'étude de ses foncteurs dérivés à droite est le principal objet de cette section.

Cette théorie est réminiscente de celle de la cohomologie locale dont nous rappelons la définition ci-après.

Soient R un anneau (commutatif unitaire) noethérien, $\mathfrak{a} \subset R$ un idéal et M un R-module. On pose

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) := \bigcup_{t\in\mathbb{N}} \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a}^t),$$

$\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a}^t)$ désignant le sous-module de M constitué des éléments annulés par la puissance t-ième de l'idéal $\mathfrak{a}$; $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ est souvent appelé la $\mathfrak{a}$-*torsion* de M. Deux observations :

– Si M est de type fini alors la suite croissante de sous-modules $(\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a}^t))_{t\in\mathbb{N}}$ est stationnaire si bien que l'on a $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a}^{t_0})$ pour un certain t_0.

– On a $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \Gamma_{\sqrt{\mathfrak{a}}}(M)$, $\sqrt{\mathfrak{a}}$ désignant le radical de $\mathfrak{a}$ (voir 9.3).

Il est clair que le foncteur $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ est exact à gauche ; l'étude de ses foncteurs dérivés à droite est la théorie de la cohomologie locale initiée par Alexander Grothendieck [**21**]. On pourra trouver une exposition approfondie de cette théorie, de sa version $\mathbb{Z}$-graduée et de ses liens avec la géométrie algébrique dans [**10**].

On prend maintenant pour R l'anneau H^*V.

Proposition 3.1. – *Soit M un H^*V-A-module instable et $\mathfrak{a} \subset \mathrm{H}^*V$ un idéal homogène et stable sous l'action de* A.

(a) *Le sous-H^*V-module $\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a})$ de M est stable sous l'action de* A.

(b) *Le sous-H^*V-module $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ de M est stable sous l'action de* A.

Démonstration. – On peut montrer $\mathrm{Sq}^i \operatorname{Ann}_M(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Ann}_M(\mathfrak{a})$ par récurrence sur l'entier i en contemplant l'égalité $\mathrm{Sq}^i ax = \sum_{j+k=i}(\mathrm{Sq}^j a)(\mathrm{Sq}^k x)$, a dans $\mathfrak{a}$ et x dans M. Le (b) est conséquence du (a) puisque si $\mathfrak{a}$ est homogène et stable sous l'action de A alors il en est de même pour $\mathfrak{a}^t$. □

REMARQUE 3.2. – Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de H^*V homogène et stable sous l'action de A alors il en est de même pour $\sqrt{\mathfrak{a}}$ (voir 9.12). Comme l'on a $\Gamma_{\mathfrak{a}} = \Gamma_{\sqrt{\mathfrak{a}}}$, on peut supposer lorsque l'on considère les foncteurs $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ qui apparaissent dans 3.1, que les idéaux $\mathfrak{a}$ sont radiciels ($\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$). La liste de ces idéaux a été déterminée par Serre (voir 9.10) ; elle est indexée par les parties P de $\mathcal{W}$ telles que la relation d'ordre sur P, définie par l'inclusion, est l'égalité.

On prend enfin pour $\mathfrak{a}$ l'idéal $\widetilde{\mathrm{H}}^*V$ (constitué des éléments de H^*V de degré strictement positifs).

COROLLAIRE-DÉFINITION 3.3. – *Soit M un H^*V-A-module instable. Si M est de type fini comme H^*V-module alors $\Gamma_{\widetilde{\mathrm{H}}^*V}(M)$ est le plus grand sous-H^*V-A-module fini de M ; nous l'appelons la* partie finie *de M. Nous la notons $\mathrm{Pf}(M)$ (ou $\mathrm{Pf}_V(M)$ quand la mention de V nous semble utile voire nécessaire).*

Démonstration. – Nous savons déjà que le sous-H^*V-module $\Gamma_{\widetilde{\mathrm{H}}^*V}(M)$ de M est stable sous l'action de A. Si M est de type fini comme H^*V-module alors $\Gamma_{\widetilde{\mathrm{H}}^*V}(M)$ est fini. En effet il existe dans ce cas un entier naturel t_0 tel que $\Gamma_{\widetilde{\mathrm{H}}^*V}(M)$ est un $\mathrm{H}^*V/(\widetilde{\mathrm{H}}^*V)^{t_0}$-module de type fini et l'algèbre $\mathrm{H}^*V/(\widetilde{\mathrm{H}}^*V)^{t_0}$ est finie. De plus, si N est un sous-H^*V-A-module fini de M alors il existe un entier t_N tel que N est annulé par $(\widetilde{\mathrm{H}}^*V)^{t_N}$. □

Nous considérons dans ce mémoire les dérivés à droite de l'endofoncteur Pf, qui comme nous l'avons observé ci-dessus est un avatar de l'endofoncteur $\Gamma_{\widetilde{\mathrm{H}}^*V}$, dans la catégorie abélienne V_{tf}-$\mathcal{U}$, et non dans celle des H^*V-modules, la graduation de H^*V étant oubliée, ou encore dans celle des H^*V-modules $\mathbb{Z}$-gradués. Il existe cependant, comme le souligne Henn dans **[23]**, une analogie formelle entre les énoncés de la présente section et certains des énoncés de la théorie de la cohomologie locale. Le contexte dans lequel travaille Henn est bien plus général que le notre : H^*V est remplacée par une A-algèbre instable K qui est de type fini comme algèbre graduée, et la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$ par celle des K-A-modules instables qui sont de type fini comme K-modules gradués. Nous recommandons au lecteur désireux d'approfondir la discussion précédente de consulter l'introduction de **[23]**.

Nous allons relier les $\mathrm{R}^k\mathrm{Pf}M$ (M objet de V_{tf}-$\mathcal{U}$) au foncteur $W \mapsto \mathrm{EFix}_{(V,W)}M$ implicitement introduit dans la proposition-définition 1.20.

PROPOSITION-DÉFINITION 3.4. – *On pose $\mathcal{W}_0 := \mathcal{W} - \{0\}$ (on rappelle que la notation $\mathcal{W}$ désigne l'ensemble des sous-groupes $W \subset V$) ; $\mathcal{W}$ (resp. $\mathcal{W}_0$) est ordonné par inclusion et peut donc être vu comme l'ensemble des objets d'une catégorie que l'on note encore $\mathcal{W}$ (resp. $\mathcal{W}_0$).*

On considère les deux catégories $\mathcal{W}$ et V_{tf}-$\mathcal{U}$ et on se donne un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-*module instable M. Alors l'application entre objets*

$$W \;\mapsto\; \mathrm{EFix}_{(V,W)}M \cong \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)}M$$

se prolonge canoniquement en un foncteur de $\mathcal{W}$ dans V_{tf}-$\mathcal{U}$. On note Ψ_M la restriction de ce foncteur à $\mathcal{W}_0$. On note $\Psi : V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U} \to (V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})^{\mathcal{W}_0}$ le foncteur $M \mapsto \Psi_M$ (Ψ_M pourra donc aussi être noté $\Psi(M)$).

Démonstration. – La « partie proposition » de l'énoncé ci-dessus résulte de la proposition-définition 1.20. □

En préalables respectifs aux énoncés 3.9 et 3.13, nous rappelons ci-dessous quelques points qui nous seront utiles de la théorie des « dérivés de la limite » d'un foncteur à valeurs dans une catégorie abélienne.

Rappels 3.5. – (R.1) Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie finie (en clair nous supposons que l'ensemble des objets et l'ensemble des morphismes de $\mathcal{C}$ sont finis, hypothèse qui simplifiera notre exposition) ; soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne avec assez d'injectifs. On note $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ la catégorie des foncteurs définis sur $\mathcal{C}$ et à valeurs dans $\mathcal{A}$; la catégorie $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ est une catégorie abélienne avec assez d'injectifs. Le foncteur $\lim_{\mathcal{C}} : \mathcal{A}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{A}$ est l'adjoint à droite du « foncteur diagonal » $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$, qui associe à un objet a de $\mathcal{A}$ le foncteur $\Delta_a : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ envoyant tout $\mathcal{C}$-objet sur a et tout $\mathcal{C}$-morphisme sur id_a. Le foncteur $\lim_{\mathcal{C}}$ est un foncteur additif exact à gauche ; son k-ième dérivé à droite est noté $\lim^k_{\mathcal{C}}$ (on a donc $\lim^0_{\mathcal{C}} = \lim_{\mathcal{C}}$).

(R.2) Soit maintenant $\mathcal{C}$ un ensemble ordonné fini (que l'on peut voir comme une petite catégorie finie), nous rappelons l'expression très concrète que l'on a dans ce cas pour les $\lim^k_{\mathcal{C}}$.

Soit F un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}$; on note $\mathrm{L}^\bullet(F)$ le $\mathcal{A}$-complexe de cochaînes défini de la façon suivante :

– Soit $k \geq 0$ un entier ; on note $\mathrm{S}_k\mathcal{C}$ l'ensemble des k-simplexes de $\mathcal{C}$ (un k-simplexe de $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble $\sigma \subset \mathcal{C}$, totalement ordonné à $k+1$ éléments) et on pose

$$\mathrm{L}^k(F) := \prod_{\sigma \in \mathrm{S}_k\mathcal{C}} F(\sup \sigma).$$

On observera que l'ensemble $\mathrm{S}_k\mathcal{C}$ est fini si bien que le produit ci-dessus existe sans hypothèse supplémentaire sur la catégorie abélienne $\mathcal{A}$; la raison d'être de cette observation est que nous allons prendre $\mathcal{A} = V_{\mathrm{tf}}$-$\mathcal{U}$ et que dans cette catégorie seuls les produits finis existent.

– Le cobord $\mathrm{d} : \mathrm{L}^k(F) \to \mathrm{L}^{k+1}(F)$ est défini de la manière habituelle :

On identifie le groupe abélien $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{L}^k(F), \mathrm{L}^{k+1}(F))$ au produit

$$\prod_{(\sigma,\tau) \in \mathrm{S}_k\mathcal{C} \times \mathrm{S}_{k+1}\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F(\sup \sigma), F(\sup \tau))\,;$$

on a $\mathrm{d}_{(\sigma,\tau)} = 0$ pour $\sigma \not\subset \tau$ et $\mathrm{d}_{(\sigma,\tau)} = (-1)^{\nu(\sigma,\tau)} F((\sup \sigma, \sup \tau))$ pour $\sigma \subset \tau$. Précisons la notation : $(\sup \sigma, \sup \tau)$ désigne l'unique $\mathcal{C}$-morphisme de $\sup \sigma$ dans $\sup \tau$

et $\nu(\sigma,\tau)$ le cardinal du sous-ensemble de σ constitué des éléments c vérifiant $c < \gamma(\sigma,\tau)$ avec $\{\gamma(\sigma,\tau)\} = \tau - \sigma$.

Pour tout $k \geq 0$, on a un isomorphisme $\lim^k_{\mathcal{C}} F \cong \mathrm{H}^k\,\mathrm{L}^\bullet(F)$, canonique et naturel en F. Pour $k = 0$ ceci résulte de la définition même de $\lim_{\mathcal{C}} F$. Pour $k > 0$ on peut s'en convaincre de la façon suivante :

1) Soient J un objet de $\mathcal{A}$ et γ un élément de $\mathcal{C}$. On considère le foncteur $J^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\gamma)}$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}$; ce foncteur est déterminé, à isomorphisme près, par l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathcal{C}}}(F, J^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\gamma)}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F(\gamma), J)$ naturel en F. On vérifie que l'on a $\mathrm{H}^k\,\mathrm{L}^\bullet(J^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\gamma)}) = 0$ pour $k > 0$.

Pour ce faire on peut, par exemple, invoquer les arguments ci-après. Soient $\mathcal{C}_{\leq\gamma}$ (resp. $\mathcal{C}_{<\gamma}$) le sous-ensemble ordonné de $\mathcal{C}$ constitué des éléments $c \leq \gamma$ (resp. $c < \gamma$) et $\|\mathcal{C}_{\leq\gamma}\|$ (resp. $\|\mathcal{C}_{<\gamma}\|$) le polyèdre associé ; soit K un injectif (arbitraire) de $\mathcal{A}$. On constate que le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{L}^\bullet(J^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\gamma)}), K)$ s'identifie au complexe de chaînes polyédrales de $\|\mathcal{C}_{\leq\gamma}\|$ à coefficients $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(J, K)$. On obtient $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{H}^k\,\mathrm{L}^\bullet(J^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\gamma)}), K) = 0$ pour $k > 0$ en observant que $\|\mathcal{C}_{\leq\gamma}\|$ est isomorphe au cône de $\|\mathcal{C}_{<\gamma}\|$ (pour $k = 0$ on obtient $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{H}^k\,\mathrm{L}^\bullet(J^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\gamma)}), K) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(J, K)$, ce qui est bien compatible avec l'isomorphisme canonique $\lim_{\mathcal{C}} J^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\gamma)}) \cong J$, voir le point (b) de 3.6).

On observera que l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathcal{C}}}(F, J^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\gamma)}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F(\gamma), J)$ montre que $J^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\gamma)}$ est un injectif de $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ si J est un injectif de $\mathcal{A}$.

2) Soit F un objet de $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$; soit $(i_c : F(c) \to J_c)_{c\in\mathcal{C}}$ une famille d'homomorphismes injectifs avec J_c un injectif de $\mathcal{A}$. Cette famille induit tautologiquement un homomorphisme injectif $i : F \to \prod_{c\in\mathcal{C}} J_c^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,c)}$ (c'est là l'argument que l'on invoque pour montrer que si $\mathcal{A}$ a assez d'injectifs alors il en est de même pour $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$). En particulier si F est un injectif de $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ alors F est facteur direct dans un produit (fini) d'injectifs de $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ du type considéré précédemment ; on a donc encore dans ce cas $\mathrm{H}^k\,\mathrm{L}^\bullet(F) = 0$ pour $k > 0$.

3) Soient F un objet de $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ et $F \to I^\bullet$ une résolution injective dans cette catégorie. On considère le bicomplexe $\mathrm{L}^\bullet(I^\bullet)$ (on utilise ici « the usual sign trick » pour transformer un complexe de complexes en bicomplexe, voir par exemple [**41**, 1.2.5], la différentielle horizontale $\mathrm{d}_{\mathrm{h}}^{p,q} : \mathrm{L}^p(I^q) \to \mathrm{L}^{p+1}(I^q)$ est donnée par la différentielle de $\mathrm{L}^\bullet(I^q)$ et la différentielle verticale $\mathrm{d}_{\mathrm{v}}^{p,q} : \mathrm{L}^p(I^q) \to \mathrm{L}^p(I^{q+1})$ est $(-1)^p\mathrm{L}^p(I^q \to I^{q+1})$). Ce qui précède montre que pour tout $k \geq 0$, le $\mathcal{A}$-objet $\mathrm{H}^k\mathrm{Tot}\,\mathrm{L}^\bullet(I^\bullet)$ est à la fois canoniquement isomorphe au $\mathcal{A}$-objet $\mathrm{H}^k \lim_{\mathcal{C}} I^\bullet$ (« commencer par dériver horizontalement ») et au $\mathcal{A}$-objet $\mathrm{H}^k\mathrm{L}^\bullet(F)$ (« commencer par dériver verticalement »). Précisons. Par construction le complexe $\mathrm{L}^\bullet(F)$ est muni d'une coaugmentation $\lim_{\mathcal{C}} F \to \mathrm{L}^\bullet(F)$; en d'autres termes on dispose d'un homomorphisme de $\mathcal{A}$-complexes $\mathrm{c}^\bullet \lim_{\mathcal{C}} F \to \mathrm{L}^\bullet(F)$, $\mathrm{c}^\bullet a$, a objet de $\mathcal{A}$, désignant le $\mathcal{A}$-complexe $(a \to 0 \to 0 \cdots)$. En appliquant le foncteur Tot à l'homomorphisme de bicomplexes $\mathrm{c}^\bullet \lim_{\mathcal{C}} I^\bullet \to \mathrm{L}^\bullet(I^\bullet)$ on obtient un homomorphisme de $\mathcal{A}$-complexes $\eta_{\mathrm{v}} : \lim_{\mathcal{C}} I^\bullet \to \mathrm{Tot}\,\mathrm{L}^\bullet(I^\bullet)$. Pareillement, en appliquant le foncteur Tot à l'homomorphisme de bicomplexes $\mathrm{L}^\bullet(\mathrm{c}^\bullet F) \to \mathrm{L}^\bullet(I^\bullet)$, $\mathrm{c}^\bullet F$ désignant le $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$-complexe $(F \to 0 \to 0 \cdots)$, on obtient un homomorphisme de $\mathcal{A}$-complexes

$\eta_{\mathrm{h}} : \mathrm{L}^\bullet(F) \to \mathrm{Tot}\,\mathrm{L}^\bullet(I^\bullet)$. La précision promise est la suivante : $\mathrm{H}^k(\eta_{\mathrm{v}})$ et $\mathrm{H}^k(\eta_{\mathrm{h}})$ sont des isomorphismes pour tout $k \geq 0$.

(R.3) Soit $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ une suite exacte dans la catégorie $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$. Comme le foncteur $\mathrm{L}^\bullet(-)$ est exact, on a une suite exacte de $\mathcal{A}$-complexes $0 \to \mathrm{L}^\bullet(F') \to \mathrm{L}^\bullet(F') \to \mathrm{L}^\bullet(F') \to 0$ et donc un connectant $\partial : \mathrm{H}^k\mathrm{L}^\bullet(F'') \to \mathrm{H}^k\mathrm{L}^\bullet(F')$. En reprenant l'argument de bicomplexe détaillé ci-dessus, on se convainc que ce connectant s'identifie au connectant $\partial : \lim_{\mathcal{C}}^k F'' \to \lim_{\mathcal{C}}^{k+1} F'$.

On rassemble dans l'énoncé ci-dessous les points évoqués dans le 1) du (R.2) :

Scholie-Definition 3.6. – *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne avec assez d'injectifs et $\mathcal{C}$ un ensemble ordonné fini ; soient J un objet de $\mathcal{A}$ et γ un objet de $\mathcal{C}$.*

(a) *On a $\lim_{C}^k J^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\gamma)} = 0$ pour $k > 0$.*

(b) *Soit a un objet de $\mathcal{A}$; on note $\mathrm{Y}_a : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathcal{C}}}(\Delta_a, J^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\gamma)}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, J)$ et $\mathrm{D}_a : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathcal{C}}}(\Delta_a, J^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\gamma)}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, \lim_{\mathcal{C}} J)$ les isomorphismes respectivement donnés par Yoneda et la définition même de $\lim_{\mathcal{C}}$. Alors le $\mathcal{A}$-morphisme $(\mathrm{D}_J \circ \mathrm{Y}_J^{-1})(\mathrm{id}_J) : J \to \lim_C J^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\gamma)}$ est un isomorphisme.*

(c) *Si J est un injectif de $\mathcal{A}$ alors $J^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\gamma)}$ est un injectif de $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ (ce type d'injectif est dit* tautologique*).*

(d) *Si F est un injectif de $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ alors $F(\gamma)$ est un injectif de $\mathcal{A}$ pour tout objet γ de $\mathcal{C}$.*

Un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}$ isomorphe à un foncteur de la forme $J^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\gamma)}$ (J arbitraire) est dit co-induit.

Remarque 3.7. – Les points (b) et (c) de 3.6 (qui sont triviaux) impliquent facilement le point (a) si l'on adopte le point de vue du (R.1) sur les dérivés de lim. En effet, si $J \to I^\bullet$ est une résolution injective dans la catégorie $\mathcal{A}$ alors $J^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\gamma)} \to I^{\bullet\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\gamma)}$ est une résolution injective dans la catégorie $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ et le complexe $\lim_{\mathcal{C}} I^{\bullet\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\gamma)}$ s'identifie à $I^\bullet$.

Revenons maintenant au foncteur Ψ_M. Par définition Ψ_M est la restriction à $\mathcal{W}_0$ du foncteur $\mathcal{W} \to V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}, W \mapsto \mathrm{EFix}_{(V,W)}M$, disons $\widehat{\Psi}_M$. Les homomorphismes $M = \widehat{\Psi}_M(0) \to \widehat{\Psi}_M(W) = \Psi_M(W)$, W décrivant $\mathcal{W}_0$, fournissent un $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})^{\mathcal{W}_0}$-morphisme $\Delta_M \to \Psi_M$ (la notation Δ_M est introduite dans le rappel (R.1) de 3.5), soit encore un $V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$-morphisme $M \to \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi_M$, naturel en le $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable M, que nous notons ρ_M. Cette définition peut être paraphrasée ainsi : puisque 0 est un objet initial de $\mathcal{W}$, on dispose d'un homomorphisme canonique $\widehat{\Psi}_M(0) \to \lim_{\mathcal{W}} \widehat{\Psi}_M$ et cet homomorphisme est un isomorphisme ; ρ_M est l'homomorphisme

$$M = \widehat{\Psi}_M(0) \cong \lim_{\mathcal{W}} \widehat{\Psi}_M \to \lim_{\mathcal{W}_0} (\widehat{\Psi}_M)_{|\mathcal{W}_0} = \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi_M .$$

Remarque 3.8. – La proposition 1.24 montre que ρ_M est aussi induite par le produit des unités d'adjonction $M \to \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)}M$.

Proposition 3.9. – *Soit M un* $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-*module instable ; on a dans* V_{tf}-$\mathcal{U}$ *une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pf} M \xrightarrow{\subset} M \xrightarrow{\rho_M} \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi_M \longrightarrow \mathrm{R}^1\mathrm{Pf}\, M \longrightarrow 0$$

et pour $k > 0$ un isomorphisme

$$\lim^k_{\mathcal{W}_0} \Psi_M \cong \mathrm{R}^{k+1}\mathrm{Pf}\, M.$$

Démonstration. – Elle repose sur certaines propriétés du foncteur Ψ (introduit en 3.4) que nous rassemblons dans l'énoncé ci-après.

Proposition 3.10. – *Le foncteur additif* $\Psi : V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U} \to (V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})^{\mathcal{W}_0}$ *possède les propriétés suivantes :*

(a) Ψ *est exact ;*

(b) Ψ *envoie injectifs sur injectifs ;*

(c) *pour tout injectif I de* V_{tf}-$\mathcal{U}$, *la suite de* V_{tf}-$\mathcal{U}$-*morphismes*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pf}\, I \xrightarrow{\subset} I \xrightarrow{\rho_I} \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(I) \longrightarrow 0$$

est exacte.

L'exactitude du foncteur Ψ résulte immédiatement de celle des foncteurs $\mathrm{EFix}_{(V,W)}$. □

Compte tenu de 2.5 il suffit de vérifier le fait que $\Psi(I)$ est injectif pour $I = \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{J}_{V/W}(k)$ avec $(W,k) \in \mathcal{W} \times \mathbb{N}$. Soit U un objet de $\mathcal{W}_0$, la proposition 1.25 montre que l'on a

$$\Psi(I)(U) = \begin{cases} I^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}_0}(U,W)} & \text{pour } W \neq 0, \\ 0 & \text{pour } W = 0. \end{cases}$$

On peut donc supposer $W \neq 0$. Dans ce cas la proposition 1.25 implique plus précisément que l'on a un isomorphisme $\Psi(I) \cong I^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}_0}(-,W)}$ et donc que $\Psi(I)$ est bien injectif (point (c) de 3.6).

Là encore on peut supposer $I = \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{J}_{V/W}(k)$. Le cas $W = 0$ est trivial : on a $\mathrm{Pf}\, I = I$ et $\Psi_I = 0$ (voir la remarque 2.15, on rappelle que les notations Ψ_- et $\Psi(-)$ sont interchangeables). Passons au cas $W \neq 0$:

– D'une part on a $\mathrm{Pf}\, I = 0$; cette égalité découle de l'énoncé 3.11 (que nous vérifierons une fois achevée la démonstration en cours).

– D'autre part le fait que ρ_I est un isomorphisme est à nouveau conséquence de l'isomorphisme $\Psi(I) \cong I^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}_0}(-,W)}$. En effet on constate que l'isomorphisme $(\mathrm{D}_I \circ \mathrm{Y}_I^{-1})(\mathrm{id}_I)$ évoqué dans le point (b) de 3.6 coïncide dans le cas présent avec ρ_I.

Lemme 3.11. – *Soit N un* $\mathrm{H}^*V/W_{\mathrm{tf}}$-A-*module instable. Si W est non nul alors on a* $\mathrm{Pf}_V(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N) = 0$.

Démonstration. – Ce lemme ne concerne en fait que la structure de H^*V/W-module de N ; il est conséquence du suivant :

LEMME 3.12. – *Soient W un sous-groupe de V et $r : V \to W$ une rétraction linéaire ; soit N un H^*V/W-module. Alors le H^*V-module $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N$, vu comme un H^*W-module* via *l'homomorphisme $r^* : \mathrm{H}^*W \to \mathrm{H}^*V$, est un H^*W-module libre.*

Démonstration. – On note $\phi : W \oplus V/W \to V$ l'isomorphisme induit par r. Comme $q \circ \phi$ (on rappelle que q est l'homomorphisme canonique $V \to V/W$) et $r \circ \phi$ sont respectivement les projections sur V/W et W, l'isomorphisme

$$\phi^* : \mathrm{H}^*V \to \mathrm{H}^*(W \oplus V/W) = \mathrm{H}^*W \otimes \mathrm{H}^*V/W$$

est un isomorphisme de H^*V/W-modules (à droite) et un isomorphisme de H^*W-modules (à gauche), H^*V étant un H^*W-module (à gauche) *via* r^*. On en déduit que ϕ^* induit un isomorphisme de H^*W-modules (à gauche) $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N \cong \mathrm{H}^*W \otimes N$. □

Fin de la démonstration de la proposition 3.9. – On met en oeuvre la définition des $\lim^k_{\mathcal{W}_0}$ en termes d'injectifs de la catégorie $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})^{\mathcal{W}_0}$ (voir le rappel (R.1) de 3.5).

Soit $M \to I^\bullet$ une résolution injective dans la catégorie $V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$. D'après les points (a) et (b) de la proposition 3.10, $\Psi(M) \to \Psi(I^\bullet)$ est une résolution injective de $\Psi(M)$ dans la catégorie $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})^{\mathcal{W}_0}$. D'après le point (c) de cette proposition la suite de complexes de cochaînes dans la catégorie $V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$

$$0 \to \mathrm{Pf}(I^\bullet) \to I^\bullet \xrightarrow{\rho_{I^\bullet}} \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(I^\bullet) \to 0$$

est exacte. On obtient le résultat de la proposition 3.9 en considérant la longue suite exacte associée des groupes de cohomologie et en observant que l'on a $\mathrm{H}^0 I^\bullet = M$ et $\mathrm{H}^k I^\bullet = 0$ pour $k > 0$. □□

Nous complétons notre étude des foncteurs dérivés de la partie finie par divers énoncés d'annulation de ces foncteurs que nous utiliserons par la suite.

PROPOSITION 3.13. – *Les foncteurs dérivés $\mathrm{R}^k\mathrm{Pf}_V : V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U} \to V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$ sont nuls pour $k > \dim V$.*

Démonstration. – Le cas $V = 0$ est trivial ($0_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{U}$ dont les objets sont les A-modules instables finis et Pf_0 est le foncteur identique) ; on suppose $V \neq 0$. La proposition 3.9 dit que l'on a un isomorphisme $\mathrm{R}^k\mathrm{Pf}_V M \cong \lim^{k-1}_{\mathcal{W}_0} \Psi_M$ pour $k > \dim V$. Les formules pour les dérivés de lim que l'on a données dans le rappel (R.2) de 3.5 montrent que les $\lim^{k-1}_{\mathcal{W}_0}$ sont nuls pour $k > \dim V$. En effet cette inégalité implique que l'ensemble $\mathrm{S}_{k-1}\mathcal{W}_0$ est vide. □

PROPOSITION 3.14. – *Soit M un H^*V-A-module instable fini. On a $\mathrm{R}^k\mathrm{Pf} M = 0$ pour tout $k > 0$.*

Démonstration. – La proposition 2.16 dit en particulier que l'on dispose d'une résolution injective $M \to I^\bullet$ dans la catégorie $V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$ avec I^k fini pour tout k. On a donc $\mathrm{Pf}\, I^\bullet = I^\bullet$, d'où le résultat. □

PROPOSITION 3.15. – *Soient W un sous-groupe de V et M un $\mathrm{H}^*V/W_{\mathrm{tf}}$-A-module instable. Si W est non nul alors on a $\mathrm{R}^k\mathrm{Pf}_V(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} M) = 0$ pour tout $k \geq 0$.*

Démonstration. – Soit $M \to I^\bullet$ une résolution injective de M dans la catégorie $V/W_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$. Comme H^*V est plat sur H^*V/W, la proposition 2.1 implique que $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} M \to \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} I^\bullet$ est une résolution injective dans la catégorie $V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$. Or on a $\mathrm{Pf}_V(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} I^\bullet) = 0$ d'après 3.11. □

En vue d'une future référence (démonstration de la proposition 3.21), nous énonçons une variante de la proposition ci-dessus, dont la démonstration utilise le même argument.

PROPOSITION 3.16. – *Soient N un H^*V-A-module instable fini, W un sous-groupe non nul de V et M un $\mathrm{H}^*V/W_{\mathrm{tf}}$-A-module instable. Alors on a*

$$\mathrm{Ext}^k_{V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}}(N, \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} M) = 0$$

pour tout $k \geq 0$.

Démonstration. – On a $\mathrm{Hom}_{V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}}(N, J^\bullet) = \mathrm{Hom}_{V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}}(N, \mathrm{Pf}_V J^\bullet) = 0$, $J^\bullet$ désignant la résolution injective de la démonstration précédente. □

PROPOSITION 3.17. – *Soit M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable ; soit $\mathrm{dp}_V M$ la dimension projective du H^*V-module sous-jacent à M.*

Alors on a $\mathrm{R}^k\mathrm{Pf}_V M = 0$ pour $0 \leq k < \dim V - \mathrm{dp}_V M$.

La démonstration de la proposition ci-dessus utilise essentiellement la proposition 3.18 ci-dessous dont la démonstration est renvoyée à la fin de cette section (la proposition 3.18 est équivalente à la proposition 3.2.1 de [**9**] qui est un point clef de cette référence).

PROPOSITION 3.18. – *Soit M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable ; soit $i : M \to E$ une enveloppe injective de M dans la catégorie $V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$. Alors on a l'inégalité*

$$\mathrm{dp}_V E \leq \mathrm{dp}_V M.$$

Soit $i : M \to E$ une enveloppe injective de M dans la catégorie $V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$. La proposition 3.18 implique l'inégalité

$$\mathrm{dp}_V(\operatorname{coker} i) \leq \mathrm{dp}_V M + 1\,;$$

on en déduit par récurrence que M admet une résolution injective dans la catégorie $V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$

$$0 \to M \to I^0 \to I^1 \to \cdots \to I^k \to \cdots$$

avec $\mathrm{dp}_V I^k \leq \mathrm{dp}_V M + k$. On conclut à l'aide de l'énoncé ci-après (équivalent à un énoncé de [**8**]), concernant les H^*V-modules gradués, qui implique $\mathrm{Pf}_V I^k = 0$ pour $k < \dim V - \mathrm{dp}_V M$.

PROPOSITION 3.19. – *Soit M un H^*V-module gradué de type fini. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{dp}_V M = \dim V$;
(ii) $\mathrm{Pf}_V M \neq 0$.

(Evidemment $\mathrm{dp}_V(-)$ désigne ci-dessus la dimension projective d'un H^*V-module et $\mathrm{Pf}_V(-)$ la « partie finie » d'un H^*V-module de type fini.)

Démonstration. – On pose, comme on l'a fait jusqu'à présent, $n = \dim V$. Soit M un H^*V-module gradué. En considérant une résolution libre « minimale » $M \leftarrow L_\bullet$ de M, c'est-à-dire telle que le bord du complexe $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{H}^*V} L_\bullet$ est nul on constate que la condition (i) est équivalente à la suivante (on utilise ici le « lemme de Nakayama gradué ») :

(i-bis) $\mathrm{Tor}_n^{\mathrm{H}^*V}(\mathbb{F}_2, M) \neq 0$.

Or on a un isomorphisme de H^*V-modules gradués :

$$(*) \qquad \mathrm{Tor}_n^{\mathrm{H}^*V}(\mathbb{F}_2, M) \;\cong\; \Sigma^n\, \tau_V(M),$$

$\tau_V(M)$ désignant le sous-module de M constitué des éléments annulés par l'idéal d'augmentation de H^*V. Pour s'en convaincre, se rappeler que H^*V est isomorphe à une algèbre de polynômes en n indéterminées de degré 1 et considérer une résolution libre « à la Koszul » de $\mathbb{F}_2$. La condition (i) est donc encore équivalente à la suivante :

(i-ter) $\tau_V(M) \neq 0$.

On suppose maintenant M de type fini. Il est clair que l'on a (i-ter)$\Rightarrow$(ii). On a aussi (ii)$\Rightarrow$(i-ter), en effet si x est un élément non nul de degré maximal de $\mathrm{Pf}_V M$ alors x appartient à $\tau_V(M)$. □□

Les propositions 3.13 et 3.17 impliquent :

Corollaire 3.20. – *Soit M un H^*V-A-module instable. Si le H^*V-module sous-jacent à M est libre de dimension finie alors on a $\mathrm{R}^k\mathrm{Pf}_V M = 0$ pour $k \neq \dim V$.*

Démonstration de la proposition 3.18. – La démonstration ci-après est une variante de celle de [**9**, proposition 3.2.1].

Soit $i : M \to E$ une enveloppe injective de M dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$. D'après 2.5, on peut supposer

$$E = \bigoplus_{(U,m)\in\mathcal{W}\times\mathbb{N}} (\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} \mathrm{J}_{V/U}(m))^{\oplus\, a_{U,m}}$$

avec $a_{U,m} \in \mathbb{N}$ et $a_{U,m} = 0$ pour m assez grand. Soit $\mathcal{W}_E$ le sous-ensemble de $\mathcal{W}$ constitué des U tels qu'il existe m avec $a_{U,m} \neq 0$; on constate que l'on a

$$\mathrm{dp}_V(E) = \sup_{U\in\mathcal{W}_E} \operatorname{codim} U.$$

Soit $W \subset V$ pour lequel ce sup est atteint. On pose $p = \mathrm{dp}_V(E)$; on a donc $\operatorname{codim} W = p$. D'après 2.12, $\mathrm{Fix}_{(V,W)}(i) : \mathrm{Fix}_{(V,W)}M \to \mathrm{Fix}_{(V,W)}E$ est une enveloppe injective de $\mathrm{Fix}_{(V,W)}M$ dans la catégorie $(V/W)_{\mathrm{tf}}$-$\mathcal{U}$. Le choix de W fait qu'il existe un entier m tel que $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{J}_{V/W}(m)$ est un facteur direct de E et donc, d'après 1.26, que $\mathrm{J}_{V/W}(m)$ est un facteur direct de $\mathrm{Fix}_{(V,W)}E$. Comme $\mathrm{J}_{V/W}(m)$ est enveloppe injective de $\Sigma^m\mathbb{F}_2$ (dans la catégorie V-$\mathcal{U}$), $\mathrm{Fix}_{(V,W)}M$ contient un sous-module isomorphe à un sous-module non nul de $\Sigma^m\mathbb{F}_2$ donc à $\Sigma^m\mathbb{F}_2$ lui-même. On voit donc que le H^*V/W-module gradué sous-jacent à $\mathrm{Fix}_{(V,W)}M$ contient un sous-module isomorphe à $\Sigma^m\mathbb{F}_2$ pour un certain entier m, c'est-à-dire que $\tau_{V/W}(\mathrm{Fix}_{(V,W)}M)$ est non nul (la notation τ a été introduite au cours de la démonstration de 3.19) ou encore que l'on a $\mathrm{Tor}_p^{\mathrm{H}^*V/W}(\mathbb{F}_2, \mathrm{Fix}_{(V,W)}M) \neq 0$ (isomorphisme (*) de la démonstration précitée). D'après 1.19 on a aussi $\mathrm{Tor}_p^{\mathrm{H}^*V}(\mathrm{H}^*W, M) \neq 0$ ce qui implique bien l'inégalité $\mathrm{dp}_V(M) \geq p$. □

Complément : localisation de V_{tf}-$\mathcal{U}$ modulo les objets finis

Notre référence pour la théorie de la localisation dans les catégories abéliennes est [**18**, Chap. III].

Soit $\mathcal{F}$ la sous-catégorie pleine de V_{tf}-$\mathcal{U}$ dont les objets sont les H^*V-A-modules instables finis. Cette sous-catégorie est épaisse (en clair : si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte de V_{tf}-$\mathcal{U}$ alors M est fini si et seulement si M' et M'' le sont) si bien que l'on peut considérer la catégorie quotient $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})/\mathcal{F}$. Nous nous proposons, en suivant à nouveau [**23**], de reformuler dans le langage de [**18**, Chap. III] certains des résultats de cette section.

Soit M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable. On dit que M est *$\mathcal{F}$-fermé* si l'on a $\mathrm{Ext}^k_{V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}}(N, M) = 0$ pour $k = 0$ et $k = 1$, quand N est fini. On observera que la condition pour $k = 0$ équivaut à $\mathrm{Pf}\, M = 0$; si cette condition est vérifiée on dit que M est *$\mathcal{F}$-réduit.*

On note $\mathrm{Q} : V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U} \to (V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})/\mathcal{F}$ le foncteur canonique.

– La proposition 3.9 dit en particulier que le $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})/\mathcal{F}$-morphisme

$$\mathrm{Q}(\rho_M) \,:\, M \longrightarrow \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi_M$$

est un isomorphisme. En effet, le noyau et le conoyau de ρ_M sont finis [**18**, Chap. III, lemme 2].

– Si M est fini alors $\lim_{\mathcal{W}_0} \Psi_M$ est nul, par exemple parce que l'on a $\mathrm{Pf} M = M$ et $\mathrm{R}^1\mathrm{Pf} M = 0$ (voir 3.14). (En fait le foncteur Ψ_M est lui-même nul, voir la remarque 2.15.) Le foncteur

$$V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U} \to V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U},\ M \mapsto \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi_M$$

induit donc [**18**, Chap. III, Cor. 2] un foncteur, disons $\mathrm{S} : (V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})/\mathcal{F} \to V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$ tel que le foncteur composé $\mathrm{Q} \circ \mathrm{S}$ est naturellement isomorphe au foncteur identique de $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})/\mathcal{F}$ (S est pour « section »).

– Pour tout M, le $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable $\lim_{\mathcal{W}_0} \Psi_M$ est $\mathcal{F}$-fermé.

Vérifions cette affirmation. Par définition de lim on a une suite exacte dans V_{tf}-$\mathcal{U}$:

$$0 \to \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi_M \to \mathrm{L}^0(\Psi_M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{L}^1(\Psi_M)$$

(notations introduites dans le rappel (R.2) de 3.5). Comme d'après 3.16 $\Psi_M(W)$ est $\mathcal{F}$-fermé pour tout W dans $\mathcal{W}_0$, il est de même pour $\mathrm{L}^0(\Psi_M)$ et $\mathrm{L}^1(\Psi_M)$. On a donc encore une suite exacte courte

$$0 \to \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi_M \to \mathrm{L}^0(\Psi_M) \to \mathrm{im}\ \mathrm{d} \to 0$$

avec $\mathrm{L}^0(\Psi_M)$ $\mathcal{F}$-fermé et im d $\mathcal{F}$-réduit ; il en résulte bien que $\lim_{\mathcal{W}_0} \Psi_M$ est $\mathcal{F}$-fermé.

Ceci implique formellement que le foncteur S est adjoint à droite du foncteur Q et plus précisément que la transformation naturelle

$$\rho_M : M \to (\mathrm{S} \circ \mathrm{Q})(M) = \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi_M$$

est l'unité de cette adjonction. En conclusion :

PROPOSITION 3.21. – *La sous-catégorie $\mathcal{F}$ de V_{tf}-$\mathcal{U}$ est localisante et l'endofoncteur V_{tf}-$\mathcal{U} \to \mathrm{V}_{\mathrm{tf}}$-$\mathcal{U}$, $M \mapsto \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi_M$, muni de la transformation naturelle ρ, est un endofoncteur de localisation de V_{tf}-$\mathcal{U}$ modulo $\mathcal{F}$.*

CHAPITRE 4

LE COMPLEXE TOPOLOGIQUE

Soit X un V-CW-complexe fini. Rappelons la définition, donnée dans l'introduction, des complexes de chaînes $\mathrm{C}_{\mathrm{top}}^{\bullet}X$ et $\widetilde{\mathrm{C}}_{\mathrm{top}}^{\bullet}X$. On définit une filtration croissante de X par des sous-V-CW-complexes :

$$\emptyset = \mathrm{F}_{-1}\, X \subset \mathrm{F}_0\, X \subset \mathrm{F}_1\, X \subset \cdots \subset \mathrm{F}_p\, X \subset \cdots \subset \mathrm{F}_{n-1}\, X \subset \mathrm{F}_n\, X = X$$

en posant

$$\mathrm{F}_p\, X := \bigcup_{\operatorname{codim} W \leq p} X^W,$$

pour $-1 \leq p \leq n$; cette filtration induit une filtration de la construction de Borel $\mathrm{E}V \times_V X$. Le complexe $\mathrm{C}_{\mathrm{top}}^{\bullet}X$ est le terme $\mathrm{E}_1^{\bullet,*}$ de la suite spectrale, associée à cette dernière filtration, convergeant vers la cohomologie modulo 2 de $\mathrm{E}V \times_V X$. En clair on pose $\mathrm{C}_{\mathrm{top}}^{p}X := \Sigma^{-p}\, \mathrm{H}_V^*(\mathrm{F}_p\, X, \mathrm{F}_{p-1}\, X)$ et on prend pour cobord le connectant de la triade $\mathrm{E}V \times_V (\mathrm{F}_{p+1}\, X, \mathrm{F}_p\, X, \mathrm{F}_{p-1}\, X)$. Les deux observations suivantes permettent de préciser la structure de $\mathrm{C}_{\mathrm{top}}^{p}X$:

– Le théorème d'excision pour les CW-complexes montre que l'on a un isomorphisme (de H^*V-A-modules instables)

$$\mathrm{H}_V^*(\mathrm{F}_p\, X, \mathrm{F}_{p-1}\, X) \cong \bigoplus_{\operatorname{codim} W = p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{H}_{V/W}^*(X^W, \mathrm{Sing}_{V/W} X^W).$$

Décryptons le membre de droite. Le sous-V-CW-complexe $X^W \subset X$ est considéré ci-dessus comme un V/W-espace et $\mathrm{Sing}_{V/W} X^W \subset X^W$ désigne le sous-espace (stable sous l'action de V/W) constitué des points dont l'isotropie (pour l'action de V/W) est non triviale.

– Les H^*V/W-A-modules instables $\mathrm{H}_{V/W}^*(X^W, \mathrm{Sing}_{V/W} X^W)$ sont finis.

Comme la propriété ci-dessus joue un rôle important dans notre mémoire nous en proposons une démonstration *ab initio* dans l'intermède ci-après où nous analysons $\mathrm{H}_V^*(X, Y)$ pour une paire de V-CW-complexes finis telle que l'action de V sur $X - Y$ est libre.

Intermède de topologie générale

LEMME 4.1. – *Soient G un groupe discret et (X, Y) une paire de G-espaces ; on suppose que Y est fermé dans X et qu'il existe un voisinage ouvert de Y dans X, stable sous l'action de G, qui se rétracte par déformation G-équivariante sur Y.*

Si l'action de G sur $X - Y$ est topologiquement libre alors l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^*(G\backslash X, G\backslash Y) \longrightarrow \mathrm{H}^*_G(X, Y)$$

est un isomorphisme.

(Une action continue d'un groupe topologique G sur un espace Z est dite *topologiquement libre* si pour tout point de Z il existe un voisinage ouvert U de ce point, stable sous l'action de G, et une application continue G-équivariante de U dans G ; si G est discret fini et Z séparé alors une action libre est topologiquement libre.)

Démonstration. – Soit N le voisinage en question. On a $\mathrm{H}^*_G(X, Y) \cong \mathrm{H}^*_G(X, N)$ puis $\mathrm{H}^*_G(X, N) \cong \mathrm{H}^*_G(X - Y, N - Y)$ par excision. Comme l'action de G sur $X - Y$ (et $N - Y$) est topologiquement libre on a

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^*_G(X - Y, N - Y) &\cong \mathrm{H}^*(G\backslash(X - Y), G\backslash(N - Y)) \\ &= \mathrm{H}^*(G\backslash X - G\backslash Y, G\backslash N - G\backslash Y).\end{aligned}$$

Puis on a $\mathrm{H}^*(G\backslash X - G\backslash Y, G\backslash N - G\backslash Y) \cong \mathrm{H}^*(G\backslash X, G\backslash N)$, à nouveau par excision. Enfin, comme la rétraction par déformation G-équivariante de N sur Y induit une rétraction par déformation de $G\backslash N$ sur $G\backslash Y$, on a $\mathrm{H}^*(G\backslash X, G\backslash N) \cong \mathrm{H}^*(G\backslash X, G\backslash Y)$. □

SCHOLIE 4.2. – *Soient X un V-CW-complexe fini et Y un sous-V-CW-complexe. Si l'action de V sur $X - Y$ est libre alors :*

(a) *l'homomorphisme canonique* $\mathrm{H}^*(V\backslash X, V\backslash Y) \to \mathrm{H}^*_V(X, Y)$ *est un isomorphisme ;*

(b) $\mathrm{H}^*_V(X, Y)$ *est fini.*

Démonstration. – Le (b) résulte du (a) puisque $(V\backslash X, V\backslash Y)$ est une paire de CW-complexes finis. L'hypothèse du lemme 4.1 est satisfaite dans notre contexte (voir [**15**, Chap. II, (1.17), Exc. 3]), d'où le point (b). □

SCHOLIE 4.3. – *Soient X un V-CW-complexe fini et Y un sous-V-CW-complexe. Si l'action de V sur $X - Y$ est libre alors on a un isomorphisme canonique de* H^*V-A-*modules instables*

$$\mathrm{H}^*_V(X, Y) \cong \mathrm{H}^*_c(V\backslash(X - Y)).$$

(La notation $\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}$ désigne ci-dessus la cohomologie modulo 2 à support compact. Posons $Z = X - Y$ et notons $\pi : Z \to V\backslash Z$ le passage au quotient ; la structure de H^*V-A-module instable de $\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(V\backslash Z)$ est donnée par l'isomorphisme

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(V\backslash Z) &:= \operatorname*{colim}_K \mathrm{H}^*(V\backslash Z, V\backslash Z - K)\\ &= \operatorname*{colim}_K \mathrm{H}^*(V\backslash Z, V\backslash(Z - \pi^{-1}(K))) \cong \operatorname*{colim}_K \mathrm{H}^*_V(Z, Z - \pi^{-1}(K)),\end{aligned}$$

K décrivant l'ensemble des compacts de $V\backslash Z$ ordonné par inclusion.)

Démonstration. – On dispose du lemme suivant :

LEMME 4.4. – *Soit (A, B) une paire de CW-complexes finis. L'homomorphisme $\mathrm{H}^*(A, B) \to \mathrm{H}^*(A - B)$ induit par l'inclusion de paires $(A - B, \emptyset) \hookrightarrow (A, B)$ se factorise par un isomorphisme canonique $\mathrm{H}^*(A, B) \cong \mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(A - B)$.*

Démonstration. – Soient $\mathcal{C}$ l'ensemble des compacts K de $A - B$ ordonné par inclusion et $\mathcal{D}$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ constitué des K tels que $A - K$ se rétracte par déformation sur B. Comme $\mathcal{D}$ est cofinal dans $\mathcal{C}$ (voir [**35**, Theorem 6.1][**22**, proposition A.5]), on a

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(A - B) \cong \operatorname*{colim}_{K \in \mathcal{D}} \mathrm{H}^*(A - B, (A - B) - K)\,;$$

or les inclusions de paires $(A, B) \hookrightarrow (A, A - K) \hookleftarrow (A - B, (A - B) - K)$ induisent des isomorphismes en cohomologie, la première par l'hypothèse faite sur K et la seconde par excision. □

Le lemme ci-dessus et le point (a) du scholie 4.2 montrent que l'on a un isomorphisme canonique de A-modules instables

$$\mathrm{H}^*_V(X, Y) \cong \mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(V\backslash X - V\backslash Y)) = \mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(V\backslash(X - Y)).$$

Pour en finir avec le scholie 4.3 il reste à se convaincre que c'est bien un isomorphisme de H^*V-A-modules instables. On pose $A = V\backslash X$ et $B = V\backslash Y$. Soit N un voisinage ouvert de Y dans X, stable sous l'action de V, qui se rétracte par déformation V-équivariante sur Y ; on note L le compact $X - N$ (stable sous l'action de V) et K son image dans A (qui se rétracte par déformation sur B). On considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^*(A, B) \arrow[d, "\nu_{\mathrm{g}}"'] & \mathrm{H}^*(A, A - K) \arrow[l, "\bar{\alpha}"'] \arrow[r, "\bar{\beta}"] \arrow[d, "\nu_{\mathrm{m}}"'] & \mathrm{H}^*(A - B, (A - B) - K) \arrow[d, "\nu_{\mathrm{d}}"'] \\
\mathrm{H}^*_V(X, Y) & \mathrm{H}^*_V(X, X - L) \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{H}^*_V(X - Y, (X - Y) - L)
\end{tikzcd}$$

(les indices g, m et d sont pour gauche, milieu et droite !). On observe que toutes les flèches de ce diagramme sont des isomorphismes. En effet $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, ν_{g} et α sont des isomorphismes d'après ce qui précède et ν_{d} en est un parce que l'action de V sur $X - Y$ est libre. L'isomorphisme du scholie 4.3 est le composé $\gamma \circ \nu_{\mathrm{d}}^{-1} \circ \beta \circ \alpha^{-1} : \mathrm{H}^*_V(X, Y) \to \mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(V\backslash(X, Y))$, γ désignant l'homomorphisme canonique $\mathrm{H}^*(A - B, (A - B) - K) \to \mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(V\backslash(X, Y))$ qui comme on l'a vu plus haut est un isomorphisme. Or par définition même de la structure de H^*V-A-module instable de $\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(V\backslash(X,Y))$, $\gamma\circ\nu_{\mathrm{d}}^{-1}$ est un homomorphisme de H^*V-A-modules instables. □

Archivons au passage ce que dit la parenthèse qui suit l'énoncé 4.3 :

Scholie 4.5. – *Soit Z un espace topologique muni d'une action topologiquement libre de V. Alors l'homomorphisme de* A*-algèbres instables composé*

$$\mathrm{H}^*V \to \mathrm{H}^*_V Z = \mathrm{H}^*(V\backslash Z) \to \mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(V\backslash Z)$$

munit la cohomologie à support compact modulo 2, $\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(V\backslash Z)$, *d'une structure de* H^*V-A-*module instable.*

Remarque 4.6. – On peut démontrer (de manière assez détournée !) 4.2 en invoquant le corollaire 1.29 et la proposition 2.14 puisque l'hypothèse de 4.2 est équivalente à $X^W = Y^W$ pour tout sous-groupe W de V de dimension 1.

Fin de l'intermède de topologie générale

Nous archivons les deux observations qui précèdent 4.1 :

Proposition 4.7. – *Soient V un 2-groupe abélien élémentaire et X un V-CW-complexe fini.*

(a) *On a pour tout p un isomorphisme de* H^*V-A-*modules instables, naturel en X :*

$$\Sigma^p\, \mathrm{C}^p_{\mathrm{top}}X \cong \bigoplus_{\operatorname{codim} W = p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{H}^*_{V/W}(X^W, \mathrm{Sing}_{V/W}X^W).$$

(b) *Le* H^*V/W-A-*module instable* $\mathrm{H}^*_{V/W}(X^W, \mathrm{Sing}_{V/W}X^W)$ *est fini pour tout W.*

Le complexe $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\,X$ est associé à la coaugmentation naturelle

$$\mathrm{H}^*_V X =: \mathrm{C}^{-1}_{\mathrm{top}}\,X \to \mathrm{C}^0_{\mathrm{top}}\,X = \mathrm{H}^*_V X^V$$

dont $\mathrm{C}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\,X$ est muni. Formalisons (lourdement) la définition de celle-ci.

Soit $(\mathrm{F}^{\mathrm{tr}}_p X)_{-1\le p\le n}$ la filtration croissante « triviale » de X définie par

$$\mathrm{F}^{\mathrm{tr}}_p X = \begin{cases} \emptyset & \text{pour } p=-1,\\ X & \text{pour } 0\le p\le n.\end{cases}$$

Le complexe obtenu en remplaçant dans la définition de $\mathrm{C}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\,X$ la filtration (F_pX) par la filtration $(\mathrm{F}^{\mathrm{tr}}_pX)$ est $\mathrm{H}^*_VX \to 0 \to 0\cdots$; l'homomorphisme de ce dernier complexe dans $\mathrm{C}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\,X$, induit par les inclusions $\mathrm{F}_pX \subset \mathrm{F}^{\mathrm{tr}}_pX$, est la coaugmentation évoquée plus haut.

Venons-en maintenant à la démonstration du théorème 0.1 dont nous reproduisons l'énoncé :

Théorème 4.8. – *Soient V un 2-groupe abélien élémentaire et X un V-CW-complexe fini. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le* H^*V-*module sous-jacent à* H^*_VX *est libre.*

(ii) *Le complexe coaugmenté* $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}} X$ *est acyclique.*

Soit M un H^*V-module $\mathbb{N}$-gradué. Les deux conditions suivantes sont équivalentes (conséquence du « lemme de Nakayama gradué ») :

– M est libre comme H^*V-module ;

– $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{H}^*V}(\mathbb{F}_2, M) = 0$.

Il suffit donc de se convaincre de l'égalité $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{H}^*V}(\mathbb{F}_2, \mathrm{H}_V^* X) = 0$. Pour cela on observe que le point (a) de 4.7 entraîne que la dimension projective du H^*V-module sous-jacent à $\mathrm{C}^p_{\mathrm{top}} X$ est inférieure ou égale à p et on invoque le lemme *ad hoc* suivant :

Lemme 4.9. – *On considère une suite exacte de* H^*V*-modules de la forme suivante :*

$$0 \to M \to C^0 \to C^1 \to \cdots \to C^p \to \cdots \to C^{r-1} \xrightarrow{\mathrm{d}^{r-1}} C^r \to 0.$$

Si l'on suppose $\mathrm{Tor}_k^{\mathrm{H}^*V}(\mathbb{F}_2, C^p) = 0$ *pour* $0 \leq p \leq r$ *et* $k > p$*, alors on a* $\mathrm{Tor}_k^{\mathrm{H}^*V}(\mathbb{F}_2, M) = 0$ *pour* $k > 0$.

Démonstration. – On procède par récurrence sur l'entier r. Le cas $r = 0$ est trivial. On franchit le pas de récurrence en considérant la suite exacte

$$0 \to M \to C^0 \to C^1 \to \cdots \to C^p \to \cdots \to \ker \mathrm{d}^{r-1} \to 0$$

et en observant que l'on a $\mathrm{Tor}_k^{\mathrm{H}^*V}(\mathbb{F}_2, \ker \mathrm{d}^{r-1}) = 0$ pour $k > r-1$ (utiliser la suite exacte courte $0 \to \ker \mathrm{d}^{r-1} \to C^{r-1} \to C^r \to 0$). □

Démonstration de l'implication (i)⇒(ii). – Pour $V = 0$ il n'y a rien à démontrer ; on suppose donc $V \neq 0$.

On constate tout d'abord que l'on a bien $\mathrm{H}^{-1}\,\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}} X = 0$, c'est-à-dire que la coaugmentation $\eta : \mathrm{H}_V^* X \to \mathrm{H}_V^* X^V$ est injective. En effet la théorie de Smith dit en particulier que $\ker \eta$ est un H^*V-module de torsion(1) ; il est donc nul si $\mathrm{H}_V^* X$ est un H^*V-module libre.

Le cas $\dim V = 1$. – D'après ce qui précède la longue suite exacte en cohomologie équivariante modulo 2 de la paire (X, X^V) donne en fait une suite exacte courte $0 \to \mathrm{H}_V^* X \to \mathrm{H}_V^* X^V \to \Sigma^{-1}\,\mathrm{H}_V^*(X, X^V) \to 0$ (sans hypothèse sur $\dim V$).

Or pour $\dim V = 1$, le complexe $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}} X$ est le complexe de cochaînes

$$\mathrm{H}_V^* X \to \mathrm{H}_V^* X^V \to \overset{-1}{\Sigma}\,\mathrm{H}_V^*(X, X^V)\,;$$

il est bien acyclique.

(1) Soit c_V le produit des éléments non nuls de $\mathrm{H}^1 V$, la théorie de Smith dit que $\eta[\mathrm{c}_V^{-1}]$ est un isomorphisme (résultat facile à obtenir dans le cas qui nous occupe), en clair que tout élément du noyau ou du conoyau de η est annulé par une puissance de c_V.

Le cas $\dim V \geq 2$. – On procède par récurrence sur l'entier $\dim V$.

Comme nous allons être amené à faire varier le 2-groupe abélien élémentaire V nous préciserons, lorsque cela nous semblera nécessaire, les notations $\mathrm{C}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\, X$, $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\, X$ et $\mathrm{F}_p\, X$ en $\mathrm{C}^{\bullet}_{\mathrm{top},V}\, X$, $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top},V}\, X$ et $\mathrm{F}_{p,V}\, X$.

Explicitons l'hypothèse de récurrence :

(HR) Soient V' un 2-groupe abélien élémentaire et X' un V'-CW-complexe fini avec $\mathrm{H}^*_{V'}X'$ libre comme H^*V'-module. Si l'on a $\dim V' < \dim V$ alors le complexe $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top},V'}\, X'$ est acyclique.

Nous divisons notre démonstration en deux étapes.

Première étape. – On montre que si (HR) est vérifiée alors on a $\mathrm{H}^p\, \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\, X = 0$ pour $p < \dim V - 1$.

En préalable nous démontrons deux propositions, 4.10 et 4.11, concernant respectivement $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\, X$ et $\mathrm{C}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\, X$, dans lesquelles l'hypothèse « $\mathrm{H}^*_V X$ est un H^*V-module libre » n'intervient pas, ni d'ailleurs l'hypothèse $\dim V \geq 2$. Nous posons à nouveau $\dim V =: n$.

Soit $W \subset V$ un sous-groupe ; X^W est un sous-V-CW-complexe de X que l'on peut considérer comme un V/W-CW-complexe (fini), ce que nous faisons ci-après.

On note $\Sigma^n\, \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\, X$ la n-ième suspension (terme à terme) du complexe $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\, X$. On a $(\Sigma^n\, \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\, X)^{-1} = \Sigma^n\, \mathrm{H}^*_V X$ et $(\Sigma^n\, \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\, X)^p = \Sigma^{n-p}\, \mathrm{H}^*_V(\mathrm{F}_p\, X, \mathrm{F}_{p-1}\, X)$ pour $0 \leq p \leq n$, ce qui montre que $\Sigma^n\, \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\, X$ est un complexe de cochaînes coaugmenté, dans la catégorie des H^*V-A-modules <u>instables</u>.

Proposition 4.10. – *On a un isomorphisme canonique de complexes de* H^*V/W-A-*modules instables :*

$$\mathrm{Fix}_{(V,W)}\, (\Sigma^n\, \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\, X) \cong \Sigma^n\, \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top},V/W}\, X^W.$$

Démonstration. – On vérifie tout d'abord que $(\mathrm{F}_p\, X)^W$ s'identifie à $\mathrm{F}_{p,V/W}\, X^W$ (il est opportun ici de noter que notre définition des F_pX fait sens pour tout $p \geq -1$ et donne $\mathrm{F}_pX = X$ pour $p \geq \dim V$). On invoque ensuite le fait que le foncteur $\mathrm{Fix}_{(V,W)}$ « commute à la suspension » (point (b) de 1.16), la proposition 1.28 et le corollaire 1.29. □

La proposition ci-dessous concerne le foncteur $\Psi : V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U} \to (V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})^{\mathcal{W}_0}$ introduit en section 3.

Proposition 4.11. – *Le* $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})^{\mathcal{W}_0}$-*complexe* $\Psi(\Sigma^n\, \mathrm{C}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\, X)$ *possède les propriétés suivantes :*

(a) *Pour* $0 \leq p < n$ *le foncteur* $\Psi(\Sigma^n\, \mathrm{C}^{p}_{\mathrm{top}}\, X) : \mathcal{W}_0 \to V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$ *est une somme directe finie de foncteurs co-induits (terminologie introduite en 3.6).*

(b) *Le foncteur* $\Psi(\Sigma^n\, \mathrm{C}^{n}_{\mathrm{top}}\, X)$ *est nul.*

(c) *Pour* $0 \leq p \leq n$ *et* $k > 0$ *on a* $\lim^k_{\mathcal{W}_0}\, \Psi(\Sigma^n\, \mathrm{C}^{p}_{\mathrm{top}}\, X) = 0$.

(d) *Pour* $0 \le p < n$ *le* $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$*-morphisme*

$$\rho_{\Sigma^n \mathrm{C}^p_{\mathrm{top}} X} : \Sigma^n \mathrm{C}^p_{\mathrm{top}} X \to \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(\Sigma^n \mathrm{C}^p_{\mathrm{top}} X)$$

est un isomorphisme.

Le $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable $\Sigma^n \mathrm{C}^p_{\mathrm{top}} X$ est isomorphe à une somme directe de la forme $\bigoplus_{\operatorname{codim} W = p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N_W$ avec N_W un H^*V/W-A-module instable fini (voir 4.7).

On pose $M_W = \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N_W$ et on suppose $p \neq n$. La proposition 1.25 implique $\Psi(M_W) \cong M_W^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}_0}(-,W)}$ (même argument que dans la démonstration du point (b) de 3.10).

On a $\mathrm{EFix}_{(V,W)}(\Sigma^n \mathrm{C}^n_{\mathrm{top}} X) = 0$ pour $W \neq 0$ puisque $\Sigma^n \mathrm{C}^n_{\mathrm{top}} X$ est fini (voir 2.15).

Conséquence du point (a) ci-dessus et du point (a) de 3.6.

La suite exacte de 3.9 et le résultat d'annulation 3.15 montrent que $\rho_{M_W]}$ est un isomorphisme. □

On suppose maintenant que $\mathrm{H}^*_V X$ est libre comme H^*V-module.

On observe que si $\mathrm{H}^*_V X$ est libre comme H^*V-module alors $\mathrm{H}^*_{V/W} X^W$ est libre comme H^*V/W-module. En effet, on a un isomorphisme de H^*V/W-A-modules instables $\mathrm{H}^*_{V/W} X^W \cong \mathrm{Fix}_{(V,W)} \mathrm{H}^*_V X$ (proposition 1.1) et le corollaire 1.19 conduit à l'énoncé suivant :

Proposition 4.12. – *Soit* M *un* H^*V-A-*module instable ; si* M *est libre comme* H^*V*-module, alors le* H^*V/W-A-*module instable* $\mathrm{Fix}_{(V,W)}M$ *est libre comme* H^*V/W*-module.*

Démonstration. – On a $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{H}^*V/W}(\mathbb{F}_2, \mathrm{Fix}_{(V,W)}M) = 0$ d'après 1.19. □

La proposition 4.10 et l'hypothèse de récurrence (HR) montrent que le complexe $\mathrm{Fix}_{(V,W)}(\Sigma^n \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}} X)$ est acyclique pour $W \neq 0$. On en déduit que le complexe $\Psi(\Sigma^n \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}} X)$ est également acyclique. En effet on a

$$\Psi(\Sigma^n \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}} X)(W) \cong \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)}(\Sigma^n \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}} X)$$

et H^*V est un H^*V/W-module plat. La coaugmentation

$$\Psi(\Sigma^n \mathrm{H}^*_V X) \to \Psi(\Sigma^n \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}} X)$$

peut donc être vue comme une résolution de l'objet $\Psi(\Sigma^n \mathrm{H}^*_V X)$ dans la catégorie $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})^{\mathcal{W}_0}$. Le point (c) de la proposition 4.11 dit que cette résolution est une résolution $\lim_{\mathcal{W}_0}$-acyclique ($\lim_{\mathcal{W}_0}$ désigne ici le foncteur exact à gauche $F \mapsto \lim_{\mathcal{W}_0} F$ de $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})^{\mathcal{W}_0}$ dans $V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$), résolution tout aussi adaptée pour étudier les foncteurs dérivés de $\lim_{\mathcal{W}_0}$ qu'une résolution injective, si bien que l'on a :

– $\mathrm{H}^p \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(\Sigma^n \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}} X) = 0$ pour $p = -1, 0$;

– $\mathrm{H}^p \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(\Sigma^n \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}} X) \cong \lim^p_{\mathcal{W}_0} \Psi(\Sigma^n \mathrm{H}^*_V X)$ pour $p > 0$.

Comme le point (b) de 1.15 montre que le foncteur $\Psi : V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U} \to (V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})^{\mathcal{W}_0}$ « commute à la suspension », l'isomorphisme ci-dessus peut être remplacé par :

– $\mathrm{H}^p \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(\Sigma^n \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}} X) \cong \Sigma^n \lim^p_{\mathcal{W}_0} \Psi(\mathrm{H}^*_V X)$ pour $p > 0$.

La proposition 3.9 et le corollaire 3.20 entraînent que l'homomorphisme $\rho_{\mathrm{H}^*_V X}$: $\mathrm{H}^*_V X \to \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(\mathrm{H}^*_V X)$ est un isomorphisme ou ce qui revient au même que l'homomorphisme $\rho_{\Sigma^n \mathrm{H}^*_V X} : \Sigma^n \mathrm{H}^*_V X \to \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(\Sigma^n \mathrm{H}^*_V X)$ est un isomorphisme. Ce dernier point et les points (d) et (b) de 4.11 montrent que l'homomorphisme de $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$-complexes

$$\rho_{\Sigma^n \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}} X} : \Sigma^n \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}} X \longrightarrow \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(\Sigma^n \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}} X)$$

est un épimorphisme dont le noyau est le $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$-complexe, disons $\mathrm{N}^\bullet$, défini par $\mathrm{N}^n = \Sigma^n \mathrm{C}^n_{\mathrm{top}} X$ et $\mathrm{N}^p = 0$ pour $p \neq n$.

Les énoncés 3.9 et 3.20 montrent aussi que l'on a $\lim^p_{\mathcal{W}_0} \Psi(\mathrm{H}^*_V X) = 0$ pour $0 < p < n-1$. On obtient donc $\mathrm{H}^p \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(\Sigma^n \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}} X) = 0$ pour $p < n-1$ ce qui compte tenu de ce qui précède implique bien $\mathrm{H}^p\, \Sigma^n \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}} X = 0$, soit encore $\mathrm{H}^p\, \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}} X = 0$, pour $p < n-1$. □

Seconde étape. – On montre que l'on a aussi $\mathrm{H}^p\, \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}} X = 0$ pour $p = n-1$ et $p = n$. En fait, cette étape n'utilise pas l'hypothèse « $\mathrm{H}^*_V X$ libre comme H^*V-module » :

LEMME 4.13. – *Soient V un 2-groupe abélien élémentaire et X un V-CW-complexe fini. Si l'on a $\mathrm{H}^p\, \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}} X = 0$ pour $p \leq \dim V - 2$ alors $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}} X$ est acyclique.*

Ce lemme est un cas particulier d'un lemme très général concernant la suite spectrale cohomologique associée à une filtration décroissante d'un espace (voir [**1**, Lemma 5.6]). Cependant, pour le confort du lecteur, nous en explicitons une démonstration ci-après.

Démonstration. – Le cas $\dim V = 0$ est trivial ; le cas $\dim V = 1$ est implicitement traité au début de la démonstration de l'implication (i)⇒(ii) de 4.8. On suppose donc $\dim V \geq 2$; on pose à nouveau $n := \dim V$.

On considère la suite spectrale « cohomologique », $(\mathrm{E}_r)_{r\geq 1}$, convergeant vers $\mathrm{H}^*_V X$, associée à la filtration V-équivariante de X par les $\mathrm{F}_p X$, introduite au début de cette section.

On se convainc tout d'abord que cette suite spectrale dégénère au terme E_2.

On a par définition $\mathrm{E}_2^{p,*} = \mathrm{H}^p\, \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}} X$; on a donc par hypothèse $\mathrm{E}_2^{p,*} = 0$ pour $p \neq 0, n-1, n$. Il en résulte que les seules différentielles qui peuvent être non nulles, pour $r \geq 2$, sont les $\mathrm{d}_r : \mathrm{E}_r^{0,q} \to \mathrm{E}_r^{r,q+1-r}$. On montre que celles-ci sont nulles en introduisant la suite spectrale $({}^{\mathrm{tr}}\mathrm{E}_r)_{r\geq 1}$ associée à la filtration triviale de X également évoquée au début de cette section, et le morphisme canonique de suites spectrales, disons η, de $({}^{\mathrm{tr}}\mathrm{E}_r)_{r\geq 1}$ dans $(\mathrm{E}_r)_{r\geq 1}$. On observe que la suite spectrale $({}^{\mathrm{tr}}\mathrm{E}_r)_{r\geq 1}$ est vraiment triviale : ${}^{\mathrm{tr}}\mathrm{E}_1^{p,*} = 0$ pour $p \neq 0$ et ${}^{\mathrm{tr}}\mathrm{E}_1^{0,*} = {}^{\mathrm{tr}}\mathrm{E}_r^{0,*} = \mathrm{H}^*_V X$ pour tout $r \geq 1$.

On suppose $r \geq 2$ et on contemple le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} {}^{\mathrm{tr}}\mathrm{E}_r^{0,q} \arrow[r, "\mathrm{d}_r"] \arrow[d, "\eta"'] & {}^{\mathrm{tr}}\mathrm{E}_r^{r,q+1-r} = 0 \arrow[d, "\eta"'] \\ \mathrm{E}_r^{0,q} \arrow[r, "\mathrm{d}_r"] & \mathrm{E}_r^{r,q+1-r} \end{tikzcd}$$

fourni par le morphisme de suites spectrales η. Pour $r = 2$ on sait que l'homomorphisme $\eta : {}^{\mathrm{tr}}\mathrm{E}_2^{0,q} \to \mathrm{E}_2^{0,q}$ est un isomorphisme : c'est une conséquence de l'égalité $\mathrm{H}^0\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,X = 0$; ceci montre que la différentielle $\mathrm{d}_2 : \mathrm{E}_2^{0,q} \to \mathrm{E}_2^{2,q-1}$ est nulle et que l'homomorphisme $\eta : {}^{\mathrm{tr}}\mathrm{E}_3^{0,q} \to \mathrm{E}_3^{0,q}$ est un isomorphisme. En itérant l'argument, on montre que toutes les différentielles $\mathrm{d}_r : \mathrm{E}_r^{0,q} \to \mathrm{E}_r^{r,q+1-r}$ sont nulles pour $r \geq 2$.

On sait maintenant que la suite spectrale $(\mathrm{E}_r)_{r\geq 1}$ dégénère au terme E_2. En considérant à nouveau le morphisme η, on se convainc que l'homomorphisme canonique $\mathrm{E}_\infty^{0,*} \to \mathrm{H}_V^* X$ est un isomorphisme. Il en résulte $\mathrm{E}_2^{p,*} = 0$ pour $p = n-1$ et $p = n$, c'est-à-dire $\mathrm{H}^p\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,X = 0$ pour $p = n-1$ et $p = n$. □

Corollaire 4.14. – *Soient V un 2-groupe abélien élémentaire et X un V-CW-complexe fini. Si $\mathrm{H}_V^* X$ est libre comme H^*V-module alors le* A*-module*

$$\Sigma^{-\dim V}\,\mathrm{H}_V^*(X, \mathrm{Sing}_V X)$$

est instable.

Démonstration. – On procède toujours par récurrence sur l'entier $n = \dim V$. Là encore le cas $n = 0$ est trivial ; on suppose donc $n \geq 1$ et on montre que si l'énoncé est vrai pour $\dim V = n-1$ alors il l'est aussi pour $\dim V = n$.

Compte tenu du point (a) de la proposition 4.7, le théorème 4.8 dit en particulier que l'on a un épimorphisme de A-modules

$$\bigoplus_{\dim W = 1} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \Sigma^{-(n-1)}\,\mathrm{H}_{V/W}^*(X^W, \mathrm{Sing}_{V/W} X^W) \to \Sigma^{-n}\,\mathrm{H}_V^*(X, \mathrm{Sing}_V X).$$

Pour tous les W ci-dessus, X^W est un V/W-CW-complexe fini avec $\mathrm{H}_{V/W}^* X^W$ libre comme H^*V/W-module (proposition 4.12) ; la source de l'épimorphisme en question est donc un A-module instable d'après l'hypothèse de récurrence. Du coup il en est de même pour le but. □

Corollaire 4.15. – *Soient V un 2-groupe abélien élémentaire et X un V-CW-complexe fini. Si $\mathrm{H}_V^* X$ est libre comme H^*V-module alors le* A*-module $\mathrm{C}^p_{\mathrm{top}}\,X$ est instable pour tout p.*

L'énoncé ci-dessous précise l'énoncé 4.14 :

Théorème 4.16. – *Soient V un 2-groupe abélien élémentaire et X un V-CW-complexe fini. Si* $\mathrm{H}_V^* X$ *est libre comme* $\mathrm{H}^* V$*-module alors on a un isomorphisme canonique de* $\mathrm{H}^* V_{\mathrm{tf}}$-A-*modules instables*

$$\Sigma^{-n}\,\mathrm{H}_V^*(X, \mathrm{Sing}_V X) \;\cong\; \mathrm{R}^n\mathrm{Pf}\,\mathrm{H}_V^* X$$

($n := \dim_{\mathbb{Z}/2} V$).

Démonstration. – Le cas $n = 0$ est trivial. Le cas $n = 1$ sera traité séparément. On suppose $n \geq 2$ et on reprend la suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow \mathrm{N}^\bullet \longrightarrow \Sigma^n\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,X \xrightarrow{\rho_{\Sigma^n\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,X}} \lim_{\mathcal{W}_0}\Psi(\Sigma^n\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,X) \longrightarrow 0$$

implicitement introduite à la fin de la première étape de la démonstration de l'implication (i)⇒(ii) de 4.8. Comme le complexe $\Sigma^n\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,X$ est acyclique si $\mathrm{H}_V^* X$ est libre comme $\mathrm{H}^* V$-module, le connectant

$$\mathrm{H}^{n-1}\lim_{\mathcal{W}_0}\Psi(\Sigma^n\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,X) \longrightarrow \mathrm{H}^n\,\mathrm{N}^\bullet = \mathrm{H}_V^*(X, \mathrm{Sing}_V X)$$

est un (V_{tf}-$\mathcal{U}$)-isomorphisme. On a déjà vu que l'on a un (V_{tf}-$\mathcal{U}$)-isomorphisme $\mathrm{H}^{n-1}\lim_{\mathcal{W}_0}\Psi(\Sigma^n\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,X) \cong \Sigma^n \lim^{n-1}_{\mathcal{W}_0}\Psi(\mathrm{H}_V^* X)$ et 3.9 dit que $\lim^{n-1}_{\mathcal{W}_0}\Psi(\mathrm{H}_V^* X)$ est (V_{tf}-$\mathcal{U}$)-isomorphe à $\mathrm{R}^n\mathrm{Pf}\,\mathrm{H}_V^* X$. □

Le cas $n = 1$. On a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{H}_V^* X \to \mathrm{H}^* V \otimes \mathrm{H}^* X^V \to \Sigma^{-1}\mathrm{H}_V^*(X, X^V) \to 0$$

dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$ et $\mathrm{H}^* V \otimes \mathrm{H}^* X^V$ est Pf-acyclique d'après 3.20. □

La démonstration que nous venons de donner du théorème 4.16 dans le cas $n = 1$ sera généralisée en 5.12. Ce théorème sera revisité en 6.14.

Bande-annonce. – Comme expliqué dans l'introduction le théorème 4.8 admet une généralisation, à savoir le théorème 0.7 dû à Allday, Franz et Puppe. Le théorème 0.9 est une version de ce théorème que nous démontrerons en section 6 (l'énoncé 6.20 reproduit l'énoncé 0.9).

CHAPITRE 5

LE COMPLEXE ALGÉBRIQUE

Dans cette section nous associons à un H^*V-A-module instable M un complexe de cochaînes

$$\mathrm{C}^0\, M \to \mathrm{C}^1\, M \to \mathrm{C}^2\, M \to \cdots \mathrm{C}^p\, M \to \cdots \to \mathrm{C}^n\, M,$$

coaugmenté par M ; nous le notons $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\, M$ (on a donc $\widetilde{\mathrm{C}}^{-1}\, M = M$). Nous étudions ce complexe quand M est de type fini comme H^*V-module. Dans la prochaine section nous comparerons le complexe $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\, X$, associé à un V-CW-complexe fini X, au complexe $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{alg}}\, X := \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\, \mathrm{H}_V X$ que nous appelons le complexe algébrique associé à X. Nous montrerons en particulier que si $\mathrm{H}^*_V X$ est libre comme H^*V-module alors les deux complexes sont isomorphes.

Filtration d'un H^*V-A-module instable

Soient V un 2-groupe abélien élémentaire de dimension n, $W \subset V$ un sous-groupe et M un H^*V-A-module instable.

On rappelle que l'on note

$$\eta_{(V,W)}{}_M : M \to \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)} M$$

l'unité de l'adjonction de la paire de foncteurs adjoints $(\mathrm{e}_{(V,W)}, \mathrm{Fix}_{(V,W)})$.

On définit une filtration décroissante de M par des sous-H^*V-A-modules instables

$$M = \mathrm{F}^0 M \supset \mathrm{F}^1 M \supset \cdots \supset \mathrm{F}^n M \supset \mathrm{F}^{n+1} M = 0$$

en posant

$$\mathrm{F}^p M := \bigcap_{\operatorname{codim} W < p} \ker\left(\eta_{(V,W)}{}_M : M \to \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)} M\right)$$

(l'égalité $M = \mathrm{F}^0 M$ tient au fait que l'ensemble $\{W ; \operatorname{codim} W < 0\}$ est vide !). Compte tenu de la proposition 1.24, on peut alternativement définir cette filtration en posant

$$\mathrm{F}^p M := \bigcap_{\operatorname{codim} W < p} \ker\left(\rho_{(V,W)}{}_M : M \to \mathrm{EFix}_{(V,W)} M\right).$$

Soient W_0 et W_1 deux sous-groupes de V avec $W_0 \subset W_1$, la proposition 1.20 dit que l'on a $\rho_{(V,W_1)} = \rho(W_0, W_1) \circ \rho_{(V,W_0)}$; on peut donc également dans la définition de F^p remplacer $\bigcap_{\operatorname{codim} W<p}$ par $\bigcap_{\operatorname{codim} W=p-1}$.

Trois commentaires concernant cette définition :

1) L'exactitude des foncteurs EFix implique :

Proposition 5.1. – *Soient M un H^*V-A-module instable, $M' \subset M$ un sous-objet, et p un entier naturel. On a l'égalité $\mathrm{F}^p M' = M' \cap \mathrm{F}^p M$.*

2) Le scholie 1.2 (ou la proposition 1.7) conduit à l'énoncé ci-dessous et fournit du même coup une motivation pour la définition ci-dessus (voir la partie de l'introduction qui suit l'intertitre « Le complexe algébrique ») :

Proposition 5.2. – *Soit X un V-CW-complexe fini. Alors on a*

$$\mathrm{F}^p\,\mathrm{H}^*_V X = \bigcap_{\operatorname{codim} W<p} \ker\left(\mathrm{H}^*_V X \to \mathrm{H}^*_V X^W\right).$$

3) La théorie de Smith algébrique [**16**][**33**, théorème 0.5] et [**40**, §2, corollaire] impliquent que $\mathrm{F}^1 M$ est la H^*V-torsion de M (sans aucune hypothèse sur le H^*V-A-module instable M, voir 9.15). Concernant $\mathrm{F}^n M$, on a :

Proposition 5.3. – *Soit M un H^*V-A-module instable. Si l'on suppose que M est de type fini comme H^*V-module alors on a $\mathrm{F}^n M$ est la partie finie $\mathrm{Pf}M$ de M.*

Démonstration. – Soit $N \subset M$ un sous-H^*V-A-module instable fini ; l'implication (iv)⇒ (ii-bis) de 2.14 montre $N \subset \mathrm{F}^n M$. Puisque les foncteurs $\mathrm{EFix}_{(V,W)}$ sont exacts, on a $\mathrm{EFix}_{(V,W)}(\mathrm{F}^n M) = 0$ pour $\dim W = 1$. Si l'on suppose M de type fini comme H^*V-module alors il en est de même pour $\mathrm{F}^n M$ et l'implication (ii-bis)⇒(iv) de 2.14 montre que $\mathrm{F}^n M$ est fini. □

On voit donc que $\mathrm{F}^1 M$ et $\mathrm{F}^n M$ peuvent être définis en termes de la structure de H^*V-module de M, au moins sous l'hypothèse que celle-ci est de type fini. On verra dans la section 9 que c'est en fait le cas de tous les $\mathrm{F}^p M$ (même sans l'hypothèse que M est de type fini comme H^*V-module).

On sera aussi amené à considérer le gradué de la filtration de M par les $\mathrm{F}^p M$:

$$\mathrm{Gr}^p M := \mathrm{F}^p M \,/\, \mathrm{F}^{p+1} M,\ 0 \leq p \leq n.$$

Il est clair que les applications $M \mapsto \mathrm{F}^p M$ et $M \mapsto \mathrm{Gr}^p M$ peuvent être considérées comme des endofoncteurs de V-$\mathcal{U}$ et comme des endofoncteurs de V_{tf}-$\mathcal{U}$ si l'on suppose que M est de type fini comme H^*V-module. Ces endofoncteurs « commutent » aux sommes directes dans V-$\mathcal{U}$ et aux sommes directes finies dans V_{tf}-$\mathcal{U}$ (qui coïncident avec les produit finis).

On dégage maintenant quelques propriétés de la filtration introduite ci-dessus (et de son gradué) lorsque M est de type fini comme H^*V-module.

On explicite d'abord cette filtration dans le cas où M est un objet injectif indécomposable de V_{tf}-$\mathcal{U}$, c'est-à-dire, d'après le théorème 2.5, dans le cas

$M = \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} \mathrm{J}_{V/U}(k)$ avec $(U,k) \in \mathcal{W} \times \mathbb{N}$. Le H^*V/U-A-module instable $\mathrm{J}_{V/U}(k)$ est fini et il ne coûte en fait pas plus cher de supposer plus généralement $M = \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N$ avec N un H^*V/U-A-module instable fini.

Proposition 5.4. – *Soient $U \subset V$ un sous-groupe et N un H^*V/U-A-module instable fini. Alors on a*

$$\mathrm{F}^p\left(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N\right) = \begin{cases} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N & \textit{pour } p \leq \operatorname{codim} U, \\ 0 & \textit{pour } p > \operatorname{codim} U, \end{cases}$$

soit encore

$$\mathrm{Gr}^p\left(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N\right) = \begin{cases} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N & \textit{pour } p = \operatorname{codim} U, \\ 0 & \textit{pour } p \neq \operatorname{codim} U. \end{cases}$$

Démonstration. – Conséquence de la proposition 1.27. □

L'énoncé ci-dessus ouvre la voie au suivant :

Proposition-Définition 5.5. – *Soient M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable et p un entier avec $0 \leq p \leq n$. Soit*

$$\Pi^p_M : M \longrightarrow \bigoplus_{\operatorname{codim} W = p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)} M$$

le produit des homomorphismes $\eta_{(V,W),M}$ pour $\operatorname{codim} W = p$.

(a) *La restriction de Π^p_M à $\mathrm{F}^{p+1}M$ est nulle.*

(b) *L'image de la restriction de Π^p_M à F^pM est contenue dans le sous-H^*V-A-module instable*

$$\bigoplus_{\operatorname{codim} W = p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Pf}_{V/W}\left(\mathrm{Fix}_{(V,W)} M\right).$$

(Décodons la notation : $\mathrm{Fix}_{(V,W)} M$ est d'après 2.9 un H^*V/W-A-module instable de type fini comme H^*V/W-module et $\mathrm{Pf}_{V/W}$ désigne l'endofoncteur « partie finie » de V/W_{tf}-$\mathcal{U}$. La somme directe ci-dessus s'identifie bien à un sous-module de la précédente car H^*V est plat sur H^*V/W.)

On note

$$\overline{\Pi}^p_M : \mathrm{Gr}^p M \longrightarrow \bigoplus_{\operatorname{codim} W = p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Pf}_{V/W}\left(\mathrm{Fix}_{(V,W)} M\right)$$

l'homomorphisme de H^*V-A-modules instables induit par Π^p_M.

(c) *L'homomorphisme $\overline{\Pi}^p_M$ est un isomorphisme si M est un V_{tf}-$\mathcal{U}$-injectif.*

Conséquence de la définition même de $\mathrm{F}^{p+1}M$.

Démonstration du (b). – 1) On commence par le cas $M = \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N$ avec U un sous-groupe de V et N un H^*V/U-A-module instable fini :

– Si l'on a $\operatorname{codim} U < p$ alors on a $\mathrm{F}^p M = 0$ d'après 5.4 et (b) est trivialement vérifié.

– Si l'on a $\operatorname{codim} U > p$ alors on a $W \not\subset U$ pour tout W avec $\operatorname{codim} W = p$. Il en résulte $\Pi^p_M = 0$ d'après 1.27 et (b) est encore trivialement vérifié.

– Si l'on a $\operatorname{codim} U = p$ alors il existe un seul W avec $\operatorname{codim} W = p$ et $W \subset U$ à savoir U lui-même si bien que, compte tenu de 1.25 et 1.5, le seul facteur non nul de $\bigoplus_{\operatorname{codim} W=p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)} M$ est $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} \mathrm{Fix}_{(V,U)} M$. On a $\mathrm{Fix}_{(V,U)} M \cong N$ d'après 1.26 et donc $\mathrm{Pf}_{V/U}\,(\mathrm{Fix}_{(V,U)} M) = \mathrm{Fix}_{(V,U)} M$; le point (b) est bien vérifié.

2) D'après 2.5 un V_{tf}-$\mathcal{U}$-injectif est une somme directe finie de H^*V-A-modules instables du type considéré ci-dessus ; le point (b) est donc vérifié si M est V_{tf}-$\mathcal{U}$-injectif.

3) On en vient enfin au cas général. D'après 2.4 il existe un homomorphisme injectif de H^*V-A-modules instables $i : M \to I$ tel que I est V_{tf}-$\mathcal{U}$-injectif. Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{F}^p M & \xrightarrow{\text{restriction de } \Pi^p_M} & \bigoplus_{\operatorname{codim} W=p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)} M \\
{\scriptstyle \mathrm{F}^p\, i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \bigoplus_{\operatorname{codim} W=p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)}\, i} \\
\mathrm{F}^p I & \xrightarrow{\text{restriction de } \Pi^p_I} & \bigoplus_{\operatorname{codim} W=p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)} I
\end{array}$$

est commutatif (fonctorialité). La contemplation de ce diagramme montre que le point (b) est vérifié pour M. Détaillons un peu. On pose $P = \mathrm{Fix}_{(V,W)} M$, $J = \mathrm{Fix}_{(V,W)} I$ et $j = \mathrm{Fix}_{(V,W)}\, i$. L'homomorphisme j est injectif puisque le foncteur $\mathrm{Fix}_{(V,W)}$ est exact ; il en résulte $j^{-1}(\mathrm{Pf}_{V/W}(J)) = \mathrm{Pf}_{V/W}(P)$. Soient x un élément de $\mathrm{F}^p M$ et y son image dans $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} P$; le fait que le point (b) soit vérifié pour I entraîne que y appartient à l'image inverse

$$(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} j)^{-1}(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Pf}_{V/W}(J)).$$

Or cette image inverse s'identifie à

$$\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} j^{-1}(\mathrm{Pf}_{V/W}(J)) = \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Pf}_{V/W}(P)\,;$$

en effet, puisque H^*V est un H^*V/W-module plat, le produit tensoriel par H^*V « commute aux produits fibrés ». □

Démonstration du (c). – À nouveau il suffit de vérifier que $\overline{\Pi}^p_M$ est un isomorphisme pour $M = \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N$ avec U un sous-groupe de V et N un H^*V/U-A-module instable fini ; pour cela on utilise encore 1.27. □

La notion de H^*V-A-module instable e-fini

La proposition 5.4 et la démonstration des points (b) et (c) de la proposition 5.5 suggère d'introduire la définition *ad hoc* suivante :

DÉFINITION 5.6. – *Nous dirons qu'un* H^*V-A-*module instable* M *est* e-fini *s'il est isomorphe à une somme directe de la forme*

$$\bigoplus_{U \in \mathcal{W}} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N_U$$

avec N_U *un* H^*V/U-A-*module instable fini.*

(L'intrigant préfixe « e » de notre terminologie « e-fini » est pour « extension des scalaires ».)

EXEMPLE 5.7. – Un V_{tf}-$\mathcal{U}$-injectif est e-fini.

Ce que l'on a appris en démontrant 5.4 et 5.5 conduit au scholie suivant :

SCHOLIE 5.8. – *Soient* N_U, $U \in \mathcal{W}$, *des* H^*V/U-A-*modules instable finis ; on pose*

$$M = \bigoplus_{U \in \mathcal{W}} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N_U .$$

(a) *Les* H^*V/U-A-*modules instables finis* N_U *sont uniquement déterminés, à isomorphisme près, en fonction du* H^*V-A-*module instable* M. *Plus précisément on a :*

$$N_U \;\cong\; \mathrm{Pf}_{V/U}\,(\mathrm{Fix}_{(V,U)} M).$$

(b) *Soit* p *un entier. On a :*

$$\mathrm{F}^p\, M \;\cong \bigoplus_{\operatorname{codim} U \geq p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N_U \;\mathit{et}\, \mathrm{Gr}^p\, M \;\cong \bigoplus_{\operatorname{codim} U = p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N_U .$$

Les propositions 3.14 et 3.15 fournissent l'énoncé suivant :

PROPOSITION 5.9. – *Soit* M *un* H^*V-A-*module instable e-fini. Alors on a* $\mathrm{R}^p\mathrm{Pf} M = 0$ *pour* $p > 0$ *; en d'autres termes* M *est* Pf-acyclique.

COROLLAIRE-DÉFINITION 5.10. – *Soient* M *un* $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-*module instable et*

$$0 \to M \to C^0 \to C^1 \to \cdots \to C^p \to \cdots$$

une résolution de M *dans la catégorie* V_{tf}-$\mathcal{U}$, *telle que* C^p *est e-fini pour tout* $p \geq 0$. *Alors on a* $\mathrm{R}^p\mathrm{Pf} M \cong \mathrm{H}^p\mathrm{Pf} C^\bullet$ *pour tout* $p \geq 0$.

On dira qu'une résolution comme ci-dessus est une résolution e-finie *de* M.

Corollaire 5.11. – *Soient M un* $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A*-module instable et S un* A*-module instable fini ; on munit le produit tensoriel $S\otimes M$ de sa structure évidente de* H^*V-A*-module instable. Alors on a un isomorphisme canonique de* H^*V-A*-modules instables (finis)*

$$\mathrm{R}^p\mathrm{Pf}\,(S\otimes M)\;\cong\;S\otimes\mathrm{R}^p\mathrm{Pf}\,M$$

pour tout $p\geq 0$ *(en particulier les foncteurs dérivés* $\mathrm{R}^p\mathrm{Pf}$ *« commutent à la suspension »).*

Démonstration. – Soit $M\to I^\bullet$ une résolution injective de M dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$. La résolution $S\otimes M\to S\otimes I^\bullet$ n'est pas en général injective mais elle est toujours e-finie. □

Pour clore notre discussion sur la notion de H^*V-A-module instable e-fini, nous montrons que les énoncés 5.10 et 5.11 conduisent à une démonstration alternative du théorème 4.16 :

Exemple 5.12. – Soit X un V-CW-complexe fini avec H^*_VX libre comme H^*V-module. Le théorème 4.8 dit que

$$0\to\Sigma^n\,\mathrm{H}^*_VX\to\Sigma^n\,\mathrm{C}^0_{\mathrm{top}}\,X\to\cdots\to\Sigma^n\,\mathrm{C}^p_{\mathrm{top}}\,X\to\cdots\to\Sigma^n\,\mathrm{C}^n_{\mathrm{top}}\,X\to 0$$

est une résolution de $\Sigma^n\,\mathrm{H}^*_VX$ dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$. On fait les constatations suivantes :

– $\Sigma^n\,\mathrm{C}^p_{\mathrm{top}}\,X$ est e-fini pour tout p ;

– $\mathrm{Pf}\,(\Sigma^n\,\mathrm{C}^p_{\mathrm{top}}\,X)=0$ pour tout $p<n$;

– $\Sigma^n\,\mathrm{C}_{\mathrm{top}}\,X\cong\mathrm{H}^*_V(X,\mathrm{Sing}_VX)$ est fini.

On a donc $\mathrm{R}^n\mathrm{Pf}\,(\Sigma^n\,\mathrm{H}^*_VX)\;\cong\;\mathrm{H}^*_V(X,\mathrm{Sing}_VX)$ d'après 5.10. D'autre part on a $\mathrm{R}^n\mathrm{Pf}\,(\Sigma^n\,\mathrm{H}^*_VX)\cong\Sigma^n\,\mathrm{R}^n\mathrm{Pf}\,\mathrm{H}^*_VX$ d'après 5.11.

Remarque 5.13. – La démonstration ci-dessus dit aussi que l'on a $\mathrm{R}^p\mathrm{Pf}\,\mathrm{H}^*_VX=0$ pour $p<n$ ce qui est en accord avec 3.20.

On reviendra sur le théorème 4.16 dans la prochaine section et on montrera en particulier sa relation avec [**24**].

Complexe associé à un H^*V-A-module instable

Soit M un H^*V-A-module instable ; on définit un complexe de cochaînes dans la catégorie V-$\mathcal{U}$

$$\mathrm{C}^\bullet M=(\mathrm{C}^0M\to\cdots\to\mathrm{C}^pM\to\mathrm{C}^{p+1}M\to\cdots\to\mathrm{C}^nM\to 0\to 0\to\cdots)$$

de la façon suivante :

On choisit une résolution injective $M\to I^\bullet$ de M dans la catégorie V-$\mathcal{U}$. On pose

$$\mathrm{C}^pM=\mathrm{H}^p\mathrm{Gr}^pI^\bullet$$

et on prend pour cobord $\mathrm{C}^pM \to \mathrm{C}^{p+1}M$ l'homomorphisme connectant $\mathrm{H}^p\mathrm{Gr}^pI^\bullet \to \mathrm{H}^{p+1}\mathrm{Gr}^{p+1}I^\bullet$ associé à la suite exacte de complexes de cochaînes

$$0 \to \mathrm{Gr}^{p+1}I^\bullet \to \mathrm{F}^pI^\bullet/\mathrm{F}^{p+2}I^\bullet \to \mathrm{Gr}^pI^\bullet \to 0.$$

Les mantras habituels de la théorie des résolutions injectives montrent que $\mathrm{C}^\bullet M$ est indépendant du choix de la résolution injective de M et que la correspondance $M \mapsto \mathrm{C}^\bullet M$ est fonctorielle en M.

Remarque 5.14. – Si l'on a, comme Bourbaki, des scrupules de théorie des ensembles, on peut choisir pour résolution injective de M une résolution « standard ». Précisons un peu. Soient $\mathcal{E}^*$ la catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels $\mathbb{N}$-gradués et $\mathcal{O}: V\text{-}\mathcal{U} \to \mathcal{E}^*$ le foncteur oubli (notation locale !). On observe que $\mathcal{O}$ admet un adjoint à droite $\widetilde{\mathcal{O}}$, que $\widetilde{\mathcal{O}}\mathcal{O}M$ est un V-$\mathcal{U}$-injectif, et que l'unité de l'adjonction $M \to \widetilde{\mathcal{O}}\mathcal{O}M$ est injective ; la suite est routine.

Le complexe $\mathrm{C}^\bullet M$ est naturellement coaugmenté par M. On peut s'en convaincre en procédant comme dans la section 4. On considère la filtration décroissante « triviale » de M définie par

$$\mathrm{F}^p_{\mathrm{tr}}M = \begin{cases} M & \text{pour } p = 0, \\ 0 & \text{pour } 1 \leq p \leq n+1. \end{cases}$$

Le complexe obtenu en remplaçant dans la définition de $\mathrm{C}^\bullet M$ les F^p par les $\mathrm{F}^p_{\mathrm{tr}}$ est $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{tr}}M := (M \to 0 \to 0 \to \cdots)$. L'homomorphisme de complexes $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{tr}}M \to \mathrm{C}^\bullet M$ fournit la coaugmentation évoquée plus haut ; le complexe coaugmenté $M \to \mathrm{C}^\bullet M$ est noté $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet M$.

Proposition 5.15. – *Soit M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable.*

(a) *Le complexe $\mathrm{C}^\bullet M$ est un complexe dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$.*

(b) *Pour $0 \leq p \leq n$ on a un isomorphisme canonique de H^*V-A-modules instables*

$$\mathrm{C}^pM \cong \bigoplus_{\operatorname{codim} W = p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{R}^p\mathrm{Pf}_{V/W}\left(\mathrm{Fix}_{(V,W)}M\right)$$

(la notation $\mathrm{R}^p\mathrm{Pf}_{V/W}$ ci-dessus désigne le p-ième dérivé de l'endofoncteur $\mathrm{Pf}_{V/W}$ de V/W_{tf}-$\mathcal{U}$).

Démonstration. – Soit $M \to I^\bullet$ une résolution injective de M dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$. C'est aussi une résolution injective dans la catégorie V-$\mathcal{U}$ (voir section 2) ; cette observation démontre le point (a). Passons au point (b). Le scholie 5.8 dit que l'on a

$$\mathrm{Gr}^pI^\bullet \cong \bigoplus_{\operatorname{codim} W = p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Pf}_{V/W}\left(\mathrm{Fix}_{(V,W)}I^\bullet\right).$$

D'après le point (b) de la proposition 2.8, $\mathrm{Fix}_{(V,W)}M \to \mathrm{Fix}_{(V,W)}I^\bullet$ est une résolution injective dans la catégorie V/W_{tf}-$\mathcal{U}$; on a donc

$$\mathrm{H}^p\,\mathrm{Pf}_{V/W}\left(\mathrm{Fix}_{(V,W)}I^\bullet\right) \cong \mathrm{R}^p\mathrm{Pf}_{V/W}\left(\mathrm{Fix}_{(V,W)}M\right).$$

Comme H^*V est plat sur H^*V/W on obtient bien au bout du compte un isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^p\mathrm{Gr}^p I^\bullet \cong \bigoplus_{\operatorname{codim} W=p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{R}^p\mathrm{Pf}_{V/W}\,(\mathrm{Fix}_{(V,W)}M)$$

c'est-à-dire le point (b) (qui implique le point (a) !). □

Pendant algébrique du théorème 4.8

Il s'agit de l'énoncé suivant :

THÉORÈME 5.16. – *Soit M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le H^*V-module sous-jacent à M est libre.*
(ii) *Le complexe coaugmenté $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet M$ est acyclique.*

Elle est identique à celle de l'implication (ii)⇒(i) du théorème 4.8.

L'ingrédient essentiel de cette démonstration est le corollaire 3.20.

Soient M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable et $M \to I^\bullet$ une résolution injective de M dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$. On considère la suite spectrale « cohomologique » $(\mathrm{E}_r)_{r\geq 1}$ définie par la filtration du complexe $I^\bullet$ par les $\mathrm{F}^pI^\bullet$. Cette suite spectrale, à valeurs dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$, est indépendante du choix de $I^\bullet$ et fonctorielle en M.

– On a $\mathrm{E}_1^{p,q} = \mathrm{H}^{p+q}\mathrm{Gr}^pI^\bullet$ et la différentielle $\mathrm{d}_1 : \mathrm{E}_1^{p,q} \to \mathrm{E}_1^{p+1,q}$ est l'homomorphisme connectant associé à la suite exacte de complexes

$$0 \to \mathrm{Gr}^{p+1}I^\bullet \to \mathrm{F}^pI^\bullet/\mathrm{F}^{p+2}I^\bullet \to \mathrm{Gr}^pI^\bullet \to 0,$$

si bien que $\mathrm{C}^\bullet M$ n'est rien d'autre que la ligne $q=0$ de E_1 vue comme un complexe de cochaînes.

– Comme $\mathrm{Gr}^pI^\bullet$ est nul pour $p<0$ ou $p>n$, $\mathrm{E}_1^{p,q}\neq 0$ implique $p\geq 0$ et $p\leq n$. La suite spectrale dégénère donc *a priori* au terme E_{n+1}. On observera que $\mathrm{E}_1^{p,q}\neq 0$ implique aussi $p+q\geq 0$.

– L'isomorphisme $\mathrm{Gr}^pI^\bullet \cong \bigoplus_{\operatorname{codim} W=p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Pf}_{V/W}\,(\mathrm{Fix}_{(V,W)}I^\bullet)$ déjà utilisé dans la démonstration du point (b) de 5.15 donne pareillement l'isomorphisme

$$\mathrm{E}_1^{p,q} \cong \bigoplus_{\operatorname{codim} W=p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{R}^{p+q}\mathrm{Pf}_{V/W}\,(\mathrm{Fix}_{(V,W)}M)\,;$$

compte tenu de la proposition 3.13, cet isomorphisme montre finalement que $\mathrm{E}_1^{p,q}\neq 0$ implique $p\geq 0$, $p\leq n$, $p+q\geq 0$ et $q\leq 0$.

– Puisque $M \to I^\bullet$ est une résolution, l'aboutissement de la suite spectrale est connu :

$$\mathrm{E}_\infty^{p,q} = \begin{cases} \mathrm{Gr}^pM & \text{pour } p+q=0,\\ 0 & \text{pour } p+q>0.\end{cases}$$

(Pour se convaincre de l'égalité $\mathrm{E}_\infty^{p,-p} = \mathrm{Gr}^p M$, on vérifie que l'image de l'homomorphisme $\mathrm{H}^0\mathrm{F}^p I^\bullet \to \mathrm{H}^0 I^\bullet$ s'identifie à $\mathrm{F}^p M$.)

On suppose maintenant que la condition (i) est vérifiée. La proposition 4.12 et le corollaire 3.20 montrent que l'on a $\mathrm{E}_1^{p,q} = 0$ pour $q \neq 0$. Il en résulte que la suite spectrale dégénère au terme E_2. On en déduit $\mathrm{H}^p\mathrm{C}^\bullet M = \mathrm{E}_2^{p,0} = \mathrm{E}_\infty^{p,0} = 0$ pour $p > 0$. Pour $p = 0$ on obtient $\mathrm{H}^0\mathrm{C}^\bullet M = \mathrm{E}_2^{0,0} = \mathrm{E}_\infty^{0,0} = \mathrm{Gr}^0 M$. Comme le H^*V-module sous-jacent à M est libre et *a fortiori* sans torsion on a $\mathrm{F}^1 M = 0$ et donc $\mathrm{Gr}^0 M \cong M$ (on peut contourner l'argument $\mathrm{F}^1 M = 0$ en observant que la considération de la suite spectrale donne $\mathrm{Gr}^p M = 0$ pour $p > 0$). Pour se convaincre de ce que l'isomorphisme $\mathrm{H}^0\mathrm{C}^\bullet M \cong M$ obtenu ci-dessus est bien induit par la coaugmentation, considérer la suite spectrale, disons $({}_{\mathrm{tr}}\mathrm{E}_r)_{r\geq 1}$, définie par la filtration de $I^\bullet$ par les $\mathrm{F}^p_{\mathrm{tr}} I^\bullet$ (suite spectrale particulièrement triviale : ${}_{\mathrm{tr}}\mathrm{E}_1^{0,0} \cong M$ et ${}_{\mathrm{tr}}\mathrm{E}_1^{p,q} = 0$ pour $(p,q) \neq (0,0)$) et invoquer la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
{}_{\mathrm{tr}}\mathrm{E}_1^{0,0} \arrow[r] \arrow[d] & {}_{\mathrm{tr}}\mathrm{E}_\infty^{0,0} \arrow[d] \\
\mathrm{E}_1^{0,0} \arrow[r] & \mathrm{E}_\infty^{0,0}
\end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches verticales sont induites par les inclusions $\mathrm{F}^p_{\mathrm{tr}} \subset \mathrm{F}^p$.

Maintenant que la démonstration de l'implication (i)⇒(ii) du théorème 5.16 est achevée, nous dégageons, en vue d'une future utilisation, un énoncé qui résulte facilement de ce que nous avons appris, lors de cette démonstration, sur la suite spectrale $(\mathrm{E}_r)_{r\geq 1}$ obtenue en filtrant une résolution injective $I^\bullet$ d'un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable M arbitraire par les $\mathrm{F}^p I^\bullet$:

SCHOLIE 5.17. – *Pour tout* $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-*module instable* M, *on a* $\mathrm{H}^p\,\mathrm{C}^\bullet M = 0$ *pour* $p \geq \sup(1, \dim V - 1)$.

Démonstration. – On pose comme d'habitude $n = \dim V$. On a vu notamment que l'on a :

(1) $\mathrm{E}_1^{p,q} = 0$ pour $q > 0$ et $p > n$;

(2) $\mathrm{E}_\infty^{p,q} = 0$ pour $p + q > 0$.

Le point (1) implique $\mathrm{E}_2^{p,0} = \mathrm{E}_\infty^{p,0}$ pour $p \geq n - 1$; le point (2) implique $\mathrm{E}_\infty^{p,0} = 0$ pour $p \geq 1$. Or on a par définition même $\mathrm{H}^p\,\mathrm{C}^\bullet M = \mathrm{E}_2^{p,0}$. □

Généralisation du théorème 5.16

Le théorème 5.20 ci-après (reproduisant 0.10) est le pendant algébrique d'une version du théorème 10.2 de **[2]** que nous avons évoquée dans l'introduction (théorème 0.9) ; nous verrons en section 6 que le théorème 5.20 implique le théorème 6.20 (reproduisant 0.9) qui est la version en question.

L'énoncé 5.20 fait intervenir les deux définitions suivantes (reproduisant 0.6 et 0.8) :

Définition 5.18. – *Soient M un H^*V-module $\mathbb{N}$-gradué et $j \geq 0$ un entier. On dit que M est une* H^*V-j-syzygie *s'il existe une suite exacte de H^*V-modules $\mathbb{N}$-gradués*

$$0 \to M \to L^0 \to L^1 \to \cdots \to L^{j-1}$$

avec $L^0, L^1, \ldots, L^{j-1}$ libres (on convient que tout M est une H^*V-0-syzygie).

Définition 5.19. – *Soient M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable et $j \geq 0$ un entier. Nous dirons que M est une* $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$-$j$-syzygie *s'il existe une suite exacte dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$*

$$0 \to M \to L^0 \to L^1 \to \cdots \to L^{j-1}$$

avec $L^0, L^1, \ldots, L^{j-1}$ libres comme H^*V-modules (nous convenons que tout M est une $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$-0-syzygie).

Théorème 5.20. – *Soient M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable et $j \geq 0$ un entier. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *M est une $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$-$j$-syzygie ;*
(ii) *le H^*V-module sous-jacent à M est une H^*V-j-syzygie ;*
(iii) *on a $\mathrm{H}^p\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet M = 0$ pour $p \leq j-2$.*

Ce théorème nous permettra en section 6 de retrouver le théorème 0.7 en utilisant, comme pour le théorème 0.1, la théorie des H^*-A-modules instables.

Passons à sa démonstration. L'implication (i)⇒(ii) est évidente. Nous vérifions (ii)⇒(iii) et (iii)⇒(i).

Démonstration de l'implication (ii)⇒(iii) *de 5.20.* – On commence par deux énoncés bon marché qui concernent les H^*V-modules $\mathbb{N}$-gradués.

Lemme 5.21. – *Soit M un H^*V-module $\mathbb{N}$-gradué. Si M est une H^*V-j-syzygie alors on a $\mathrm{Tor}_k^{\mathrm{H}^*V}(\mathbb{F}_2, M) = 0$ pour $k > \sup(0, \dim V - j)$.*

Démonstration. – On note N le conoyau de la dernière flèche sur la droite dans la définition 5.18 ; on a donc une suite exacte de H^*V-modules $\mathbb{N}$-gradués de la forme

$$0 \to M \to L^0 \to L^1 \to \cdots \to L^{j-1} \to N \to 0$$

avec $L_0, L_1, \ldots, L_{j-1}$ libres (on suppose $j \geq 1$).

On constate que l'on a $\mathrm{Tor}_k^{\mathrm{H}^*V}(\mathbb{F}_2, M) = \mathrm{Tor}_{k+j}^{\mathrm{H}^*V}(\mathbb{F}_2, N)$ pour $k > 0$; or on a $\mathrm{Tor}_{k+j}^{\mathrm{H}^*V}(\mathbb{F}_2, N) = 0$ pour $k + j > \dim V$. □

Scholie 5.22. – *Soit M un H^*V-module $\mathbb{N}$-gradué. Si M est une H^*V-j-syzygie alors on a $\mathrm{dp}_V M \leq \sup(0, \dim V - j)$.*

Scholie 5.23. – *Soit M un H^*V-module $\mathbb{N}$-gradué. Les conditons suivantes sont équivalentes*

(i) *M est une H^*V-j-syzygie avec $j \geq n$;*
(ii) *M est une H^*V-n-syzygie ;*
(iii) *M est libre.*

(Pour (iii)$\Rightarrow$(ii) contempler la suite exacte $0 \to M \to M \to 0 \cdots \to 0$ avec n termes 0 !)

REMARQUE 5.24. – Le scholie ci-dessus montre que dans les définitions d'une H^*V-j-syzygie et d'une $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$-$j$-syzygie on peut imposer $j \le n := \dim V$.

On revient maintenant aux H^*V-A-modules instables :

PROPOSITION 5.25. – *Soient M un* H^*V-A-*module instable et W un sous-groupe de V. Si le* H^*V-*module sous-jacent à M est une* H^*V-j-*syzygie alors la dimension projective du* H^*V/W-*module sous-jacent au* H^*V/W-A-*module instable* $\mathrm{Fix}_{(V,W)}M$ *vérifie l'inégalité suivante :*

$$\mathrm{dp}_{V/W}\,\mathrm{Fix}_{(V,W)}M \;\le\; \sup\,(0, \operatorname{codim} W - j).$$

Démonstration. – Il s'agit d'une généralisation de celle de la proposition 4.12. On considère à nouveau l'isomorphisme de H^*V/W-A-modules instables

$$\mathrm{Fix}_{(V,W)}\,\mathrm{Tor}_k^{\mathrm{H}^*V}(\mathrm{H}^*W, M) \;\cong\; \mathrm{Tor}_k^{\mathrm{H}^*V/W}(\mathbb{F}_2, \mathrm{Fix}_{(V,W)}M)$$

du corollaire 1.19.

On observe que l'on a un isomorphisme $\mathrm{Tor}_k^{\mathrm{H}^*V}(\mathrm{H}^*W, M) \cong \mathrm{Tor}_k^{\mathrm{H}^*V/W}(\mathbb{F}_2, M)$, disons de $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels gradués (invoquer par exemple l'isomorphisme canonique $\mathrm{H}^*W \cong \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{H}^*V$). Le H^*V-module M étant une H^*V-j-syzygie est *a fortiori* une H^*V/W-j-syzygie si bien que le lemme 5.21 implique $\mathrm{Tor}_k^{\mathrm{H}^*V}(\mathrm{H}^*W, M) = 0$ pour $k > \sup\,(0, \operatorname{codim} W - j)$. Il en résulte $\mathrm{Tor}_k^{\mathrm{H}^*V/W}(\mathbb{F}_2, \mathrm{Fix}_{(V,W)}M) = 0$ pour $k > \sup\,(0, \operatorname{codim} W - j)$. □

COROLLAIRE 5.26. – *Soient M un* $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-*module instable et W un sous-groupe de V ; soit p la codimension de W dans V. Si le* H^*V-*module sous-jacent à M est une* H^*V-j-*syzygie alors on a* $\mathrm{R}^{p+q}\mathrm{Pf}_{V/W}\,(\mathrm{Fix}_{(V,W)}M) = 0$ *pour* $\sup(0, p-j) + q < 0$.

Démonstration. – Conséquence des propositions 3.17 et 5.25. □

Fin de la démonstration de l'implication (ii)$\Rightarrow$(iii) *de 5.20*. – Le résultat d'annulation ci-dessus est exactement ce qu'il nous faut pour adapter la démonstration que nous avons donnée plus haut de l'implication (i)$\Rightarrow$(ii) du théorème 5.16.

On suppose $j \ge 1$ (il n'y a rien à démontrer pour $j = 0$!). Dans ce cas le H^*V-module sous-jacent à M est sans torsion si bien que l'on a $\mathrm{Gr}^0 M = M$ et $\mathrm{Gr}^p M = 0$ pour $p > 0$. En reprenant la suite spectrale considérée dans la démonstration du théorème 5.16 on obtient $\mathrm{H}^p\,\mathrm{C}^\bullet M = 0$ pour $0 < p \le j - 2$ et $\mathrm{H}^0\,\mathrm{C}^\bullet M \cong M$ (cet isomorphisme étant induit par la coaugmentation). □

Démonstration de l'implication (iii)$\Rightarrow$(i) *de 5.20*. – On peut supposer $j \le \dim V$ (remarque 5.24). Dans le cas $j = 0$, il n'y a rien à démontrer. Le cas $j = 1$ est trivial : $\mathrm{H}^{-1}\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet M = 0$ signifie que la coaugmentation $M \to \mathrm{H}^*V \otimes \mathrm{Fix}_V M$ $(= \mathrm{EFix}_{(V,V)}M)$ est injective.

PROPOSITION 5.27. – *Soit V un 2-groupe abélien élémentaire avec* $\dim V \geq 2$. *Soit M un* $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-*module instable. Si* $\mathrm{H}^p\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,M$ *est nul pour* $p \leq \dim V - 2$, *alors :*

(a) *le complexe* $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,M = 0$ *est acyclique ;*

(b) *le* H^*V-*module sous-jacent à M est libre.*

Démonstration. – Le point (a) résulte trivialement du scholie 5.17. Le point (b) résulte ensuite de l'implication (ii)⇒(i) de 5.16. □

La proposition ci-dessous est la version algébrique de la proposition 4.10 :

PROPOSITION 5.28. – *Soient M un* $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-*module instable et W un sous-groupe de V. On a des isomorphismes canoniques de complexes de* $\mathrm{H}^*V/W_{\mathrm{tf}}$-A-*modules instables*

$$\mathrm{Fix}_{(V,W)}\,\mathrm{C}^\bullet_V\,M \cong \mathrm{C}^\bullet_{V/W}\,\mathrm{Fix}_{(V,W)}M,\ \mathrm{Fix}_{(V,W)}\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_V\,M \cong \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{V/W}\,\mathrm{Fix}_{(V,W)}M.$$

Démonstration. – Nous avons précisé ci-dessus la notation $\mathrm{C}^\bullet$, $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet$ en $\mathrm{C}^\bullet_V$, $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_V$ (resp. $\mathrm{C}^\bullet_{V/W}$, $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{V/W}$) pour souligner que dans le membre de gauche (resp. de droite) le foncteur $\mathrm{C}^\bullet$, $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet$ est défini sur la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$ (resp. V/W_{tf}-$\mathcal{U}$). Pareillement, nous précisons ci-après la notation F^pM, introduite au début de cette section, en F^p_VM.

La proposition 5.28 est essentiellement conséquence du lemme suivant :

LEMME 5.29. – *Soient M un* $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-*module instable, W un sous-groupe de V et p un entier naturel. Les deux* $\mathrm{H}^*V/W_{\mathrm{tf}}$-A-*modules instables* $\mathrm{F}^p_{V/W}\mathrm{Fix}_{(V,W)}M$ *et* $\mathrm{Fix}_{(V,W)}\mathrm{F}^p_VM$, *vus comme des sous-objets de* $\mathrm{Fix}_{(V,W)}M$ (le second peut être vu ainsi car le foncteur $\mathrm{Fix}_{(V,W)}$ est exact), *coïncident.*

Démonstration. – Soit I un (V_{tf}-$\mathcal{U}$)-injectif contenant M ; comme $\mathrm{Fix}_{(V,W)}$ est exact, on peut également identifier $\mathrm{Fix}_{(V,W)}M$ à un sous-objet de $\mathrm{Fix}_{(V,W)}I$. Les égalités

– $\mathrm{F}^p_VM = M \cap \mathrm{F}^p_VI$ (proposition 5.1),

– $\mathrm{Fix}_{(V,W)}(M \cap \mathrm{F}^p_VI) = (\mathrm{Fix}_{(V,W)}M) \cap (\mathrm{Fix}_{(V,W)}\mathrm{F}^p_VI)$ (exactitude de $\mathrm{Fix}_{(V,W)}$),

– $\mathrm{F}^p_{V/W}\mathrm{Fix}_{(V,W)}M = \mathrm{Fix}_{(V,W)}M \cap \mathrm{F}^p_{V/W}\mathrm{Fix}_{(V,W)}I$ (proposition 5.1),

montrent qu'il suffit de vérifier le lemme pour M injectif (dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$). Compte tenu de la classification des (V_{tf}-$\mathcal{U}$)-injectifs (voir 2.5) on est ramené à vérifier le lemme pour $M = \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N$ avec $U \subset V$ et N un H^*V/U-A-module instable fini.

On suppose donc M de cette forme. La proposition 5.4 donne

$$\mathrm{F}^p_VM = \begin{cases} M & \text{pour } p \leq \operatorname{codim} U \\ 0 & \text{pour } p > \operatorname{codim} U \end{cases}$$

et par conséquent

$$\mathrm{Fix}_{(V,W)}\mathrm{F}^p_VM = \begin{cases} \mathrm{Fix}_{(V,W)}M & \text{pour } p \leq \operatorname{codim} U \\ 0 & \text{pour } p > \operatorname{codim} U. \end{cases}$$

Le corollaire 1.26 donne quant à lui

$$\mathrm{Fix}_{(V,W)}M \cong \begin{cases} \mathrm{H}^*V/W \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N & \text{pour } W \subset U, \\ 0 & \text{pour } W \not\subset U. \end{cases}$$

On obtient

$$\mathrm{F}^p_{V/W}\mathrm{Fix}_{(V,W)}M = \begin{cases} \mathrm{Fix}_{(V,W)}M & \text{pour } p \leq \operatorname{codim} U \\ 0 & \text{pour } p > \operatorname{codim} U, \end{cases}$$

en invoquant à nouveau 5.4 (V étant remplacé par V/W). □

Soit maintenant $M \to I^\bullet$ une résolution injective de M dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$; comme le foncteur $\mathrm{Fix}_{(V,W)}$ est exact et transforme les (V_{tf}-$\mathcal{U}$)-injectifs en (V/W_{tf}-$\mathcal{U}$)-injectifs (voir le point (b) de 2.8), $\mathrm{Fix}_{(V,W)}M \to \mathrm{Fix}_{(V,W)}I^\bullet$ est une résolution injective de $\mathrm{Fix}_{(V,W)}M$ dans la catégorie V/W_{tf}-$\mathcal{U}$, si bien que le lemme 5.29 conduit formellement à la proposition 5.28. □□

Soit M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable. On note E_1M le terme E_1 de la suite spectrale de la démonstration de l'implication (i)⇒(ii) de 5.16 ; E_1M est donc un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable ($\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$)-gradué, dépendant fonctoriellement de M, dont la structure est rappelée ci-dessous :

– Soit Tg_n le sous-ensemble de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ constitué des couples (p,q) vérifiant $p \geq 0$, $p \leq n$, $p+q \geq 0$ et $q \leq 0$ (Tg est pour triangle !) ; on a $\mathrm{E}_1^{p,q}M = 0$ pour $(p,q) \notin \mathrm{Tg}_n$.

– Il existe des homomorpismes $\mathrm{d}_1 : \mathrm{E}_1^{p,q}M \to \mathrm{E}_1^{p+1,q}M$ (de $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-modules instables) avec $\mathrm{d}_1 \circ \mathrm{d}_1 = 0$; en d'autres termes $\mathrm{E}_1^{\bullet,q}M$ est un complexe de cochaînes dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$.

– Le (V_{tf}-$\mathcal{U}$)-complexe de cochaînes $\mathrm{C}^\bullet M$ est $\mathrm{E}_1^{\bullet,0}M$.

Le point (b) de la proposition 5.27 et la proposition 5.28 conduisent à l'énoncé suivant :

Proposition 5.30. – *Soient M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable et $j \geq 0$ un entier. Si l'on a $\mathrm{H}^p\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,M = 0$ pour $p \leq j-2$, alors :*

(a) *$\mathrm{Fix}_{(V,W)}M$ est un H^*V/W-module libre pour tout sous-groupe W de V avec $\operatorname{codim} W \leq j$;*

(b) *on a $\mathrm{E}_1^{p,q}M = 0$ pour $p \leq j$ et $q \neq 0$.*

Démonstration du (a). – Soit W un sous-groupe de V avec $\operatorname{codim} W \leq j$. D'après la proposition 5.28, on a $\mathrm{Fix}_{(V,W)}\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,M \cong \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{V/W}\,\mathrm{Fix}_{(V,W)}M$; puisque le foncteur $\mathrm{Fix}_{(V,W)}$ est exact, la condition $\mathrm{H}^p\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,M = 0$ pour $p \leq j-2$ implique $\mathrm{H}^p\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{V/W}\,M = 0$ pour $p \leq j-2$. Le point (b) de la proposition 5.27 dit alors que $\mathrm{Fix}_{(V,W)}M$ est un H^*V/W-module libre. □

Démonstration du (b). – On a vu que l'on a

$$\mathrm{E}_1^{p,q} \cong \bigoplus_{\operatorname{codim} W = p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{R}^{p+q}\mathrm{Pf}_{V/W}\left(\mathrm{Fix}_{(V,W)}M\right);$$

la proposition 3.20 dit que l'on a $\mathrm{R}^{p+q}\mathrm{Pf}_{V/W}\left(\mathrm{Fix}_{(V,W)}M\right) = 0$ pour $q \neq 0$, compte tenu du point (a). □

La proposition suivante paraît au premier abord assez *ad hoc*. Elle affirme l'existence d'un mystérieux bicomplexe $\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}M$ dont certaines propriétés nous permettront d'achever la démonstration en cours. La construction de ce bicomplexe sera effectuée dans la sous-section 8.4 ; les propriétés évoquées ci-dessus y seront vérifiées. En fait l'introduction de $\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}M$ n'est pas si artificielle : nous verrons en 8.4 qu'elle apporte un éclairage un peu plus concret sur le complexe $\mathrm{C}^\bullet M$ dont la définition dans la présente section est plutôt formelle.

Proposition 5.31. – *Soit M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable.*

Il existe un bicomplexe $\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}M$ de cochaînes dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$, dépendant fonctoriellement de M, qui possède les propriétés $\mathcal{B}_i$, $i = 0, 1, 2$, décrites ci-après.

($\mathcal{B}_0$) *On a $\mathrm{B}^{p,q}M = 0$ pour $(p,q) \notin \mathrm{Tg}_n$.*

Soit ${}_{\mathrm{B}}\mathrm{E}_1M$ le terme E_1 de la suite spectrale associée à $\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}M$ obtenue « en dérivant verticalement ».

($\mathcal{B}_1$) *On a pour tout (p,q) un isomorphisme canonique de $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-modules instables $\beta : {}_{\mathrm{B}}\mathrm{E}_1^{p,q}M \cong \mathrm{E}_1^{p,q}M$ tel que le diagramme de $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-modules instables*

$$\begin{array}{ccc} {}_{\mathrm{B}}\mathrm{E}_1^{p,q}M & \xrightarrow{\mathrm{d}_1} & {}_{\mathrm{B}}\mathrm{E}_1^{p+1,q}M \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & {\scriptstyle\beta}\downarrow{\scriptstyle\cong} \\ \mathrm{E}_1^{p,q}M & \xrightarrow{\mathrm{d}_1} & \mathrm{E}_1^{p+1,q}M \end{array}$$

est commutatif.

($\mathcal{B}_2$) *Si $j \geq 2$ est un entier tel que $\mathrm{Fix}_{(V,W)}M$ est un H^*V/W-module libre pour tout sous-groupe W de V avec $\operatorname{codim} W \leq j$, alors $\mathrm{B}^{p,q}M$ est un H^*V-module libre pour $p \leq j$.*

Fin de la démonstration de l'implication (iii)⇒(i) du théorème 5.20 à l'aide de 5.30 et 5.31. – On suppose toujours $j \geq 2$. On définit un bicomplexe $\mathrm{B}_j^{\bullet,\bullet}M$ de cochaînes dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$, dépendant fonctoriellement de M, de la manière suivante :

On pose

$$\mathrm{B}_j^{p,q}M = \begin{cases} \mathrm{B}^{p,q}M & \text{pour } p \leq j-1, \\ 0 & \text{pour } p \geq j. \end{cases}$$

Les cobords, horizontaux et verticaux, de $\mathrm{B}_j^{\bullet,\bullet}M$ sont induits par ceux du bicomplexe $\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}M$ ($\mathrm{B}_j^{\bullet,\bullet}M$ est un quotient de $\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}M$).

On note $({}_{\mathrm{B}_j}\mathrm{E}_rM)_{r\geq 1}$ la suite spectrale associée à $\mathrm{B}_j^{\bullet,\bullet}M$ obtenue « en dérivant verticalement ». Par construction on a ${}_{\mathrm{B}_j}\mathrm{E}_1^{p,q}M = {}_{\mathrm{B}}\mathrm{E}_1^{p,q}M$ pour $p \leq j-1$ et donc ${}_{\mathrm{B}_j}\mathrm{E}_1^{p,q}M \cong \mathrm{E}_1^{p,q}M$ pour $p \leq j-1$ (propriété ($\mathcal{B}_1$) de 5.31).

On suppose maintenant $\mathrm{H}^p\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet M = 0$ pour $p \leq j-2$. On note $\mathrm{C}^\bullet_j M$ le complexe

$$\mathrm{C}^0 M \to \mathrm{C}^1 M \to \cdots \to \mathrm{C}^{j-1} M \to 0 \to 0 \to \cdots$$

($\mathrm{C}^\bullet_j M$ est un quotient de $\mathrm{C}^\bullet M$). La définition même de $\mathrm{C}^\bullet M$ et le point (b) de 5.30 montrent ${}_{\mathrm{B}_j}\mathrm{E}_1^{\bullet,0} M \cong \mathrm{C}^\bullet_j M$ et ${}_{\mathrm{B}_j}\mathrm{E}_1^{\bullet,q} M = 0$ pour $q \neq 0$. On en déduit que la suite spectrale $({}_{\mathrm{B}_j}\mathrm{E}_r M)_{r\geq 1}$ dégénère au terme E_2 et que l'homologie du complexe $\operatorname{Tot}\mathrm{B}_j^{\bullet,\bullet} M$ (le totalisé du bicomplexe $\mathrm{B}_j^{\bullet,\bullet} M$) est canoniquement isomorphe à celle du complexe $\mathrm{C}^\bullet_j M$. Il en résulte que l'on a un isomorphisme canonique $\mathrm{H}^0 \operatorname{Tot}\mathrm{B}_j^{\bullet,\bullet} M \cong M$ et l'égalité $\mathrm{H}^k \operatorname{Tot}\mathrm{B}_j^{\bullet,\bullet} M = 0$ pour $1 \leq k \leq j-2$. D'autre part le point (a) de 5.30 et la propriété $(\mathcal{B}_2)$ de 5.31 montrent que tous les termes du complexe $\operatorname{Tot}\mathrm{B}_j^{\bullet,\bullet} M$ sont libres comme H^*V-modules.

On constate au bout du compte que l'on dispose de l'énoncé suivant :

PROPOSITION 5.32. – *Soient M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable et $j \geq 2$ un entier. Si l'on a $\mathrm{H}^p\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet M = 0$ pour $p \leq j-2$ alors :*

(a) *Les $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-modules instables $\operatorname{Tot}^k \mathrm{B}_j^{\bullet,\bullet} M$, $0 \leq k \leq j-1$, sont libres comme H^*V-modules.*

(b) *Il existe un homomorphisme canonique $\eta_j : M \to \operatorname{Tot}^0 \mathrm{B}_j^{\bullet,\bullet} M$ tel que*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta_j} \operatorname{Tot}^0 \mathrm{B}_j^{\bullet,\bullet} M \xrightarrow{\mathrm{d}} \operatorname{Tot}^1 \mathrm{B}_j^{\bullet,\bullet} M \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \operatorname{Tot}^{j-1} \mathrm{B}_j^{\bullet,\bullet} M$$

est une suite exacte de $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-modules instables.

(On observera que les $\operatorname{Tot}^k \mathrm{B}_j^{\bullet,\bullet}$ sont des endofoncteurs de V_{tf}-$\mathcal{U}$ que η_j et les cobords de $\operatorname{Tot}^\bullet \mathrm{B}_j^{\bullet,\bullet}$ sont des transformations naturelles.)

L'énoncé ci-dessus fournit une solution « fonctorielle » à la question de l'implication (iii)⇒(i) du théorème 5.20. □

REMARQUE 5.33. – La condition $j \geq 2$ qui apparaît dans l'énoncé 5.32 peut être remplacée par $j \geq 1$ (qui n'est pas vraiment une restriction !). On explique pourquoi ci-après. On verra en 8.4 que l'on a $\mathrm{B}^{0,0} M = \mathrm{H}^*V \otimes \operatorname{Fix}_V M$, soit encore $\mathrm{B}^{0,0} M = \mathrm{C}^0 M$ (en fait cette égalité est forcée par les propriétés $(\mathcal{B}_0)$ et $(\mathcal{B}_1)$ de 5.31). On a donc $\mathrm{B}_1^{0,0} M = \mathrm{C}^0 M$, $\mathrm{B}_1^{p,q} M = 0$ pour $(p,q) \neq (0,0)$ et $\operatorname{Tot}\mathrm{B}_1^{\bullet,\bullet} M = \mathrm{C}^\bullet_1 M$. Pour avoir le point (b) on prend pour η_1 l'unité d'adjonction $M \to \mathrm{H}^*V \otimes \operatorname{Fix}_V M$.

EXEMPLE 5.34. – *La proposition 5.32 pour $j = 2$ (« baby case »)*

On extrait de 8.4 les informations suivantes :

– $\mathrm{B}^{0,0} M = \mathrm{EFix}_{(V,V)} M$ $(= \mathrm{H}^*V \otimes \operatorname{Fix}_{(V,V)} M = \mathrm{H}^*V \otimes \operatorname{Fix}_V M)$;

– $\mathrm{B}^{1,0} M = \bigoplus_{\operatorname{codim} W = 1} \mathrm{EFix}_{(V,V)} M$;

– $\mathrm{B}^{1,-1} M = \bigoplus_{\operatorname{codim} W = 1} \mathrm{EFix}_{(V,W)} M$;

– $\mathrm{d}^{0,0} : \mathrm{B}^{0,0} M \to \mathrm{B}^{1,0} M$ l'homomorphisme diagonal évident ;

– $\mathrm{d}^{1,-1} : \mathrm{B}^{0,0} M \to \mathrm{B}^{1,0} M$ la somme directe indexée par W des homomorphismes $\rho(W,V)_M : \mathrm{EFix}_{(V,W)} M \to \mathrm{EFix}_{(V,V)} M$ (introduits en 1.20).

Le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B}^{0,0}(M) \arrow[r, "\mathrm{d}^{0,0}"] & \mathrm{B}^{1,0}M \\ & \mathrm{B}^{1,-1}M \arrow[u, "\mathrm{d}^{1,-1}"] \end{tikzcd}$$

est le bicomplexe $\mathrm{B}_2^{\bullet,\bullet}M$ dont il est question dans 5.32.

On oublie maintenant la machinerie des quatre dernières sous-sections de la section 8, on prend ce qui précède comme définition de $\mathrm{B}_2^{\bullet,\bullet}M$ et on esquisse (en petits caractères) une démonstration *ab initio* de 5.32 pour $j = 2$.

On commence par faire les observations suivantes :

1) On a $\mathrm{B}^{0,0}M = \mathrm{C}^0M$.

2) On a $\operatorname{coker} \mathrm{d}^{1,-1} \cong \mathrm{C}^1M$. Précisons un peu. Le cas $\dim V = 1$ est facile ; il peut être vu comme une conséquence de la première partie de 3.9. Le cas général en résulte grâce à la remarque 1.23.

3) Les $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-instables $\mathrm{B}^{0,0}M$ et $\mathrm{B}^{1,0}M$ sont manifestement des H^*V-modules libres. Il en est de même pour $\mathrm{B}^{1,-1}M$ si l'on a $\mathrm{H}^{-1}\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}M = 0$. En effet cette condition équivaut au fait que le H^*V-module M est sans torsion (théorie de Smith algébrique). Soit W un sous-groupe de V, compte tenu de la proposition 5.28 et de l'exactitude des foncteurs Fix, on a $\mathrm{H}^{-1}\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{V/W}\mathrm{Fix}_{(V,W)}M = 0$ et donc $\mathrm{Fix}_{(V,W)}M$ est aussi un H^*V/W-module sans torsion. Si W est de codimension 1, alors $\mathrm{Fix}_{(V,W)}M$ est un H^*V/W-module libre puisque H^*V/W est principal et que $\mathrm{Fix}_{(V,W)}M$ est un H^*V/W-module de type fini (proposition 2.9). L'isomorphisme $\mathrm{EFix}_{(V,W)}M \cong \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)}M$ montre enfin que $\mathrm{EFix}_{(V,W)}M$ est un H^*V-module libre.

4) Soit $\pi : \mathrm{B}^{1,0}M \to \mathrm{C}^1M$ l'épimorphisme induit par l'isomorphisme de la deuxième observation ; on constate que $\pi \circ \mathrm{d}^{0,0}$ s'identifie à $\mathrm{d}^0 : \mathrm{C}^0M \to \mathrm{C}^1M$.

5) On constate que les deux complexes de cochaînes

$$\mathrm{C}^0M \xrightarrow{\mathrm{d}^0} \mathrm{C}^1M$$

et

$$\mathrm{B}^{0,0}M \oplus \mathrm{B}^{1,0}M \xrightarrow{\begin{bmatrix}\mathrm{d}^{0,0} & \mathrm{d}^{1,-1}\end{bmatrix}} \mathrm{B}^{1,0}M$$

(le totalisé du bicomplexe introduit plus haut) ont même cohomologie.

On en déduit que l'on dispose d'une suite exacte de $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-instables de la forme

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathrm{B}^{0,0}M \oplus \mathrm{B}^{1,0}M \xrightarrow{\begin{bmatrix}\mathrm{d}^{0,0} & \mathrm{d}^{1,-1}\end{bmatrix}} \mathrm{B}^{1,0}M$$

et donc que M est une $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$-2-syzygie (fonctoriellement en M).

CHAPITRE 6

COMPARAISON ENTRE LES COMPLEXES ALGÉBRIQUE ET TOPOLOGIQUE

Le premier objet de cette section est de démontrer la proposition 0.3 qui compare les complexes $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{alg}}X$ et $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}X$ asociés à un V-CW-complexe fini X. Le second est d'utiliser cette comparaison pour obtenir la version topologique du théorème 5.20 à savoir le théorème 6.20 (reproduisant 0.9).

Notre démonstration va comporter une courte incursion dans la théorie des catégories dérivées, aussi nous commençons par rappeler quelques énoncés classiques d'algèbre homologique qui apparaissent dans cette théorie.

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne ; soit $\mathrm{Ch}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ la catégorie (abélienne) des complexes de cochaînes dont les termes sont des objets de $\mathcal{A}$. Soient $Z^{\bullet}$ et $K^{\bullet}$ deux objets de $\mathrm{Ch}^{\geq 0}(\mathcal{A})$, on note $[Z^{\bullet}, K^{\bullet}]$ le groupe abélien des classes d'homotopie de morphismes de $Z^{\bullet}$ dans $K^{\bullet}$.

L'énoncé clef (voir par exemple [**28**, I, Theorem 6.2]) est le suivant :

Théorème 6.1. – *Soit $K^{\bullet}$ un complexe de cochaînes dont les termes sont des objets injectifs de $\mathcal{A}$, alors le foncteur contravariant $Z^{\bullet} \mapsto [Z^{\bullet}, K^{\bullet}]$, défini sur la catégorie $\mathrm{Ch}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ et à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens, envoie un quasi-isomorphisme sur un isomorphisme.*

(On rappelle qu'un quasi-isomorphisme est un morphisme de complexes qui induit un isomorphisme en homologie.)

On suppose maintenant que $\mathcal{A}$ a assez d'injectifs. Soit $C^{\bullet}$ un complexe de cochaînes dont les termes sont des objets de $\mathcal{A}$; un « remplacement injectif » de $C^{\bullet}$ est la donnée d'un complexe de cochaînes $I^{\bullet}$ dont les termes sont des objets injectifs de $\mathcal{A}$ et d'un quasi-isomorphisme $\phi : C^{\bullet} \to I^{\bullet}$. L'hypothèse faite sur $\mathcal{A}$ garantit l'existence de remplacements injectifs pour tout $C^{\bullet}$.

COROLLAIRE 6.2. – *On considère un diagramme dans la catégorie* $\mathrm{Ch}^{\geq 0}(\mathcal{A})$

$$\begin{array}{ccc} C^\bullet & \xrightarrow{\phi} & I^\bullet \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ D^\bullet & \xrightarrow{\psi} & J^\bullet \end{array}$$

avec ϕ et ψ des remplacements injectifs.

Il existe un homomorphisme de complexes $F : I^\bullet \to J^\bullet$, unique à homotopie près, tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} C^\bullet & \xrightarrow{\phi} & I^\bullet \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ D^\bullet & \xrightarrow{\psi} & J^\bullet \end{array}$$

est commutatif à homotopie près.

Démonstration. – On prend $K^\bullet = J^\bullet$ dans 6.1. La classe de F est l'image inverse de $\psi \circ f$ par l'isomorphisme $[I^\bullet, J^\bullet] \to [C^\bullet, J^\bullet]$ induit par ϕ. □

En prenant ci-dessus pour f l'identité de $C^\bullet$ on obtient un « énoncé d'unicité » pour les remplacements injectifs :

COROLLAIRE 6.3. – *Soient $\phi : C^\bullet \to I^\bullet$ et $\phi' : C^\bullet \to I'^\bullet$ deux remplacements injectifs dans la catégorie* $\mathrm{Ch}^{\geq 0}(\mathcal{A})$. *Alors il existe une équivalence d'homotopie $H : I^\bullet \to I'^\bullet$, unique à homotopie près, telle que ϕ' est homotope à $H \circ \phi$.*

SCHOLIE 6.4. – *On reprend les hypothèses de 6.2 et on suppose en outre que f est un quasi-isomorphisme. Alors F (qui apparaît dans la conclusion de 6.2) est une équivalence d'homotopie (toujours unique à homotopie près).*

Ces rappels étant faits, on prend pour $\mathcal{A}$ la catégorie abélienne $V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$.

On définit un foncteur $\mathrm{G} : \mathrm{Ch}^{\geq 0}(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}) \to \mathrm{Ch}^{\geq 0}(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$ par le procédé déjà utilisé dans la section 5. On pose $(\mathrm{G}\, C^\bullet)^p := \mathrm{H}^p\mathrm{Gr}^p\, C^\bullet$ et on prend pour cobord l'homomorphisme connectant $\mathrm{H}^p\mathrm{Gr}^p\, C^\bullet \to \mathrm{H}^{p+1}\mathrm{Gr}^{p+1}\, C^\bullet$ associé à la suite exacte $0 \to \mathrm{Gr}^{p+1}\, C^\bullet \to \mathrm{F}^p\, C^\bullet/\mathrm{F}^{p+2}\, C^\bullet \to \mathrm{Gr}^p\, C^\bullet \to 0$. Le foncteur G donne naissance à un foncteur $\mathbf{G} : \mathrm{Ch}^{\geq 0}(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}) \to \mathrm{Ch}^{\geq 0}(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$ de la façon suivante : on choisit un remplacement injectif $\phi : C^\bullet \to I^\bullet$ et on pose $\mathbf{G}\, C^\bullet := \mathrm{G}\, I^\bullet$. On observera que l'on dispose d'une transformation naturelle $\mathrm{G}\, C^\bullet \to \mathbf{G}\, C^\bullet$. On observera également que si $f : C^\bullet \to D^\bullet$ est un quasi-isomorphisme alors $\mathbf{G}\, f$ est un isomorphisme ; en d'autres termes le foncteur $\mathbf{G}$ se factorise à travers la catégorie dérivée.

REMARQUE 6.5. – Les remplacements injectifs de $C^\bullet$ tels que les termes de $I^\bullet$ sont des sommes directes du type de celles qui apparaissent dans le theorème 2.5 forment un ensemble. Cette observation permet de se débarasser d'éventuels scrupules « ensemblistes » concernant la définition du foncteur $\mathbf{G}$.

EXEMPLE 6.6. – Soit M un objet de $V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$. Soit $\mathrm{c}^\bullet M$ le complexe de cochaînes

$$M \to 0 \to 0 \to \cdots ;$$

alors $\mathbf{G}\,\mathrm{c}^\bullet M$ est le complexe $\mathrm{C}^\bullet M$ de la section 5. On constate que l'on a $\mathrm{G}\,\mathrm{c}^\bullet M = \mathrm{c}^\bullet(M/\mathrm{F}^1 M)$ et que la coaugmentation de $\mathrm{C}^\bullet M$ est fournie par le composé de l'homomorphisme canonique $\mathrm{c}^\bullet M \to \mathrm{c}^\bullet(M/\mathrm{F}^1 M)$ et de l'homomorphisme naturel $\mathrm{G}\,\mathrm{c}^\bullet M \to \mathbf{G}\,\mathrm{c}^\bullet M$.

Soit $C^\bullet$ l'un des deux complexes $\Sigma^{\dim V}\, \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}} X$ (X un V-CW-complexe fini) ou $\mathrm{C}^\bullet M$ (M un $\mathrm{H}^* V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable), introduits respectivement dans les sections 4 et 5 ; $C^\bullet$ est un complexe de cochaînes dans la catégorie $V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$ qui possède la propriété suivante : pour tout entier $p \geq 0$, C^p est isomorphe à une somme directe de la forme

$$\bigoplus_{\operatorname{codim} W = p} \mathrm{H}^* V \otimes_{\mathrm{H}^* V/W} N_W$$

(W sous-groupe de V) avec N_W un $\mathrm{H}^* V/W$-A-module instable fini (ce qui implique $C^p = 0$ pour $p > \dim V$). Nous dirons qu'un complexe de ce type est *e-fini spécial*.

PROPOSITION 6.7. – *Soit $C^\bullet$ un complexe de cochaînes dans la catégorie $V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$ que l'on suppose e-fini spécial.*

(a) *Les complexes $C^\bullet$ et $\mathrm{G}\, C^\bullet$ sont canoniquement isomorphes.*

(b) *L'homomorphisme naturel $\mathrm{G}\, C^\bullet \to \mathbf{G}\, C^\bullet$ est un isomorphisme.*

Démonstration du (a). – On commence par rappeler la définition des troncations brutales d'un complexe. Soient

$$C^\bullet = (C^0 \to C^1 \to \cdots \to C^p \to C^{p+1} \to \cdots)$$

un complexe de cochaînes dans une catégorie abélienne et $p \geq 0$ un entier ; on note $\sigma^{\geq p}\, C^\bullet$ le sous-complexe

$$0 \to 0 \to \cdots \to 0 \to C^p \to C^{p+1} \to C^{p+2} \to \cdots$$

de $C^\bullet$ (p-ième troncation « brutale » de $C^\bullet$) . Ces sous-complexes définissent une filtration décroissante de $C^\bullet$:

$$C^\bullet = \sigma^{\geq 0}\, C^\bullet \supset \sigma^{\geq 1}\, C^\bullet \supset \cdots \supset \sigma^{\geq p}\, C^\bullet \supset \cdots .$$

Soit maintenant $C^\bullet$ un complexe de cochaînes dans la catégorie $V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$; si $C^\bullet$ est e-fini spécial alors, d'après 5.4, la filtration de $C^\bullet$ par les $\mathrm{F}^p\, C^\bullet$ coïncide avec celle par les $\sigma^{\geq p}\, C^\bullet$. Le point (a) de la proposition résulte du point (a) de l'énoncé ci-dessous dont la vérification est laissée au lecteur :

LEMME 6.8. – *Soit $C^\bullet = (C^0 \to C^1 \to C^2 \to \cdots)$ un complexe de cochaînes dans une catégorie abélienne. Le terme $\mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}$ de la suite spectrale associée à la filtration par les troncations brutales vérifie les deux propriétés suivantes :*

(a) $\mathrm{E}_1^{\bullet,0}$ *(vu comme un complexe grâce à d_1) s'identifie à $C^\bullet$;*

(b) $\mathrm{E}_1^{p,q}$ *est nul pour $q \neq 0$.*

(Le point (b) est là en vue d'une future référence.) □

On va utiliser une résolution injective, au sens de Cartan-Eilenberg, de $C^\bullet$. Rappelons un peu de quoi il s'agit.

On note $C^{\bullet,\bullet}$ le bicomplexe de cochaînes du premier quadrant défini par :

$$C^{\bullet,q} = \begin{cases} C^\bullet & \text{pour } q = 0, \\ 0 & \text{pour } q > 0. \end{cases}$$

Une résolution injective de Cartan-Eilenberg de $C^\bullet$ est la donnée d'un bicomplexe de cochaînes du premier quadrant $I^{\bullet,\bullet}$, dont tous les termes sont injectifs, et d'un homomorphisme de bicomplexes $\eta : C^{\bullet,\bullet} \to I^{\bullet,\bullet}$, telle que six propriétés sont vérifiées (voir [**13**, Chap. XVII]). La première, la seule que nous utiliserons ci-après, est que $\eta : C^p = C^{p,0} \to I^{p,\bullet}$ est une résolution injective. Cette propriété implique, par un argument trivial de suites spectrales (considérer les « cohomologies verticales »), que

$$C^\bullet = \operatorname{Tot} C^{\bullet,\bullet} \xrightarrow{\operatorname{Tot}\eta} \operatorname{Tot} I^{\bullet,\bullet}$$

est un remplacement injectif de $C^\bullet$.

On fixe maintenant un entier $k \geq 0$ et on considère les deux suites spectrales du premier quadrant, disons ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_r^{p,q}(0,k)$ et ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_r^{p,q}(1,k)$ (la décoration ${}^{\mathrm{II}}$ indique que l'on commence par mettre en œuvre le cobord vertical), associées respectivement aux bicomplexes $\mathrm{Gr}^k C^{\bullet,\bullet}$ et $\mathrm{Gr}^k I^{\bullet,\bullet}$, convergeant vers les cohomologies de $\operatorname{Tot}\mathrm{Gr}^k C^{\bullet,\bullet}$ et $\operatorname{Tot}\mathrm{Gr}^k I^{\bullet,\bullet}$.

Le lemme clef est le suivant :

Lemme 6.9. – *L'homomorphisme $\eta : C^{\bullet,\bullet} \to I^{\bullet,\bullet}$ induit pour tout couple (p,q) un isomorphisme ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_1^{p,q}(0,k) \cong {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_1^{p,q}(1,k)$.*

Démonstration. – 0) On constate, compte tenu de 5.4 et de la définition même de ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_1^{p,q}(0,k)$, que l'on a

$${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_1^{p,q}(0,k) = \begin{cases} C^k & \text{pour } (p,q) = (k,0), \\ 0 & \text{pour } (p,q) \neq (k,0). \end{cases}$$

1) Comme on l'a rappelé plus haut $\eta : C^p = C^{p,0} \to I^{p,\bullet}$ est une résolution injective et par définition encore ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_1^{p,q}(1,k)$ est $\mathrm{H}^q\,\mathrm{Gr}^k I^{p,\bullet}$. On va déterminer cette cohomologie en remplaçant la résolution injective $\eta : C^p \to I^{p,\bullet}$ par une résolution injective $\eta' : C^p \to I'^\bullet$ adaptée à la forme particulière de C^p.

On a par hypothèse

$$C^p \cong \bigoplus_{\operatorname{codim} W = p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N_W$$

avec N_W un un H^*V/W-A-module instable fini ; soit $N_W \to K_W^\bullet$ une résolution injective dans la catégorie V/W_{tf}-$\mathcal{U}$ dont tous les termes sont finis (une telle résolution existe d'après 2.16), alors

$$C^p \to \bigoplus_{\operatorname{codim} W = p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} K_W^\bullet$$

est une résolution injective dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$ (invoquer la platitude du H^*V/W-module H^*V et la proposition 2.1) : c'est la résolution injective $\eta' : C^p \to I'^{\bullet}$ évoquée plus haut.

D'après 5.4, on a cette fois

$$\mathrm{Gr}^k I'^{\bullet} = \begin{cases} I'^{\bullet} & \text{pour } p = k, \\ 0 & \text{pour } p \neq k. \end{cases}$$

On en déduit

$$\mathrm{H}^q \, \mathrm{Gr}^k I'^{\bullet} \cong \begin{cases} C^k & \text{pour } (p,q) = (k,0), \\ 0 & \text{pour } (p,q) \neq (k,0), \end{cases}$$

le premier isomorphisme étant induit par η', et donc

$$\mathrm{H}^q \, \mathrm{Gr}^k I^{p,\bullet} \cong \begin{cases} C^k & \text{pour } (p,q) = (k,0), \\ 0 & \text{pour } (p,q) \neq (k,0), \end{cases}$$

le premier isomorphisme étant induit par η.

La démonstration du lemme est achevée. Pour compléter celle du point (b) de la proposition on observe que l'on a $\mathrm{Tot}\,\mathrm{Gr}^k C^{\bullet,\bullet} = \mathrm{Gr}^k \,\mathrm{Tot}\, C^{\bullet,\bullet}$ et $\mathrm{Tot}\,\mathrm{Gr}^k I^{\bullet,\bullet} = \mathrm{Gr}^k\,\mathrm{Tot}\, I^{\bullet,\bullet}$ et on considère l'homomorphisme de complexes de chaînes $\mathrm{G}\,\mathrm{Tot}\, C^{\bullet,\bullet} \to \mathrm{G}\,\mathrm{Tot}\, I^{\bullet,\bullet}$ induit par η. C'est un isomorphisme car le lemme implique que l'homomorphisme $(\mathrm{G}\,\mathrm{Tot}\, C^{\bullet,\bullet})^p \to (\mathrm{G}\,\mathrm{Tot}\, I^{\bullet,\bullet})^p$, induit par η, est un isomorphisme pour tout p. □

Remarque 6.10. – La démonstration que nous avons donnée du lemme 6.9 montre en fait que les deux suites spectrales ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_r^{p,q}(0,k)$ et ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_r^{p,q}(1,k)$ (qui sont isomorphes) dégénèrent au terme E_1.

Soit X un V-CW-complexe fini ; le complexe $\mathrm{C}^{\bullet}_{\mathrm{top}}X$ n'est pas en général un objet de $\mathrm{Ch}^{\geq 0}(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$ à cause de l'apparition du foncteur Σ^{-p} dans la définition du terme $\mathrm{C}^p_{\mathrm{top}}X$ (considérer le cas où l'action de V sur X est libre). Aussi, pour pouvoir appliquer la proposition 6.7, nous allons commencer par « instabiliser » $\mathrm{C}^{\bullet}_{\mathrm{top}}X$ à l'aide de l'endofoncteur $\widetilde{\Sigma}$ dont nous rappelons ci-dessous la définition et les propriétés dont nous aurons besoin.

On note $\widetilde{\Sigma} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ l'adjoint à droite du foncteur $\Sigma : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ (voir [**32**, § 2.3]). En fait $\widetilde{\Sigma}$ peut être explicité très concrètement : soit M un A-module instable, $\Sigma\widetilde{\Sigma}M$ s'identifie (*via* la co-unité de l'adjonction) au sous-A-module de M constitué des éléments x vérifiant $\mathrm{Sq}_0\, x = 0$ ($\mathrm{Sq}_0\, x := \mathrm{Sq}^{|x|}x$, $|x|$ désignant le degré de x). Ceci montre en particulier, [**32**, proposition 8.1.1], que l'homomorphisme $L \otimes \widetilde{\Sigma}M \to \widetilde{\Sigma}(L \otimes M)$, naturels en les A-modules instables L et M, est un isomorphisme si l'on a $\widetilde{\Sigma}L = 0$ (on dit alors que L est *réduit*) ; il en résulte que l'endofoncteur $\widetilde{\Sigma} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ induit des endofoncteurs, toujours noté $\widetilde{\Sigma}$, des catégories abéliennes V-$\mathcal{U}$ et V_{tf}-$\mathcal{U}$ (dans ce dernier cas invoquer le fait que H^*V est noethérien). On observera que les endofoncteurs composés $\widetilde{\Sigma}\Sigma$ sont les foncteurs identité (l'unité de l'adjonction est un isomorphisme).

Proposition-Définition 6.11. – *Soit $p \geq 0$ un entier ; on note $\widetilde{\Sigma}^p$ le p-ième itéré de $\widetilde{\Sigma}$.*

(a) *Soit M un* A*-module instable ; $\widetilde{\Sigma}^p M$ s'identifie au plus grand sous-*A*-module instable du* A*-module $\Sigma^{-p} M$.*

(b) *Soit M un* H^*V-A*-module instable ; le plus grand sous-*A*-module instable du* H^*V-A*-module $\Sigma^{-p} M$ est stable sous l'action de* H^*V *et s'identifie au* H^*V-A*-module instable $\widetilde{\Sigma}^p M$.*

(c) *Soient $W \subset V$ un sous-groupe et N un* H^*V/W-A*-module instable ; le* H^*V-A*-module instable $\widetilde{\Sigma}^p(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N)$ est naturellement isomorphe au* H^*V-A*-module instable* $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \widetilde{\Sigma}^p N$.

Démonstration. – Le cas $p = 0$ est trivial. Le cas $p \geq 1$ se démontre par une récurrence immédiate à partir du cas $p = 1$. Dans ce dernier cas, on se convainc grâce aux rappels précédents. Donnons un peu plus de détails pour le point (c).

Soit $\gamma : \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \widetilde{\Sigma} N \to \widetilde{\Sigma}(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N)$ l'adjoint de l'homomorphisme

$$\Sigma\,(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \widetilde{\Sigma} N) = \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \Sigma\widetilde{\Sigma} N \to \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N.$$

On a vu lors de la démonstration du lemme 3.12 qu'une rétraction de groupes $r : V \to W$ fournit en particulier un isomorphisme de A-modules instables $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N \cong \mathrm{H}^*W \otimes N$, naturel en le H^*V/W-A-module instable N. On en déduit que l'on dispose d'un diagramme commutatif dans la catégorie $\mathcal{U}$

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \widetilde{\Sigma} N & \xrightarrow{\ \gamma\ } & \widetilde{\Sigma}(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N) \\
{\scriptstyle\cong}\big\downarrow & & {\scriptstyle\cong}\big\downarrow \\
\mathrm{H}^*W \otimes \widetilde{\Sigma} N & \xrightarrow{\ \gamma_{\mathcal{U}}\ } & \widetilde{\Sigma}(\mathrm{H}^*W \otimes N)
\end{array}$$

dans lequel $\gamma_{\mathcal{U}}$ est l'isomorphisme évoqué plus haut (celui de [**32**, proposition 8.1.1]). Le $\mathcal{U}$-homomorphisme sous-jacent à γ est donc un isomorphisme si bien qu'il en est de même pour γ. □

Nous voici armés pour définir et décrire « l'instabilisé » de $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}}X$ que nous notons $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{utop}}X$. Nous posons

$$\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{utop}}X := \widetilde{\Sigma}^n(\Sigma^n \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}}X)$$

(ci-dessus n désigne, comme convenu dans ce mémoire, la dimension de V). Par construction $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{utop}}X$ est un complexe (de cochaînes) dont les termes sont des H^*V-A-modules instables et qui est un sous-complexe de $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}}X$, dans la catégorie des complexes dont les termes sont des H^*V-A-modules. Précisons. Les isomorphismes

$$\mathrm{C}^p_{\mathrm{utop}}X \cong \widetilde{\Sigma}^p(\widetilde{\Sigma}^{n-p}\Sigma^{n-p})\Sigma^p \mathrm{C}^p_{\mathrm{top}}X \cong \widetilde{\Sigma}^p \Sigma^p \mathrm{C}^p_{\mathrm{top}}X$$

et la proposition 6.11 montrent :

– que $\mathrm{C}^p_{\mathrm{utop}}X$ est le plus grand sous-A-module instable de $\mathrm{C}^p_{\mathrm{top}}X$

– que $\mathrm{C}^p_{\mathrm{utop}}X$ un sous-H^*V-A-module de $\mathrm{C}^p_{\mathrm{top}}X$

– et que l'on a un isomorphisme de H^*V-A-modules instables

$$\mathrm{C}^p_{\mathrm{utop}}X \cong \bigoplus_{\operatorname{codim} W=p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \widetilde{\Sigma}^p\, \mathrm{H}^*_{V/W}(X^W, \mathrm{Sing}_{V/W}X^W).$$

Proposition 6.12. – *Le complexe $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{utop}}X$ est e-fini spécial.*

Démonstration. – Il suffit de se convaincre de ce que le H^*V/W-A-module instable $\widetilde{\Sigma}^p\, \mathrm{H}^*_{V/W}(X^W, \mathrm{Sing}_{V/W}X^W)$ est fini. Or celui-ci est en particulier un sous-module du module $\Sigma^{-p}\, \mathrm{H}^*_{V/W}(X^W, \mathrm{Sing}_{V/W}X^W)$ qui est fini. □

On rappelle que l'on a posé $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{alg}}X := \mathrm{C}^\bullet\, \mathrm{H}^*_V X$ (resp. $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{alg}}X := \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\, \mathrm{H}^*_V X$), $\mathrm{C}^\bullet$ désignant le foncteur de V_{tf}-$\mathcal{U}$ dans $\mathrm{Ch}^{\geq 0}(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$ introduit dans la section 5. Nous sommes maintenant en mesure d'exhiber un homomorphisme de complexes de cochaînes (resp. complexes de cochaînes coaugmentés), de H^*V-A-modules, $\varkappa : \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{alg}}X \to \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}}X$ (resp. $\varkappa : \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{alg}}X \to \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}X$) qui sera un isomorphisme si l'on suppose $\mathrm{H}^*_V X$ libre comme H^*V module.

On note $\mathrm{c}^\bullet X$ le complexe $\mathrm{c}^\bullet\, \mathrm{H}^*_V X = (\mathrm{H}^*_V X \to 0 \to 0 \to \cdots)$; $\mathrm{c}^\bullet X$ est un objet de $\mathrm{Ch}^{\geq 0}(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$. Nous avons vu dans la section 4 que l'on dispose d'un homomorphisme de complexes de cochaînes de H^*V-A-modules $\eta : \mathrm{c}^\bullet X \to \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}}X$ (qui fournit la coaugmentation de $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}X$). On note $\eta_{\mathrm{u}} : \mathrm{c}^\bullet X \to \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{utop}}X$ l'homomorphisme $\widetilde{\Sigma}^n(\Sigma^n \eta)$; par construction η_{u} est un morphisme de $\mathrm{Ch}^{\geq 0}(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$ et l'on a $\eta = \iota \circ \eta_{\mathrm{u}}$, ι désignant l'inclusion $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{utop}}X \hookrightarrow \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}}X$. On note $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{utop}}X$ le complexe coaugmenté grâce à η_{u} ; il est clair que ι se prolonge en un homomorphisme de complexes de cochaînes coaugmentés, prolongement que nous notons encore ι. On considère le $\mathrm{Ch}^{\geq 0}(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$-morphisme

$$\mathbf{G}\,\eta_u : \mathbf{G}\,\mathrm{c}^\bullet X \to \mathbf{G}\,\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{utop}}X.$$

Par définition $\mathbf{G}\,\mathrm{c}^\bullet X$ est $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{alg}}X$; les propositions 6.7 et 6.12 fournissent un isomorphisme canonique $\nu : \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{utop}}X \to \mathbf{G}\,\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{utop}}X$. On prend pour

$$\varkappa : \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{alg}}X \longrightarrow \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}}X$$

l'homomorphisme $\iota \circ \nu^{-1} \circ \mathbf{G}\,\eta_u$. En contemplant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{G}\,\mathrm{c}^\bullet X & \xrightarrow{\mathrm{G}\,\eta_{\mathrm{u}}} & \mathrm{G}\,\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{utop}}X \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \mathbf{G}\,\mathrm{c}^\bullet X & \xrightarrow{\mathbf{G}\,\eta_{\mathrm{u}}} & \mathbf{G}\,\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{utop}}X \end{array}$$

on se convainc que $\nu^{-1} \circ \mathbf{G}\,\eta_{\mathrm{u}}$ et $\varkappa$ se prolongent respectivement en des homomorphismes $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{alg}}X \to \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{utop}}X$ et $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{alg}}X \to \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}X$. Ce dernier est encore noté $\varkappa$; par construction il est l'identité pour $\bullet = -1$. Ceci achève la vérification du point (a) de 0.3.

La proposition 6.13 ci-après dit que l'homorphisme de complexes de H^*V-A-modules $\varkappa$ que nous venons de définir est une transformation naturelle de foncteurs (contravariants en X) en un sens facile à deviner. Précisons tout de même. Soient X

et Y deux V-CW-complexes finis et $f : X \to Y$ une application V-équivariante. On a $f(X^W) \subset f(Y^W)$ pour tout sous-groupe W de V et *a fortiori* $f(\mathrm{F}_p X) \subset f(\mathrm{F}_p Y)$ (la filtration F_p est introduite en section 4) si bien que f induit un homomorphisme de complexes de H^*V-A-modules $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\, Y \to \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\, X$, disons $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}(f)$. Notons d'autre part $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{alg}}(f) : \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{alg}}\, Y \to \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{alg}}\, X$ l'homomorphisme de complexes de H^*V-A-modules instables induit par l'homomorphisme de H^*V-A-modules instables $f^* : \mathrm{H}^*_V Y \to \mathrm{H}^*_V X$ (le foncteur $V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U} \to \mathrm{Ch}^{\geq -1}(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}), M \mapsto \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet M$, introduit en section 5, est covariant en M). En reprenant chaque étape de la définition de $\varkappa$ on constate que l'énoncé suivant est vérifié :

Proposition 6.13. – *Soient X et Y deux V-CW-complexes finis et $f : X \to Y$ une application V-équivariante. Le diagramme de complexes de* H^*V-A-*modules*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{alg}}\, Y & \xrightarrow{\varkappa_Y} & \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\, Y \\ {\scriptstyle \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{alg}}(f)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}(f)} \\ \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{alg}}\, X & \xrightarrow{\varkappa_X} & \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\, X \end{array}$$

est commutatif.

On a précisé ci-dessus la notation $\varkappa : \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{alg}}\, X \to \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\, X$ en $\varkappa_X$ pour souligner la naturalité en X de $\varkappa$... qui est le propos de l'énoncé.

On en vient maintenant au point (b) de 0.3 :

Proposition 6.14. – *Soient V un 2-groupe abélien élémentaire et X un V-CW-complexe fini. Si $\mathrm{H}^*_V X$ est libre comme H^*V-module alors l'homomorphisme de complexes de cochaînes de H^*V-A-modules (coaugmentés par $\mathrm{H}^*_V X$)*

$$\varkappa : \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{alg}}\, X \longrightarrow \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\, X$$

est un isomorphisme.

Démonstration. – D'apès 4.15 tous les termes du complexe $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}}\, X$ sont des A-modules instables, en d'autres termes on a $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{utop}}\, X = \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}}\, X$ et $\eta_{\mathrm{u}} = \eta$; l'homomorphisme $\varkappa : \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{alg}} X \to \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}} X$ est le composé $\nu^{-1} \circ \mathbf{G}\,\eta$. Le théorème 4.8 dit que $\eta : \mathrm{c}^\bullet X \to \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}} X$ est un quasi-isomorphisme, ce qui entraîne que $\mathbf{G}\,\eta$ est un isomorphisme. □

La proposition ci-dessus dit en particulier que si $\mathrm{H}^*_V X$ est libre comme H^*V-module alors l'homomorphisme de H^*V-A-modules

$$\mathrm{R}^n\mathrm{Pf}\,\mathrm{H}^*_V X \cong \mathrm{C}^n_{\mathrm{alg}}\, X \xrightarrow{\varkappa^n_X} \mathrm{C}^n_{\mathrm{top}}\, X := \Sigma^{-n}\,\mathrm{H}^*_V(X, \mathrm{Sing}_V X)$$

est un isomorphisme ; on retrouve le résultat de 4.16.

La proposition ci-dessous montre que l'homomorphisme $\varkappa : \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{alg}}\, X \to \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}}\, X$ peut s'exprimer en fonction des $\varkappa^p : \mathrm{C}^p_{\mathrm{alg},V/W}\, X^W \to \mathrm{C}^p_{\mathrm{top,V/W}}\, X^W$ (la présence en indice de V/W est là pour signaler que l'on considère X^W comme un V/W-espace) pour $p = \dim V/W$.

Proposition 6.15. – *Soient V un 2-groupe abélien élémentaire, X un V-CW-complexe fini et p un entier avec $0 \leq p \leq n$.*

Soit

$$\mathrm{déc}^p_{\mathrm{alg}} : \mathrm{C}^p_{\mathrm{alg}}\, X \longrightarrow \bigoplus_{\operatorname{codim} W=p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{C}^p_{\mathrm{alg,V/W}}\, X^W$$

l'isomorphisme de H^*V-A-*modules instables induit par l'isomorphisme du point* (b) *de 5.15 et celui de 1.1.*

Soit

$$\mathrm{déc}^p_{\mathrm{top}} : \mathrm{C}^p_{\mathrm{top}}\, X \longrightarrow \bigoplus_{\operatorname{codim} W=p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{C}^p_{\mathrm{top,V/W}}\, X^W$$

l'isomorphisme de H^*V-A-*modules donné par le point (b) de 4.7.*

Alors le diagramme de de H^*V-A-*modules*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{C}^p_{\mathrm{alg}}\, X & \xrightarrow{\mathrm{déc}^p_{\mathrm{alg}}} & \bigoplus_{\operatorname{codim} W=p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{C}^p_{\mathrm{alg,V/W}}\, X^W \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \varkappa^p_X} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \bigoplus_{\operatorname{codim} W=p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \varkappa^p_{X^W,V/W}} \\
\mathrm{C}^p_{\mathrm{top}}\, X & \xrightarrow{\mathrm{déc}^p_{\mathrm{top}}} & \bigoplus_{\operatorname{codim} W=p} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{C}^p_{\mathrm{top,V/W}}\, X^W
\end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. – On propose une démonstration en kit. Les pièces de ce kit sont les énoncés 6.16, 6.17 et 6.18 ci-après ; les mots-clef de la notice de montage sont « fonctorialité » et « naturalité ».

Proposition-Définition 6.16. – *Soit W un sous-groupe de V. On a un isomorphisme canonique de complexes de* H^*V-A-*modules*

$$\iota_{\mathrm{top},W} \ : \ \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top},V}\, X^W \ \cong\ \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top},V/W}\, X^W$$

(à gauche X^W est vu comme un V-espace, à droite comme un V/W-espace).

Démonstration. – On constate que l'on a $\mathrm{F}_{p,V} X^W = \mathrm{F}_{p,V/W} X^W$. □

Proposition-Définition 6.17. – *Soient W un sous-groupe de V et N un* H^*V/W-A-*module instable. On a un isomorphisme canonique de complexes de* H^*V-A-*modules instables*

$$\mathrm{C}^\bullet_V\, (\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N) \ \cong\ \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{C}^\bullet_{V/W}\, N.$$

Dans le cas $N = \mathrm{H}^*_{V/W} X^W$ (et donc $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N = \mathrm{H}^*_V X^W$) cet isomorphisme est noté

$$\iota_{\mathrm{alg},W} \ : \ \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{alg},V}\, X^W \ \cong\ \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{alg},V/W}\, X^W.$$

Démonstration. – On observe que si $N \to I^\bullet$ est une résolution injective dans la catégorie V/W-$\mathcal{U}$ alors $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N \to \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} I^\bullet$ est une résolution injective dans la catégorie V-$\mathcal{U}$ (variante de l'argument utilisé dans la démonstration de 3.15). □

Proposition 6.18. – *Soit W un sous-groupe de V. Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{alg},V}\, X^W \arrow[r, "\iota_{\mathrm{alg},W}", "\cong"'] \arrow[d, "\varkappa_{V,X^W}"] & \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{alg},V/W}\, X^W \arrow[d, "\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \varkappa_{V/W,X^W}"] \\ \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top},V}\, X^W \arrow[r, "\iota_{\mathrm{top},W}", "\cong"'] & \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top},V/W}\, X^W \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. – On reprend la définition de la transformation naturelle $\varkappa$ et on utilise les points suivants :

– Soit $C^\bullet$ un complexe de cochaînes dans la catégorie V/W_{tf}-$\mathcal{U}$; on a un isomorphisme $\mathbf{G}_V(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} C^\bullet) \cong \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathbf{G}_{V/W}\, C^\bullet$ (l'endofoncteur $\mathbf{G}$ de la catégorie $\mathrm{Ch}^{\geq 0}(V_{\mathrm{tf}}$-$\mathcal{U})$ est introduit au début de cette section, la signification de V et V/W en indice est transparente).

– Soit $C^\bullet$ un complexe de cochaînes dans la catégorie V/W_{tf}-$\mathcal{U}$; si $C^\bullet$ est e-fini spécial (cette terminologie est introduite juste avant l'énoncé 6.7) alors il en est de même pour $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} C^\bullet$ (qui est un complexe de cochaînes dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$).

– L'isomorphisme $\iota_{\mathrm{top},W}$ de 6.16 induit un isomorphisme de complexes de cochaînes $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{utop},V}\, X^W \cong \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{utop},V/W}\, X^W$ dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$ (invoquer le point (c) de 6.11).

Fin de la démonstration de la proposition 6.15. – On constate (« par fonctorialité ») que les homomorphismes $\mathrm{déc}^p_{\mathrm{alg}}$, $\mathrm{déc}^p_{\mathrm{top}}$ coïncident respectivement avec les produits, indexés par les W de codimension p, des composés

$$\mathrm{C}^p_{\mathrm{alg},V}\, X \longrightarrow \mathrm{C}^p_{\mathrm{alg},V}\, X^W \xrightarrow[\cong]{\iota^p_{\mathrm{alg},W}} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{alg},V/W}\, X^W,$$

$$\mathrm{C}^p_{\mathrm{top},V}\, X \longrightarrow \mathrm{C}^p_{\mathrm{top},V}\, X^W \xrightarrow[\cong]{\iota^p_{\mathrm{top},W}} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top},V/W}\, X^W,$$

et on observe que la naturalité de $\varkappa$ (voir 6.13) dit que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}^p_{\mathrm{alg},V}\, X \arrow[r] \arrow[d, "\varkappa^p_X"] & \mathrm{C}^p_{\mathrm{alg},V}\, X^W \arrow[d, "\varkappa^p_{X^W}"] \\ \mathrm{C}^p_{\mathrm{top},V}\, X \arrow[r] & \mathrm{C}^p_{\mathrm{top},V}\, X^W \end{tikzcd}$$

est commutatif. □

La proposition 6.15 conduit à l'énoncé ci-dessous qui est une généralisation (prendre $j = \dim V$) de la proposition 6.14 :

Proposition 6.19. – *Soient V un 2-groupe abélien élémentaire, X un V-CW-complexe fini et $j \geq 0$ un entier. Si le H^*V-module sous-jacent à $\mathrm{H}^*_V X$ est une H^*V-j-syzygie, alors l'homomorphisme de H^*V-A-modules*

$$\varkappa^p_X : \widetilde{\mathrm{C}}^p_{\mathrm{alg}}\, X \longrightarrow \widetilde{\mathrm{C}}^p_{\mathrm{top}}\, X$$

est un isomorphisme pour $p \leq j$.

Démonstration. – L'implication (ii)$\Rightarrow$(iii) du théorème 5.20 montre que l'on a $\mathrm{H}^p\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\mathrm{H}^*_V X = 0$ pour $p \leq j-2$. Le point (a) de 5.30 dit alors que $\mathrm{Fix}_{(V,W)}\mathrm{H}^*_V X$ est libre comme H^*V/W-module pour $\operatorname{codim} W \leq j$.

Comme l'on a $\mathrm{H}^*_{V/W}X \cong \mathrm{Fix}_{(V,W)}\mathrm{H}^*_V X$ (proposition 1.1) la proposition 6.14 dit que $\varkappa_{V/W,X^W} : \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{alg},V/W}\,X \to \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top},V/W}\,X$ est un isomorphisme pour $\operatorname{codim} W \leq j$. La proposition 6.15 montre que $\varkappa^p_X : \widetilde{\mathrm{C}}^p_{\mathrm{alg}}\,X \to \widetilde{\mathrm{C}}^p_{\mathrm{top}}\,X$ est un isomorphisme pour $0 \leq p \leq j$; le cas particulier $p=-1$ est trivial. □

Nous sommes à présent en mesure d'obtenir la version topologique du théorème 5.20 :

THÉORÈME 6.20. – *Soient* V *un* 2*-groupe abélien élémentaire,* X *un* V*-*CW*-complexe fini et* $j \geq 0$ *un entier. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{H}^*_V X$ *est une* $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})$*-*$j$*-syzygie ;*

(ii) *le* H^*V*-module sous-jacent à* $\mathrm{H}^*_V X$ *est une* H^*V*-*j*-syzygie ;*

(iii) *on a* $\mathrm{H}^p\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}X = 0$ *pour* $p \leq j-2$.

L'implication (i)$\Rightarrow$(ii) est toujours triviale !

Démonstration de (ii)$\Rightarrow$(iii). – Le théorème 5.20 dit que la condition (ii) implique $\mathrm{H}^p\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{alg}}X = 0$ pour $p \leq j-2$. Compte tenu de 6.19 cette dernière condition implique $\mathrm{H}^p\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}X = 0$ pour $p \leq j-2$. □

Démonstration de (iii)$\Rightarrow$(i). – Soit W un sous-groupe de V ; l'exactitude du foncteur $\mathrm{Fix}_{(V,W)}$ et la proposition 4.10 montrent que la condition (iii) implique $\mathrm{H}^p\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top},V/W}X^W = 0$ pour $p \leq j-2$. On suppose maintenant $\operatorname{codim} W \leq j$; on a *a fortiori* $\mathrm{H}^p\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top},V/W}X^W = 0$ pour $p \leq \operatorname{codim} W - 2$ si bien que le lemme 4.13 implique que $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top},V/W}X^W$ est acyclique. L'implication (ii)$\Rightarrow$(i) du théorème 4.8 montre alors que $\mathrm{H}^*_{V/W}X^W$ est libre comme H^*V/W-module. La proposition 6.14 dit ensuite que $\varkappa_{X^W,V/W} : \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{alg},V/W}\,X \to \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top},V/W}\,X^W$ est un isomorphisme. Du coup, la proposition 6.15 montre que l'homomorphisme $\varkappa^p_X : \widetilde{\mathrm{C}}^p_{\mathrm{alg}}\,X \to \widetilde{\mathrm{C}}^p_{\mathrm{top}}\,X$ est un isomorphisme pour $p \leq j$ et donc que l'on a $\mathrm{H}^p\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{alg}}X = 0$ pour $p \leq j-2$. On conclut en invoquant l'implication (iii)$\Rightarrow$(i) du théorème 5.20. □

Nous achevons cette section en expliquant comme promis le lien entre le théorème 4.16 et la suite spectrale du théorème 0.3 de **[24]**. Dans cet article Henn considère un G-CW-complexe X, disons avec G un groupe de Lie compact, et étudie entre autres une suite spectrale convergeant vers la cohomologie équivariante modulo ℓ (ℓ un nombre premier fixé) de sa partie ℓ-singulière X_{s} (X_{s} est constitué des points fixés par un élément d'ordre ℓ). Le point de départ de **[24]** est **[29]**, cependant Henn mentionne dans son introduction que le cas où G est abélien ne nécessite pas les résultats de Jackowski-McClure et est très élémentaire. Nous prenons $G = V$. Soit X un V-CW-complexe ; Henn utilise implicitement le fait que l'application canonique

$$X_{\mathrm{s}} = \mathrm{Sing}_V X = \mathrm{colim}_{\mathcal{W}_0^{\mathrm{op}}} X^W \longrightarrow \mathrm{hocolim}_{\mathcal{W}_0^{\mathrm{op}}} X^W$$

est une équivalence d'homotopie et donc qu'il en est de même pour l'application (tout aussi canonique)

$$\mathrm{E}V \times_V \mathrm{Sing}_V X \longrightarrow \mathrm{hocolim}_{\mathcal{W}_0^{\mathrm{op}}} \mathrm{E}V \times_V X^W.$$

Les cas $n = 0$ et $n = 1$ ($n := \dim V$) sont triviaux ; nous supposons $n \geq 2$. On dispose d'une suite spectrale cohomologique du premier quadrant

$$\mathrm{E}_2^{p,q} = \lim_{\mathcal{W}_0}{}^p \mathrm{H}_V^q X^W \Rightarrow \mathrm{H}_V^{p+q} \mathrm{Sing}_V X.$$

Compte tenu de la proposition 3.9, on a sous l'hypothèse « $\mathrm{H}_V^* X$ libre comme $\mathrm{H}^* V$-module » :

$$\mathrm{E}_2^{p,*} = \begin{cases} \mathrm{H}_V^* X & \text{pour } p = 0, \\ 0 & \text{pour } 1 \leq p \leq n-2, \\ \mathrm{R}^n \mathrm{Pf}\, \mathrm{H}_V^* X & \text{pour } p = n-1. \end{cases}$$

Soit $\mathrm{b} : \mathrm{H}_V^* \mathrm{Sing}_V X \to \mathrm{E}_2^{0,*} = \mathrm{H}_V^* X$ l'homomorphisme de bord ; le composé de l'homomorphisme de restriction $\mathrm{H}_V^* X \to \mathrm{H}_V^* \mathrm{Sing}_V X$ et de b est l'identité. Pour s'en convaincre considérer l'application

$$\underset{\mathcal{W}_0^{\mathrm{op}}}{\mathrm{hocolim}}\, \mathrm{E}V \times_V X^W \to \underset{\mathcal{W}_0^{\mathrm{op}}}{\mathrm{hocolim}}\, \mathrm{E}V \times_V X$$

(la colimite homotopique de droite étant celle du foncteur « constant », $W \mapsto \mathrm{E}V \times_V X$) et utiliser un argument de fonctorialité. Nous laissons au lecteur le soin d'achever l'analyse du cas $n = 2$ et nous supposons $n \geq 3$. Dans ce cas il existe *a priori* une seule différentielle non triviale à savoir d_{n-1} et l'on a une suite exacte canonique (de $\mathrm{H}^* V$-A-modules instables)

$$\Sigma\, \mathrm{H}_V^* X \xrightarrow{\Sigma\, \mathrm{d}_{n-1}} \Sigma^{n-1}\, \mathrm{R}^n \mathrm{Pf}\, \mathrm{H}_V^* X \longrightarrow \mathrm{H}_V^* \mathrm{Sing}_V X \xrightarrow{\mathrm{b}} \mathrm{H}_V^* X \xrightarrow{\mathrm{d}_{n-1}} \Sigma^{n-2}\, \mathrm{R}^n \mathrm{Pf}\, \mathrm{H}_V^* X\,;$$

comme b est surjectif la différentielle d_{n-1} est triviale.

La discussion précédente conduit à l'énoncé suivant :

PROPOSITION 6.21. – *Soit X un V-CW-complexe fini. Si $\mathrm{H}_V^* X$ est libre comme $\mathrm{H}^* V$-module alors on a des isomorphismes canoniques de $\mathrm{H}^* V$-A-modules instables :*

$\mathrm{H}_V^* \mathrm{Sing}_V X \cong \mathrm{H}_V^* X \oplus \Sigma^{n-1} \mathrm{R}^n \mathrm{Pf}\, \mathrm{H}_V^* X$;
$\mathrm{H}_V^* \mathrm{Sing}_V X \cong \mathrm{H}_V^* X \oplus \Sigma^{-1} \mathrm{H}_V^* (X, \mathrm{Sing}_V X)$;
$\mathrm{H}_V^* (X, \mathrm{Sing}_V X) \cong \Sigma^n\, \mathrm{R}^n \mathrm{Pf}\, \mathrm{H}_V^* X$.

CHAPITRE 7

ILLUSTRATIONS

Dans cette section nous illustrons par quelques exemples certains des énoncés des sections précédentes. Toutes ces illustrations dérivent peu ou prou de la considération de représentations linéaires réelles d'un 2-groupe abélien élémentaire V.

Proposition 7.1. – *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire de V, en d'autres termes une représentation linéaire réelle de dimension finie du groupe V.*

On pose $n = \dim_{\mathbb{Z}/2} V$, $m = \dim_{\mathbb{R}} E$ et $f = \dim_{\mathbb{R}} E^V$ (E^V désigne le sous-espace de E constitué des vecteurs invariants par V).

On note $\mathrm{w}_k(E)$ la k-ième classe de Stiefel-Whitney, appartenant à $\mathrm{H}^k V$, de la représentation linéaire E.

On note enfin $E_{\text{rég}}$ le plus grand ouvert de E sur lequel l'action de V est libre et $V\backslash E_{\text{rég}}$ le quotient de cette action ($V\backslash E_{\text{rég}}$ est une variété de classe C^∞).

(a) *La classe $\mathrm{w}_{m-f}(E)$ est produit de classes de $\mathrm{H}^1 V - \{0\}$.*

(b) *On a un isomorphisme canonique de H^*V-A-modules instables*

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(V\backslash E_{\text{rég}}) \cong \Sigma^{f+n}\, \mathrm{R}^n \mathrm{Pf}_V\, (\mathrm{w}_{m-f}(E)\, \mathrm{H}^*V).$$

(On rappelle que la notation $\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}$ désigne la cohomologie modulo 2 à support compact, pour ce qui est de la structure de H^*V-A-module instable de $\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(V\backslash E_{\text{rég}})$ voir le scholie 4.5.)

Démonstration. – Comme V est un groupe fini on peut supposer, ce que nous faisons ci-après, que la représentation linéaire E est orthogonale, en clair que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est euclidien et que V agit par isométries.

On considère le fibré vectoriel euclidien $\mathrm{E}V \times_V E \to \mathrm{B}V$ que l'on note $\xi(E)$; les classes de Stiefel-Whitney de la représentation E sont par définition celles de $\xi(E)$. Soit u un élément du dual V^* de V ; $\mathbb{R}$ muni de l'action de V définie par $v.x = (-1)^{u(v)}x$ est une représentation orthogonale notée $\mathbb{R}_u$. Si l'on identifie $\mathrm{H}^1 V$ avec V^* alors on a $\mathrm{w}_1(\mathbb{R}_u) = u$. La représentation orthogonale E est isomorphe à une somme directe $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{R}_{u_i}$ (I ensemble fini à m éléments). On note J (resp. K) le sous-ensemble de I constitué des éléments i de I avec $u_i = 0$ (resp. $u_i \neq 0$) ;

par définition J a f éléments. Puisque l'on a $\xi(E) \cong \bigoplus_{i\in I} \xi(\mathbb{R}_{u_i})$, la classe de Stiefel-Whitney « totale » est le produit $\prod_{i\in I}(1+u_i) = \prod_{i\in K}(1+u_i)$; on a donc en particulier $\mathrm{w}_{m-f}(E) = \prod_{i\in K} u_i$ ce qui donne le point (a).

Passons au point (b). L'isomorphisme de Thom conduit à l'énoncé suivant :

Proposition 7.2. – *Soit* $\mathrm{S}(E\oplus\mathbb{R}_0)$ *la sphère unité de la représentation orthogonale* $E\oplus\mathbb{R}_0$ *de* V*. On a un isomorphisme de* H^*V*-*A*-modules instables*

$$\mathrm{H}^*_V\,\mathrm{S}(E\oplus\mathbb{R}_0) \;\cong\; \Sigma^f\,\mathrm{w}_{m-f}(E)\,\mathrm{H}^*V \;\oplus\; \mathrm{H}^*V.$$

Démonstration. – Pour alléger la notation on pose $\mathrm{S} := \mathrm{S}(E\oplus\mathbb{R}_0)$. On note respectivement N_+ et N_- les points $(0,1)$ et $(0,-1)$ de S ; comme ces points sont fixes sous l'action de V, les ouverts $\mathrm{S}-\mathrm{N}_+$ et $\mathrm{S}-\mathrm{N}_-$ sont stables sous l'action de V. On note respectivement st_+ et st_- les projections stéréographiques de $\mathrm{S}-\mathrm{N}_+$ et $\mathrm{S}-\mathrm{N}_-$ sur E ; on vérifie que ces deux homéomorphismes sont V-équivariants.

On considère maintenant le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^*_V\,\mathrm{S} \arrow[r] & \mathrm{H}^*_V(\mathrm{S}-\mathrm{N}_-) \\ \mathrm{H}^*V \arrow[u] \arrow[r, "="] & \mathrm{H}^*V \arrow[u] \end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches verticales sont les homomorphismes de A-algèbres instables $\mathrm{H}^*_V(\text{point}) \to \mathrm{H}^*_V(-)$; celle de droite s'identifie *via* $\mathrm{H}^*_V(\mathrm{st}_-)$ à l'homomorphisme $\mathrm{H}^*V \to \mathrm{H}^*_V\,E$ et est donc un isomorphisme. On en déduit que la longue suite exacte de la paire $(\mathrm{S},\mathrm{S}-\mathrm{N}_-)$ en cohomologie équivariante donne en fait une suite exacte courte canoniquement scindée

$$0 \to \mathrm{H}^*_V(\mathrm{S},\mathrm{S}-\mathrm{N}_-) \to \mathrm{H}^*_V\,\mathrm{S} \to \mathrm{H}^*_V(\mathrm{S}-\mathrm{N}_-) \to 0$$

soit encore un isomorphisme de H^*V-A-modules instables

$$\mathrm{H}^*_V\,\mathrm{S} \;\cong\; \mathrm{H}^*_V(\mathrm{S},\mathrm{S}-\mathrm{N}_-) \;\oplus\; \mathrm{H}^*V.$$

Or on a par excision $\mathrm{H}^*_V(\mathrm{S},\mathrm{S}-\mathrm{N}_-) \cong \mathrm{H}^*_V(\mathrm{S}-\mathrm{N}_+,(\mathrm{S}-\mathrm{N}_+)-\mathrm{N}_-)$ et le membre de droite s'identifie *via* $\mathrm{H}^*_V(\mathrm{st}_+)$ à $\mathrm{H}^*_V(E,E-\{0\})$ qui d'après l'isomorphisme de Thom pour le fibré $\xi(E)$ est un H^*V-module libre de dimension 1 (engendré par la classe de Thom). On dispose dans notre contexte d'un énoncé plus précis concernant $\mathrm{H}^*_V(E,E-\{0\})$ qui permet d'achever la démonstration de 7.2 :

Lemme 7.3. – *On a un isomorphisme de* H^*V*-*A*-modules instables*

$$\mathrm{H}^*_V(E,E-\{0\}) \;\cong\; \Sigma^f\,\mathrm{w}_{m-f}(E)\,\mathrm{H}^*V.$$

Démonstration. – Soit $\widetilde{E}$ l'orthogonal de E^V dans E ; E^V et $\widetilde{E}$ sont stables par V et l'on a un isomorphisme de représentations orthogonales $E \cong E^V \oplus \widetilde{E}$. La paire d'espaces $(\mathrm{E}V\times_V E, \mathrm{E}V\times_V (E-0))$ s'écrit

$$(E^V, E^V-\{0\}) \times (\mathrm{E}V\times_V \widetilde{E}, \mathrm{E}V\times_V(\widetilde{E}-0))\,;$$

on en déduit que l'on a un isomorphisme de H^*V-A-modules instables

$$\mathrm{H}^*_V(E, E-\{0\}) \;\cong\; \Sigma^f\, \mathrm{H}^*_V(\widetilde{E}, \widetilde{E}-\{0\}).$$

Par définition même de la classe d'Euler de $\xi(\widetilde{E})$ (ici modulo 2), l'homomorphisme composé

$$\mathrm{H}^*V \xrightarrow{\text{isomorphisme de Thom}} \mathrm{H}^*_V(\widetilde{E}, \widetilde{E}-\{0\}) \longrightarrow \mathrm{H}^*_V\, \widetilde{E} \cong \mathrm{H}^*V$$

est la multiplication par cette classe. Comme la classe d'Euler de $\xi(\widetilde{E})$ coïncide avec $\mathrm{w}_{\dim \xi(\widetilde{E})}(\xi(\widetilde{E})) = \mathrm{w}_{m-f}(\xi(\widetilde{E})) = \mathrm{w}_{m-f}(\xi(E)) := \mathrm{w}_{m-f}(E)$, que $\mathrm{w}_{m-f}(E)$ est non nulle (point (a)) et que H^*V est intègre, on constate que l'homomorphisme de H^*V-A-modules instables $\mathrm{H}^*_V(\widetilde{E}, \widetilde{E}-\{0\}) \to \mathrm{H}^*_V\, \widetilde{E} \cong \mathrm{H}^*V$ est injectif et que son image s'identifie à $\mathrm{w}_{m-f}(E)\,\mathrm{H}^*V$. □

On achève maintenant la démonstration du point (b) à l'aide du théorème 4.16. La stratégie est la suivante :

1) On vérifie tout d'abord que le V-espace $\mathrm{S} := \mathrm{S}(E \oplus \mathbb{R}_0)$ admet une structure de V-CW-complexe fini. On pourrait invoquer [**26**], mais nous effectuerons cette vérification de manière explicite ci-après.

2) On constate que la proposition 7.2 dit en particulier que $\mathrm{H}^*_V\,\mathrm{S}$ est un H^*V-module libre (de dimension 2).

3) Compte tenu de 7.2, le théorème 4.16 donne un isomorphisme de H^*V-A-modules instables

$$\mathrm{H}^*_V(\mathrm{S}, \mathrm{Sing}_V\mathrm{S}) \;\cong\; \Sigma^n\, \mathrm{R}^n\mathrm{Pf}_V\, (\Sigma^f\, \mathrm{w}_{m-f}(E)\,\mathrm{H}^*V \,\oplus\, \mathrm{H}^*V).$$

4) On observe que l'on a $\mathrm{R}^n\mathrm{Pf}_V(\Sigma^f \mathrm{w}_{m-f}(E)\mathrm{H}^*V) \;\cong\; \Sigma^f\mathrm{R}^n\mathrm{Pf}_V(\mathrm{w}_{m-f}(E)\mathrm{H}^*V)$ d'après 5.11 et $\mathrm{R}^n\mathrm{Pf}_V\,\mathrm{H}^*V = 0$ car H^*V est un V_{tf}-$\mathcal{U}$-injectif (le cas $n=0$ est trivial).

5) On a un isomorphisme de H^*V-A-modules instables

$$\mathrm{H}^*_V(\mathrm{S}, \mathrm{Sing}_V\mathrm{S}) \;\cong\; \mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(V\backslash(\mathrm{S} - \mathrm{Sing}_V\mathrm{S}))$$

d'après le scholie 4.3.

6) On observe que la projection stéréographique st_+ induit un homéomorphisme V-équivariant de $\mathrm{S} - \mathrm{Sing}_V\mathrm{S}$ sur $E_{\text{rég}}$.

On s'acquitte enfin de la promesse faite en 1) :

Triangulation hyperoctaèdrique de la sphère unité d'une représentation orthogonale de dimension finie d'un 2-groupe abélien élémentaire. – Soient R une représentation orthogonale de dimension d de V et $u_i : V \to \mathbb{Z}/2$, $1 \le i \le d$, des formes linéaires telles que l'on a $R \cong \bigoplus_{1\le i\le d} \mathbb{R}_{u_i}$. On note :

– $\varrho : V \to (\mathbb{Z}/2)^d$ le produit des homomorphismes u_i,

– $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_d\}$ la base canonique de $(\mathbb{Z}/2)^d$,

– $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \dots, \mathrm{e}_d\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$,

– U^d la représentation orthogonale $\bigoplus_{1\leq i\leq d}\mathbb{R}_{\varepsilon_i^*}$ de $(\mathbb{Z}/2)^d$, en clair U^d est l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ muni de l'action de $(\mathbb{Z}/2)^d$ définie par

$$\varepsilon_i.\mathrm{e}_j = \begin{cases} -\mathrm{e}_j & \text{pour } i = j, \\ \mathrm{e}_j & \text{pour } i \neq j. \end{cases}$$

Soit Δ^{d-1} le $(d-1)$-simplexe standard de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire l'enveloppe convexe des points $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_d$. On pose

$$\mathrm{O}^{d-1} := \bigcup_{\varepsilon\in(\mathbb{Z}/2)^d} \varepsilon.\,\Delta^{d-1}\,;$$

O^{d-1} est *l'hyperoctaèdre standard* de $\mathbb{R}^d$ (O^2 est l'octaèdre standard de $\mathbb{R}^3$). La projection radiale

$$\mathrm{O}^{d-1} \to \mathrm{S}^{d-1} = \mathrm{S}(\mathrm{U}^d) = \mathrm{S}(R),\ x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

est un homéomorphisme, disons τ, qui est la triangulation hyperoctaèdrique mentionnée dans l'intertitre.

Par construction le groupe $(\mathbb{Z}/2)^d$ agit sur O^{d-1} et $\tau : \mathrm{O}^{d-1} \to \mathrm{S}(\mathrm{U}^d)$ est $(\mathbb{Z}/2)^d$-équivariante ; l'action de $(\mathbb{Z}/2)^d$ sur O^{d-1} induit *via* ϱ une action de V et $\tau : \mathrm{O}^{d-1} \to \mathrm{S}(R)$ est V-équivariante.

Soit Σ_m l'ensemble des m-simplexes de O^{d-1} ; les m-cellules de la structure de V-CW-complexe de $\mathrm{S}(R)$ sont indexées par $V\backslash\Sigma_m$. □

REMARQUE 7.4. – Le point (b) de la proposition 7.1 dit en particulier que le A-module instable $\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(V\backslash E_{\text{rég}})$ est une suspension $(f+n)$-ième d'un A-module instable. Existe-t-il une explication « topologique » de ce phénomène ? (On peut supposer $f = 0$ puisque l'espace $V\backslash E_{\text{rég}}$ est homéomorphe au produit $E^V \times V\backslash\widetilde{E}_{\text{rég}} \simeq \mathbb{R}^f \times \widetilde{E}_{\text{rég}}$.)

La proposition ci-dessous dit notamment que tous les H^*V-A-modules instables qui sont libres de dimension 1 comme H^*V-modules, sont ceux qui apparaissent dans le lemme 7.3.

PROPOSITION 7.5. – *Soit M un* H^*V-A-*module instable qui est libre de dimension* 1 *comme* H^*V-*module.*

(a) *Il existe un entier naturel f et un élément e de H^*V, produit d'éléments de $\mathrm{H}^1V - \{0\}$, tels que l'on a un isomorphisme de* H^*V-A-*modules instables*

$$M \cong \Sigma^f e\,\mathrm{H}^*V.$$

(b) *Le couple (f, e) est uniquement déterminé par la classe d'isomorphisme de M.*

Démonstration. – Le théorème 5.16 dit entre autres que l'unité d'adjonction $\eta_M : M \to \mathrm{H}^*V \otimes \mathrm{Fix}_V M$ ($\mathrm{Fix}_V := \mathrm{Fix}_{(V,V)}$) est injective et que son conoyau est de torsion ; en fait la théorie de Smith algébrique **[16, 33]** dit que $\eta_M[\mathrm{c}_V^{-1}]$ est un isomorphisme pour tout $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable M, c_V désignant le produit de tous les éléments de $\mathrm{H}^1V - \{0\}$. Il en résulte $\dim_{\mathrm{H}^*V} M = \dim_{\mathrm{H}^*V}(\mathrm{H}^*V \otimes \mathrm{Fix}_V M) = \dim_{\mathbb{F}_2} \mathrm{Fix}_V M$ (pour la première égalité oublier la graduation et tensoriser par le corps des fractions de H^*V) ; on a donc ici $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathrm{Fix}_V M = 1$. Cette égalité montre qu'il existe un entier naturel f, uniquement déterminé, tel que le A-module instable $\mathrm{Fix}_V M$ est isomorphe à $\Sigma^f \mathbb{F}_2$ si bien que l'on peut identifier $\mathrm{H}^*V \otimes \mathrm{Fix}_V M$ à $\Sigma^f \mathrm{H}^*V$. Soit g le générateur de M (l'article est défini parce que le groupe des unités de H^*V est trivial !) ; on pose $\eta_M(g) = \Sigma^f e$. On constate que l'idéal $e\,\mathrm{H}^*V$ de H^*V est stable sous l'action de A et que η_M induit un isomorphisme $M \cong \Sigma^f e\,\mathrm{H}^*V$. Le fait que e est un produit d'éléments de $\mathrm{H}^1V - \{0\}$ est conséquence d'un résultat de Serre [**40**, §2, corollaire] (voir 9.14). En effet ce résultat dit que l'idéal $e\,\mathrm{H}^*V$ contient un produit d'éléments de $\mathrm{H}^1V - \{0\}$, disons π, comme e divise π, e est également un produit d'éléments de $\mathrm{H}^1V - \{0\}$. □

SCHOLIE 7.6. – *La correspondance*

$$E \mapsto \mathrm{H}^*_V(E, E - \{0\})$$

induit une bijection entre classes d'isomorphisme de représentations linéaires réelles de V *et classes d'isomorphisme de* H^*V-A-*modules instables qui sont libres de dimension* 1 *comme* H^*V-*module.*

REMARQUE 7.7. – Soit (e, f) comme dans la proposition 7.5. Il est facile de se convaincre directement de l'isomorphisme de A-modules instables

$$\mathrm{Fix}_V\,(\Sigma^f e\,\mathrm{H}^*V) \cong \Sigma^f \mathbb{F}_2.$$

Soit $\iota : \Sigma^f e\,\mathrm{H}^*V \to \Sigma^f \mathrm{H}^*V$ l'inclusion évidente, on considère la suite exacte de H^*V-A-modules instables $0 \to \Sigma^f e\,\mathrm{H}^*V \xrightarrow{\iota} \Sigma^f \mathrm{H}^*V \to \operatorname{coker}\iota \to 0$. Comme $\operatorname{coker}\iota$ est un H^*V-module de torsion, $\mathrm{Fix}_V\,(\operatorname{coker}\iota)$ est nul, comme Fix_V est exact, $\mathrm{Fix}_V(\iota)$ est un isomorphisme.

D'après le point (b) de 1.16 on a $\mathrm{Fix}_V(\Sigma^f \mathrm{H}^*V) \cong \Sigma^f \mathrm{Fix}_V(\mathrm{H}^*V)$ et on constate que l'on a $\mathrm{Fix}_V(\mathrm{H}^*V) \cong \mathbb{F}_2$.

REMARQUE 7.8. – Posons

$$M := \bigoplus_{i=1}^{d} \Sigma^{f_i} e_i\,\mathrm{H}^*V$$

avec (f_i, e_i) comme dans la proposition 7.5. Le A-module instable $\mathrm{Fix}_V M$ est isomorphe à la somme directe $\bigoplus_{i=1}^d \Sigma^{f_i} \mathbb{F}_2$ et est donc un A-module instable trivial. Cette observation montre qu'un H^*V-A-module instable de la forme $\mathrm{H}^*V \otimes N$ avec N un A-module instable fini (H^*V-A-module instable qui est libre de dimension finie comme H^*V-module) ne peut être isomorphe à une somme directe du type ci-dessus si N n'est pas trivial. En effet on a $\mathrm{Fix}_V(\mathrm{H}^*V \otimes N) = N$, à nouveau d'après le point (b) de 1.16.

REMARQUE 7.9. – Reprenons les notations de la proposition 7.2. Cette proposition et la remarque précédente montrent que l'on a un isomorphisme de A-modules instables

$$\mathrm{Fix}_V\,\mathrm{H}^*_V\,\mathrm{S}(E \oplus \mathbb{R}_0) \cong \Sigma^f \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2.$$

Cet isomorphisme illustre la proposition 1.1 (avec $W = V$). En effet l'espace des points fixes $(\mathrm{S}(E \oplus \mathbb{R}_0))^V$ est la sphère $\mathrm{S}(E^V \oplus \mathbb{R}_0)$ qui est de dimension f.

Etude du complexe $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$

On prend maintenant pour E la représentation régulière réelle que l'on note $\mathbb{R}[V]$; il sera commode de considérer les vecteurs de $\mathbb{R}[V]$ comme des fonctions $f : V \to \mathbb{R}$, l'action d'un élément v_0 de V étant définie par la formule $(v_0.f)(v) = f(v + v_0)$. On munit $\mathbb{R}[V]$ du produit scalaire V-équivariant

$$(f, g) \;\mapsto\; \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} f(v) g(v)$$

($|V|$ désignant le cardinal de V). Le sous-espace invariant $(\mathbb{R}[V])^V$ est constitué des fonctions constantes, il est de dimension 1 engendré par la fonction constante 1. On pose $\widetilde{\mathbb{R}}[V] := ((\mathbb{R}[V])^V)^\perp$. En clair $\widetilde{\mathbb{R}}[V]$ est le sous-espace de $\mathbb{R}[V]$, stable sous l'action de V, constitué des fonctions f vérifiant $\sum_{v \in V} f(v) = 0$; $\widetilde{\mathbb{R}}[V]$ est appelée la *représentation réelle régulière réduite* de V. On dispose de deux isomorphismes de représentations orthogonales de V :

$$\mathbb{R}[V] \;\cong\; \bigoplus_{u \in V^*} \mathbb{R}_u,\; \widetilde{\mathbb{R}}[V] \;\cong\; \bigoplus_{u \in V^* - \{0\}} \mathbb{R}_u\,;$$

le second montre que la classe de Stiefel-Whitney $\mathrm{w}_{2^n-1}(\widetilde{\mathbb{R}}[V])$ (qui est aussi la classe d'Euler modulo 2 de $\widetilde{\mathbb{R}}[V]$) est le produit $\mathrm{c}_V := \prod_{u \in \mathrm{H}^1 V - \{0\}} u$. Le lemme 7.3 se spécialise en $\mathrm{H}^*_V\,(\widetilde{\mathbb{R}}[V], \widetilde{\mathbb{R}}[V] - \{0\}) \cong \mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V$. Nous allons étudier ci-après le complexe de H^*V-A-modules instables $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$ (voir section 5). D'après le théorème 5.16 ce complexe est acyclique, si bien que la coaugmentation $\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V \to \mathrm{C}^\bullet\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$ peut être vue comme une résolution du H^*V-A-module instable $\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V$ (1). Notre stratégie va être d'utiliser la proposition 6.14.

On commence par quelques observations :

(O_1) On a $\mathrm{S}(\mathbb{R}[V]) = \mathrm{S}(\widetilde{\mathbb{R}}[V] \oplus \mathbb{R}_0)$ (la représentation $\mathbb{R}_0$ au second membre est engendrée par la fonction constante 1 qui est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}[V]$ fixe sous l'action de V).

(O_2) Le sous-espace $(\mathbb{R}[V])^W$, W sous-groupe de V, s'identifie à $\mathbb{R}[V/W]$; plus précisément $(\mathbb{R}[V])^W$ vu comme une représentation orthogonale de V/W s'identifie à $\mathbb{R}[V/W]$ et $(\mathrm{S}(\mathbb{R}[V]))^W$ s'identifie à $\mathrm{S}(\mathbb{R}[V/W])$.

(O_3) Compte tenu de (O_1) et de la proposition 7.2, on a un isomorphisme canonique de H^*V-A-modules instables

$$\mathrm{H}^*_V\,\mathrm{S}(\mathbb{R}[V]) \;\cong\; \mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V \oplus \mathrm{H}^*V\,;$$

(1) En fait la recherche d'une résolution de ce type a été le point de départ de ce mémoire !

l'inclusion $\mathrm{H}^*V \to \mathrm{H}^*_V\,\mathrm{S}(\mathbb{R}[V])$ et la projection $\mathrm{H}^*_V\,\mathrm{S}(\mathbb{R}[V]) \to \mathrm{H}^*V$ s'identifient respectivement aux homomorphismes de H^*V-A-modules instables

$$\mathrm{H}^*V = \mathrm{H}^*_V(\text{point}) \to \mathrm{H}^*_V\,\mathrm{S}(\mathbb{R}[V]) \quad \text{et} \quad \mathrm{H}^*_V\,\mathrm{S}(\mathbb{R}[V]) \to \mathrm{H}^*_V\,\{1\} = \mathrm{H}^*V.$$

(O_4) Compte tenu de (O_3), on a un isomorphisme canonique de complexes de H^*V-A-modules instables

$$\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{H}^*_V\,\mathrm{S}(\mathbb{R}[V])) \;\cong\; \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V) \oplus \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{H}^*V)$$

et les homomorphismes canoniques $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{H}^*V) \leftrightarrow \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{H}^*_V\,\mathrm{S}(\mathbb{R}[V]))$ s'identifient aux homomorphisme évidents.

(O_5) On a $\mathrm{C}^\bullet\,(\mathrm{H}^*V) = (\mathrm{H}^*V \to 0 \to 0 \to \cdots)$ et la coaugmentation $\mathrm{H}^*V \to \mathrm{C}^0\,(\mathrm{H}^*V)$ est l'identité (observer que H^*V est un V_{tf}-$\mathcal{U}$-injectif avec $\mathrm{F}^1\mathrm{H}^*V = 0$). Même chose pour $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}}\,(\{1\})$; l'isomorphisme $\varkappa : \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{H}^*V) \to \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,(\{1\})$ fourni par la proposition 6.14 « est » l'identité.

Nous sommes maintenant en mesure de décrire le complexe $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$. La proposition 6.14 et les observations précédentes montrent que l'on a un isomorphisme canonique de complexes de H^*V-A-modules instables

$$\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V) \;\cong\; \ker\,(\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,\mathrm{S}(\mathbb{R}[V]) \to \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,\{1\}).$$

On pose

$$\mathrm{M}(V) := \ker\,(\,\mathrm{H}^*_V(\mathrm{S}(\mathbb{R}[V]), \mathrm{Sing}_V\mathrm{S}(\mathbb{R}[V])) \to \mathrm{H}^*_V(\{1\}, \mathrm{Sing}_V\{1\}))\,;$$

on observera que l'on a $\mathrm{H}^*_V(\{1\}, \mathrm{Sing}_V\{1\}) = 0$ pour $V \neq 0$!

Le H^*V-A-module instable $\mathrm{M}(V)$ a deux avatars : un avatar « topologique » $\mathrm{M}(V) \;\cong\; \Sigma^{-n}\,\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(V\backslash\widetilde{\mathbb{R}}[V]_{\text{rég}})$ et l'autre « algébrique » $\mathrm{M}(V) \;\cong\; \mathrm{R}^n\mathrm{Pf}_V\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$ ($n := \dim V$). On constate que l'on a $\mathrm{M}(V) = \mathbb{F}_2$ pour $n = 0$ et $n = 1$, et $\mathrm{M}(V) \cong \mathrm{J}_V(1)$ pour $n = 2$ ($\mathrm{J}_V(1)$ est l'un des V-$\mathcal{U}$-injectifs « tautologiques » introduits au début de la section 2). Nous verrons plus bas que $\mathrm{M}(V)$ est naturellement muni d'une action à droite de $\mathrm{GL}(V)$, compatible en un sens adéquat avec sa structure de H^*V-A-module instable ; le point culminant dans cette direction est la proposition 7.31.

Voici la forme du complexe (acyclique) $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$:

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V \to \mathrm{H}^*V \to \bigoplus_{\operatorname{codim} W=1} \mathrm{H}^*W \to \bigoplus_{\operatorname{codim} W=2} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{M}(V/W) \\ \to \cdots \to \bigoplus_{\operatorname{codim} W=n-1} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{M}(V/W) \to \mathrm{M}(V) \to 0. \end{aligned}$$

(On constate par inspection que $\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V \to \mathrm{C}^\bullet\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$ est une résolution injective dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$ pour $n \leq 2$.)

Remarque 7.10. – On aurait pu définir *mutatis mutandis* $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,(X, Y)$ pour une paire (X, Y) de V-CW-complexes finis et montrer que $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{H}^*_V(X, Y))$ et $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,(X, Y)$ sont naturellement isomorphes si $\mathrm{H}^*_V(X, Y)$ est libre comme H^*V-module. L'isomorphisme $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V) \;\cong\; \ker\,(\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,\mathrm{S}(\mathbb{R}[V]) \;\to\; \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,\{1\})$ aurait pu être remplacé par $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V) \cong \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\,(\mathrm{S}(\mathbb{R}[V]),\{1\})$ ce qui nous aurait évité quelques contorsions disgracieuses.

Action de $\mathrm{GL}(V)$ *sur* $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$. – La spécificité du complexe $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$ (et plus généralement des complexes $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\,(\mathrm{c}_V^h\,\mathrm{H}^*V)$, $h \in \mathbb{N}$) parmi les complexes $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\,(e\,\mathrm{H}^*V)$, avec e un produit arbitraire d'éléments de $\mathrm{H}^1V - \{0\}$, est la suivante :

L'action à gauche tautologique de $\mathrm{GL}(V)$ sur V induit une action à droite de $\mathrm{GL}(V)$ sur H^*V qui préserve la structure de A-module instable. En ce qui concerne la structure de H^*V-module, cette action est « tordue » :

Définition 7.11. – *Soit M un H^*V-A-module instable muni d'une action à droite de $\mathrm{GL}(V)$ qui préserve la structure de A-module instable de M. Nous dirons que cette action est* tordue *si l'on a*

$$(c\,x).\,\alpha = (\alpha^*c)\,(x.\,\alpha)$$

pour tout α dans $\mathrm{GL}(V)$, tout x dans M et tout c dans H^*V.

Comme c_V est invariant sous l'action à droite de $\mathrm{GL}(V)$ sur H^*V, le H^*V-A-module instable $\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V$ est également muni d'une action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$. On va voir ci-après que celle-ci se prolonge en une action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$. Précisons lourdement. Soit $\mathrm{GL}(V)_{\mathrm{td}}$-$V$-$\mathcal{U}$ la catégorie dont les objets sont les H^*V-A-modules instables munis d'une action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$ et dont les morphismes sont les V-$\mathcal{U}$-morphismes $\mathrm{GL}(V)$-équivariants ; $\mathrm{C}^{\bullet}\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$ est un complexe dans cette catégorie et la coaugmentation $\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V \to \mathrm{C}^0\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$ est un $\mathrm{GL}(V)_{\mathrm{td}}$-$V$-$\mathcal{U}$-morphisme.

Définition « topologique » de l'action de $\mathrm{GL}(V)$ *sur* $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$. – Soit X un V-espace muni d'une action à gauche (continue) de $\mathrm{GL}(V)$. Nous pourrions imiter la définition 7.11 et dire que cette action est tordue si l'on a

$$\alpha.(x+v) = \alpha.x + \alpha(v)$$

pour tout α dans $\mathrm{GL}(V)$ et tout v dans V (les actions de $\mathrm{GL}(V)$ et V sur X sont respectivement notées $(\alpha,x) \mapsto \alpha.x$ et $(v,x) \mapsto v+x$). Cependant nous n'introduirons pas cette terminologie car il est équivalent de dire que X est muni d'une action à gauche (continue) du produit semi-direct $V \rtimes \mathrm{GL}(V)$ (le *groupe affine* de V) qui prolonge celle de V.

Proposition 7.12. – *Soit X un V-espace muni d'une action à gauche (continue) de $V \rtimes \mathrm{GL}(V)$ qui prolonge celle de V.*

(a) *Le H^*V-A-module instable H^*_VX est naturellement muni d'une action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$.*

(b) *Soit Y un sous-espace de X stable sous l'action de $V \rtimes \mathrm{GL}(V)$ (et donc de V) alors le H^*V-A-module instable $\mathrm{H}^*_V(X,Y)$ est naturellement muni d'une action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$ et les V-$\mathcal{U}$-morphismes*

$$\mathrm{H}^*_V(X,Y) \longrightarrow \mathrm{H}^*_VX \longrightarrow \mathrm{H}^*_VY \xrightarrow{\ \partial\ } \Sigma\,\mathrm{H}^*_V(X,Y)$$

sont $\mathrm{GL}(V)$*-équivariants.*

Démonstration. – On vérifie le point (a) ; la vérification du point (b) est laissée au lecteur. L'action tautologique de $V \rtimes \mathrm{GL}(V)$ sur V induit une action à gauche de $V \rtimes \mathrm{GL}(V)$ sur $\mathrm{E}V$ et on constate que l'action diagonale de $V \rtimes \mathrm{GL}(V)$ sur $\mathrm{E}V \times X$ induit une action à gauche de $\mathrm{GL}(V)$ sur le quotient topologique $V\backslash(EV \times X)$, naturelle en X. En considérant l'application $(V \rtimes \mathrm{GL}(V))$-équivariante $X \to$ point, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}(V) \times (V\backslash(\mathrm{E}V \times X)) \arrow[r] \arrow[d] & V\backslash(\mathrm{E}V \times X) \arrow[d] \\ \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{B}V \arrow[r] & \mathrm{B}V, \end{tikzcd}$$

dans lequel la flèche horizontale du haut est l'action introduite ci-dessus et celle du bas l'action de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathrm{B}V$ induite par l'action tautologique de $\mathrm{GL}(V)$ sur V. Le point (a) de la proposition en résulte. □

Corollaire 7.13. – *Soit X un V-CW-complexe fini. Si l'action de V sur X se prolonge en une action à gauche (continue) de $V \rtimes \mathrm{GL}(V)$ alors la structure de complexe de cochaînes dans la catégorie V-$\mathcal{U}$-complexe de $\Sigma^n\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,X$ se raffine naturellement en une structure de complexe de cochaînes dans la catégorie* $\mathrm{GL}(V)_{\mathrm{td}}$*-$V$-$\mathcal{U}$.*

(La suspension n-ième, $n = \dim V$, n'est là que pour garantir que les termes du complexe en question sont « instables ».)

Démonstration. – On constate que les sous-espaces $\mathrm{F}_p\,X$ sont stables sous l'action de $V \rtimes \mathrm{GL}(V)$ (observer que si W est un sous-groupe de V et α un élément de $\mathrm{GL}(V)$ alors on a $\alpha.X^W = X^{\alpha(W)}$). Il en résulte que le connectant

$$\mathrm{H}^*_V(\mathrm{F}_p\,X, \mathrm{F}_{p-1}\,X) \longrightarrow \Sigma\,\mathrm{H}^*_V(\mathrm{F}_{p+1}\,X, \mathrm{F}_p\,X)$$

est $\mathrm{GL}(V)$-équivariant et donc que $\Sigma^n\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,X$ est un $\mathrm{GL}(V)_{\mathrm{td}}$-$V$-$\mathcal{U}$-complexe de cochaînes. □

Armés de l'énoncé 7.13 nous pouvons maintenant vérifier ce que nous avons affirmé plus haut concernant le complexe $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$:

– L'action tautologique de $V \rtimes \mathrm{GL}(V)$ sur V induit une action à gauche de $V \rtimes \mathrm{GL}(V)$ sur $\mathrm{S}(\mathbb{R}[V])$ qui prolonge celle de V et qui fixe le point 1 ; $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,\mathrm{S}(\mathbb{R}[V])$ et $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,\{1\}$ sont donc des $\mathrm{GL}(V)_{\mathrm{td}}$-$V$-$\mathcal{U}$-complexes de cochaînes (on peut oublier ici la suspension n-ième compte tenu de 4.15).

– L'homomorphisme $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,\mathrm{S}(\mathbb{R}[V]) \to \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}\,\{1\}$ est un morphisme dans la catégorie de ces complexes ; son noyau $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$ acquiert donc la structure de $\mathrm{GL}(V)_{\mathrm{td}}$-$V$-$\mathcal{U}$-complexe de cochaînes.

Définition « algébrique » de l'action de $\mathrm{GL}(V)$ *sur* $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$. – On peut munir $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$ d'une structure de $\mathrm{GL}(V)_{\mathrm{td}}$-$V$-$\mathcal{U}$-complexe de cochaînes de façon purement algébrique :

Proposition 7.14. – *Soit M un* H^*V-A*-module instable. Si M est muni d'une action à droite tordue de* $\mathrm{GL}(V)$ *alors celle-ci peut être naturellement prolongée à* $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet M$.

Avant d'attaquer la démonstration de cette proposition on introduit une définition et on dégage un énoncé (dont la vérification est immédiate) qui seront utiles à notre exposition.

Proposition-Définition 7.15. – *Soit M un* H^*V-A*-module instable.*

Soit α un élément de $\mathrm{GL}(V)$ *; on note $\theta_\alpha M$ le* A*-module instable M muni de la structure de* H^*V*-module définie via l'isomorphisme* $\alpha^* : \mathrm{H}^*V \to \mathrm{H}^*V$ *et* $\theta_\alpha : V\text{-}\mathcal{U} \to V\text{-}\mathcal{U}$ *le foncteur* $M \mapsto \theta_\alpha M$.

Si M est muni d'une action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$ *alors les applications* $M \to M, x \mapsto x.\alpha$, $\alpha \in \mathrm{GL}(V)$, *sont des V-$\mathcal{U}$-morphismes, disons* $a_\alpha : M \to \theta_\alpha M$ *vérifiant* $a_{\alpha\beta} = (\theta_\alpha a_\beta) \circ a_\alpha$, *pour tous α et β dans* $\mathrm{GL}(V)$ *et* $a_{1_{\mathrm{GL}(V)}} = \mathrm{id}_M$.

Réciproquement, une famille $(a_\alpha : M \to \theta_\alpha M)_{\alpha\in\mathrm{GL}(V)}$ *de V-$\mathcal{U}$-morphismes, vérifiant les propriétés ci-dessus donne une action à droite tordue de* $\mathrm{GL}(V)$ *sur M en posant* $x.\alpha = a_\alpha(x)$.

Elle va faire intervenir les trois propositions 7.16, 7.17, et 7.18 ci-après.

Proposition 7.16. – *Soient M un* H^*V-A*-module instable,* $M \to I^\bullet$ *une résolution injective de M dans la catégorie V-$\mathcal{U}$ et α un élément de* $\mathrm{GL}(V)$. *Alors* $\theta_\alpha M \to \theta_\alpha I^\bullet$ *est une résolution injective de* $\theta_\alpha M$ *dans la catégorie V-$\mathcal{U}$.*

Démonstration. – Les foncteurs θ_α sont exacts et préservent les injectifs (observer que l'on a $\mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathcal{U}}(-, \theta_\alpha -) = \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathcal{U}}(\theta_{\alpha^{-1}} -, -)$). □

Proposition 7.17. – *Soit M un* H^*V-A*-module instable muni d'une action à droite tordue de* $\mathrm{GL}(V)$, $(a_\alpha : M \to \theta_\alpha M)_{\alpha\in\mathrm{GL}(V)}$ *la famille de V-$\mathcal{U}$-morphismes associée à cette action (voir 7.15) et* $M \to I^\bullet$ *une résolution injective de M dans la catégorie V-$\mathcal{U}$.*

Alors on dispose d'une famille $(a^\bullet_\alpha : I^\bullet \to \theta_\alpha I^\bullet)_{\alpha\in\mathrm{GL}(V)}$ *d'homomorphismes de complexes dans la catégorie V-$\mathcal{U}$, unique à homotopie près, homomorphismes qui font commuter les diagrammes*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "a_\alpha"'] & I^\bullet \arrow[d, "a^\bullet_\alpha"'] \\ \theta_\alpha M \arrow[r] & \theta_\alpha I^\bullet \end{tikzcd}$$

et tels que $a^\bullet_{\alpha\beta}$ *est homotope à* $(\theta_\alpha a^\bullet_\beta) \circ a^\bullet_\alpha$ *pour tous α, β dans* $\mathrm{GL}(V)$ *(et que* $a^\bullet_{1_{\mathrm{GL}(V)}}$ *est l'identité).*

Démonstration. – Mantras de la théorie des résolutions injectives. □

Proposition 7.18. – *Soient M un H^*V-A-module instable et α un élément de $\mathrm{GL}(V)$. Alors les deux filtrations $(\mathrm{F}^p\theta_\alpha M)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_\alpha \mathrm{F}^p M)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\theta_\alpha M$ coïncident (la filtration $(\mathrm{F}^p -)_{p\in\mathbb{N}}$ est introduite au début de la section 5).*

La démonstration de 7.18 est reportée après la fin de celle de 7.14.

Fin de la démonstration de 7.14. – Soit $M \to I^\bullet$ une V-$\mathcal{U}$-résolution injective dans la catégorie V-$\mathcal{U}$. On a défini en section 5 le complexe $\mathrm{C}^\bullet M$ en posant $\mathrm{C}^p M := \mathrm{H}^p\mathrm{Gr}^p I^\bullet$ (la notation Gr^p- désigne le quotient $\mathrm{F}^p - /\mathrm{F}^{p+1}-$) et en prenant pour cobord le connectant associé à la suite exacte de complexes $0 \to \mathrm{Gr}^{p+1} I^\bullet \to \mathrm{F}^p I^\bullet/\mathrm{F}^{p+2} I^\bullet \to \mathrm{Gr}^p I^\bullet \to 0$. Les propositions 7.16 et 7.18 conduisent à l'énoncé suivant (que nous archivons en vue de futures références) :

Scholie 7.19. – *Soient M un H^*V-A-module instable et α un élément de $\mathrm{GL}(V)$. On a un isomorphisme naturel de complexes de H^*V-A-modules instables $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,\theta_\alpha M \cong \theta_\alpha\,\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet M$.*

La proposition 7.17 implique quant à elle que la famille de V-$\mathcal{U}$-morphismes

$$(\mathrm{C}^p(a_\alpha) : \mathrm{C}^p\, M \to \mathrm{C}^p\,\theta_\alpha M = \theta_\alpha \mathrm{C}^p\, M)_{\alpha\in\mathrm{GL}(V)}$$

définit une action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathrm{C}^p\, M$, uniquement déterminée par l'action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$ sur M, que les cobords $\mathrm{C}^p\, M \to \mathrm{C}^{p+1}\, M$ sont $\mathrm{GL}(V)$-équivariants et qu'il en est de même pour la coaugmentation $M \to \mathrm{C}^0\, M$. Expliquons par exemple la première implication : les égalités à homotopie près vérifiées par la famille d'homomorphismes de V-$\mathcal{U}$-complexes

$$(\mathrm{Gr}^p(a_\alpha^\bullet) : \mathrm{Gr}^p I^\bullet \to \mathrm{Gr}^p\theta_\alpha I^\bullet = \theta_\alpha\mathrm{Gr}^p I^\bullet)_{\alpha\in\mathrm{GL}(V)}$$

deviennent des égalités après application du foncteur H^p. □

Démonstration de 7.18. – Comme l'on a par définition

$$\mathrm{F}^p M := \bigcap_{\operatorname{codim} W<p} \ker\big(\rho_{(V,W)_M} : M \to \mathrm{EFix}_{(V,W)} M\big),$$

la proposition 7.18 est conséquence de la suivante :

Proposition 7.20. – *Soit M un H^*V-A-module instable. Soit α un élément de $\mathrm{GL}(V)$; on note encore α l'automorphisme de la catégorie $\mathcal{W}$ qu'il induit. On a un isomorphisme dans la catégorie $(V\text{-}\mathcal{U})^{\mathcal{W}}$*

$$\widehat{\Psi}(\theta_\alpha M) \;\cong\; \theta_\alpha \circ \widehat{\Psi}(M) \circ \alpha^{-1},$$

naturel en M.

(La notation $\widehat{\Psi}(M)$, ou $\widehat{\Psi}_M$, désigne le foncteur $W \mapsto \mathrm{EFix}_{(V,W)} M$ de $\mathcal{W}$ dans V-$\mathcal{U}$.)

Démonstration. – On commence par le lemme suivant :

LEMME 7.21. – *Soient* α *un élément de* $\mathrm{GL}(V)$ *et* W *un sous-groupe de* V. *On a un isomorphisme fonctoriel entre endofoncteurs de* V-$\mathcal{U}$:

$$\mathrm{EFix}_{(V,W)} \circ \theta_\alpha \cong \theta_\alpha \circ \mathrm{EFix}_{(V,\alpha^{-1}(W))}.$$

Démonstration. – Les endofoncteurs de V-$\mathcal{U}$, θ_α et $\mathrm{EFix}_{(V,W)}$, sont respectivement adjoints à gauche des endofoncteurs de V-$\mathcal{U}$, $\theta_{\alpha^{-1}}$ et $\mathrm{E}_{(V,W)}$ (on rappelle que $\mathrm{E}_{(V,W)}$ est l'endofoncteur $M \mapsto \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} M$). Il est donc équivalent de montrer que l'on a un isomorphisme fonctoriel entre endofoncteurs de V-$\mathcal{U}$:

$$\theta_{\alpha^{-1}} \circ \mathrm{E}_{(V,W)} \cong \mathrm{E}_{(V,\alpha^{-1}(W))} \circ \theta_{\alpha^{-1}},$$

ou encore :

$$\mathrm{E}_{(V,W)} \circ \theta_\alpha \cong \theta_\alpha \circ \mathrm{E}_{(V,\alpha^{-1}(W))}.$$

En clair il faut vérifier que l'on a pour tout H^*V-A-module instable M un isomorphisme de H^*V-A-modules instables

$$\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \theta_\alpha M \cong \theta_\alpha\,(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/\alpha^{-1}(W)} M)$$

naturel en M. Il s'agit d'un phénomène très général : soient A un anneau, B un sous-anneau de A, $\phi : A \to A$ un automorphisme d'anneau, M un A-module à gauche et $\theta_\phi M$ le A-module à gauche « obtenu en tordant l'action de A sur M par ϕ », alors l'application

$$A \times M \to A \otimes_{\phi(B)} M,\ (a,x) \mapsto \phi(a) \otimes_{\phi(B)} x$$

induit un isomorphisme

$$A \otimes_B \theta_\phi M \cong \theta_\phi(A \otimes_{\phi(B)} M)$$

de A-modules à gauche. □

On achève la démonstration de 7.20 à l'aide de la remarque 1.21. Précisons un peu. Soit $\mathrm{i}(V,W) : \mathrm{EFix}_{(V,W)} \circ \theta_\alpha \to \theta_\alpha \circ \mathrm{EFix}_{(V,\alpha^{-1}(W))}$ l'isomorphisme fonctoriel du lemme 7.21. Soient W_0 et W_1 deux sous-groupes de V avec $W_0 \subset W_1$; on doit vérifier que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{EFix}_{(V,W_0)}\,\theta_\alpha M \arrow[r, "\mathrm{i}(V,W_0)_M"] \arrow[d, "\rho(W_0,W_1)_{\theta_\alpha M}"'] & \theta_\alpha \mathrm{EFix}_{(V,\alpha^{-1}(W_0))}\,M \arrow[d, "\theta_\alpha\rho\,(\alpha^{-1}(W_0),\alpha^{-1}(W_1))_M"] \\
\mathrm{EFix}_{(V,W_1)}\,\theta_\alpha M \arrow[r, "\mathrm{i}(V,W_1)_M"] & \theta_\alpha \mathrm{EFix}_{(V,\alpha^{-1}(W_1))}\,M
\end{tikzcd}$$

est commutatif (la notation $\rho(W_0,W_1)$ est introduite dans la proposition-définition 1.20). En invoquant 1.21, on se ramène, par la même stratégie que précédemment, à vérifier qu'un diagramme « naturel » de la forme

$$\begin{tikzcd}
\theta_{\alpha^{-1}}\mathrm{E}_{(V,W_0)}N & \mathrm{E}_{(V,\alpha^{-1}(W_0))}\,\theta_{\alpha^{-1}}N \arrow[l, "\cong"'] \\
\theta_{\alpha^{-1}}\mathrm{E}_{(V,W_1)}N \arrow[u] & \mathrm{E}_{(V,\alpha^{-1}(W_1))}\,\theta_{\alpha^{-1}}N \arrow[l, "\cong"'] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

est commutatif, N étant un H^*V-A-module instable arbitraire et les isomorphismes horizontaux étant les isomorphismes naturels considérés dans la démonstration du lemme 7.21. Cette vérification est routine. □

COROLLAIRE 7.22. – *Soit M un H^*V-A-module instable. Soit α un élément de $\mathrm{GL}(V)$; on note encore α l'automorphisme de la catégorie $\mathcal{W}_0$ qu'il induit. On a un isomorphisme dans la catégorie $(V\text{-}\mathcal{U})^{\mathcal{W}_0}$*

$$\Psi(\theta_\alpha M) \cong \theta_\alpha \circ \Psi(M) \circ \alpha^{-1},$$

naturel en M.

Démonstration. – Par définition le foncteur $\Psi(M) : \mathcal{W}_0 \to V\text{-}\mathcal{U}$ est la restriction de $\widehat{\Psi}(M)$ à $\mathcal{W}_0$. □

La proposition 7.17 conduit également à l'énoncé suivant :

PROPOSITION 7.23. – *Soit M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable. Si M est muni d'une action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$ alors sa partie finie $\mathrm{Pf}\,M$ est stable sous cette action et les $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-modules instables $\mathrm{R}^k\mathrm{Pf}\,M$, $k \geq 1$, sont aussi naturellement munis d'une action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$. En d'autres termes, les foncteurs $\mathrm{R}^k\mathrm{Pf} : V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U} \to V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$, $k \geq 0$, induisent canoniquement des foncteurs $\mathrm{R}^k\mathrm{Pf} : \mathrm{GL}(V)_{\mathrm{td}}\text{-}V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U} \to \mathrm{GL}(V)_{\mathrm{td}}\text{-}V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$.*

(Le lecteur décodera sans peine la notation $\mathrm{GL}(V)_{\mathrm{td}}\text{-}V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$.)

Démonstration. – La partie de l'énoncé concernant $\mathrm{Pf}\,M$ est triviale ; elle permet d'ailleurs d'identifier $\mathrm{Pf}\,(\theta_\alpha -)$ et $\theta_\alpha\mathrm{Pf}\,(-)$. Passons à la partie concernant les $\mathrm{R}^k\mathrm{Pf}\,M$. Soient $M \to I^\bullet$ et $(a_\alpha^\bullet : I^\bullet \to \theta_\alpha I^\bullet)_{\alpha\in\mathrm{GL}(V)}$ la famille d'homomorphismes de complexes dans la catégorie $V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$ fournie par 7.17 ; la famille $(\mathrm{H}^k\mathrm{Pf}\,(a_\alpha^\bullet) : \mathrm{R}^k\mathrm{Pf}\,M \to \theta_\alpha\mathrm{R}^k\mathrm{Pf}\,M)_{\alpha\in\mathrm{GL}(V)}$ définit une action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathrm{R}^k\mathrm{Pf}\,M$, uniquement déterminée par l'action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$ sur M. □

SCHOLIE 7.24. – *Soient M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable et α un élément de $\mathrm{GL}(V)$. Pour tout entier $k \geq 0$, on a un isomorphisme naturel de $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-modules instables $\mathrm{R}^k\mathrm{Pf}\,\theta_\alpha M \cong \theta_\alpha\mathrm{R}^k\mathrm{Pf}\,M$.*

Coïncidence des actions de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$ définies topologiquement et algébriquement. – Sans surprise les deux structures que l'on vient de définir sur $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$, respectivement de façon topologique et algébrique, coïncident. Ceci résulte de la proposition 6.14 et la proposition 7.25 ci-dessous. Avant d'énoncer cette dernière, deux observations. Soit X un V-CW-complexe fini muni d'une action à gauche (continue) de $V \rtimes \mathrm{GL}(V)$ qui prolonge celle de V :

– Le H^*V-A-module instable H_V^*X est naturellement muni d'une action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$ d'après le point (a) de 7.12 si bien que le complexe $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\,\mathrm{H}_V^*X$ est naturellement muni d'une action à droite de $\mathrm{GL}(V)$ d'après 7.14.

– Le complexe $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\, X$ est naturellement muni d'une action à droite de $\mathrm{GL}(V)$ d'après 7.13.

PROPOSITION 7.25. – *Soit X un V-CW-complexe fini. Si l'action de V sur X se prolonge en une action à gauche (continue) de $V \rtimes \mathrm{GL}(V)$ alors l'homomorphisme de complexes*

$$\varkappa : \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\, \mathrm{H}^*_V X \longrightarrow \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\, X$$

introduit en section 6 est $\mathrm{GL}(V)$-équivariant.

(On rappelle que l'on a posé $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\, \mathrm{H}^*_V X =: \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{alg}}\, X$ en section 6 pour faire pendant à la notation $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\, X$.)

Démonstration. – Elle repose essentiellement sur la proposition 6.13. On trouvera les détails ci-après (détails techniques, d'où les petits caractères).

On commence par dégager cinq énoncés, 7.26, 7.27, 7.28, 7.29 et 7.30, dont la vérification ne présente pas de difficultés.

LEMME-DÉFINITION 7.26. – *Soient X un V-espace et α un élément de $\mathrm{GL}(V)$. L'espace X muni de l'action de V définie via l'isomorphisme $\alpha : V \to V$ est un V-espace noté $\theta_\alpha X$. L'homéomorphisme $\mathrm{E}\alpha \times \mathrm{id} : \mathrm{E}V \times X \to \mathrm{E}V \times X$ induit un homéomorphisme*

$$V\backslash(\mathrm{E}V \times \theta_\alpha X)) \longrightarrow V\backslash(\mathrm{E}V \times X),$$

noté h_α, qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V\backslash(\mathrm{E}V \times \theta_\alpha X) & \xrightarrow{\mathrm{h}_\alpha} & V\backslash(\mathrm{E}V \times X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{B}V & \xrightarrow{\mathrm{B}\alpha} & \mathrm{B}V. \end{array}$$

SCHOLIE 7.27. – *Soient X un V-espace et α un élément de $\mathrm{GL}(V)$. L'homomorphisme*

$$\mathrm{h}^*_\alpha : \mathrm{H}^*_V X \longrightarrow \theta_\alpha\, \mathrm{H}^*_V\, \theta_\alpha X$$

est un isomorphisme de H^*V-A-modules instables.

Soient X un V-CW-complexe fini et α un élément de $\mathrm{GL}(V)$; il est clair que $\theta_\alpha X$ est encore un V-CW-complexe fini. En observant que les énoncés 7.26 et 7.27 s'étendent *mutatis mutandis* aux paires de V-espaces, on obtient :

SCHOLIE-DEFINITION 7.28. – *Soient X un V-CW-complexe fini et α un élément de $\mathrm{GL}(V)$. L'isomorphisme $\mathrm{h}^*_\alpha : \mathrm{H}^*_V X \to \theta_\alpha\, \mathrm{H}^*_V\, \theta_\alpha X$ se prolonge en un isomorphisme, toujours noté $\mathrm{h}^*_\alpha : \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\, X \to \theta_\alpha\, \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\, \theta_\alpha X$, de complexes de H^*V-A-modules.*

On note encore $\mathrm{h}^*_\alpha : \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\, \mathrm{H}^*_V X \to \theta_\alpha\, \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\, \mathrm{H}^*_V\, \theta_\alpha X$ l'isomorphisme naturel de complexes de H^*V-A-modules donné par 7.19 et 7.28.

Proposition 7.29. – *Soient X un V-CW-complexe fini et α un élément de $\mathrm{GL}(V)$. Le diagramme de complexes de H^*V-A-modules*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\,\mathrm{H}^*_V X \arrow[r, "\varkappa_X"] \arrow[d, "\mathrm{h}^*_\alpha"', "\cong"] & \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\,X \arrow[d, "\mathrm{h}^*_\alpha"', "\cong"] \\
\theta_\alpha\,\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\,\mathrm{H}^*_V\,\theta_\alpha X \arrow[r, "\theta_\alpha\,\varkappa_{\theta_\alpha X}"] & \theta_\alpha\,\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\,\theta_\alpha X
\end{tikzcd}$$

est commutatif (par souci de clarté on précise la notation $\varkappa : \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\,\mathrm{H}^*_V X \to \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\,X$ en $\varkappa_X : \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\,\mathrm{H}^*_V X \to \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\,X$).

Proposition-Définition 7.30. – *Soit X un V-espace muni d'une action à gauche (continue) de $V \rtimes \mathrm{GL}(V)$ qui prolonge celle de V. Soit α un élément de $\mathrm{GL}(V)$; on note $\mathrm{t}_\alpha : X \to \theta_\alpha\,X$ l'homéomorphisme V-équivariant $x \mapsto \alpha.x$. La famille d'homomorphismes de H^*V-A-modules instables $(\theta_\alpha \mathrm{t}^*_\alpha \circ \mathrm{h}^*_\alpha : \mathrm{H}^*_V X \to \theta_\alpha \mathrm{H}^*_V X)_{\alpha\in\mathrm{GL}(V)}$ coïncide avec celle qui donne (voir 7.15) l'action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathrm{H}^*_V X$ (introduite dans le point (a) de 7.12).*

On en vient maintenant à la démonstration proprement dite de la proposition.

Soit V un V-CW-complexe fini muni d'une action à gauche (continue) de $V \rtimes \mathrm{GL}(V)$ qui prolonge celle de V. D'après la proposition 6.13 le diagramme de complexes de H^*V-A-modules

$$(\mathcal{N}_\alpha) \qquad \begin{tikzcd}
\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\,\mathrm{H}^*_V\,\theta_\alpha X \arrow[r, "\varkappa_{\theta_\alpha X}"] \arrow[d, "\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}(\mathrm{t}^*_\alpha)"', "\cong"] & \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\,\theta_\alpha X \arrow[d, "\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}(\mathrm{t}_\alpha)"', "\cong"] \\
\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\,\mathrm{H}^*_V X \arrow[r, "\varkappa_X"] & \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\,X
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Soit $(\theta_\alpha\,\mathcal{N}_\alpha)$ le diagramme obtenu en appliquant le foncteur θ_α à $(\mathcal{N}_\alpha)$; en « concaténant » le diagramme commutatif $\theta_\alpha\,(\mathcal{N}_\alpha)$ et celui de 7.29, on obtient au bout du compte un diagramme commutatif de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\,\mathrm{H}^*_V X \arrow[r, "\varkappa_X"] \arrow[d, "\mathrm{a}^{\mathrm{g}}_\alpha"', "\cong"] & \widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\,X \arrow[d, "\mathrm{a}^{\mathrm{d}}_\alpha"', "\cong"] \\
\theta_\alpha\,\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}\,\mathrm{H}^*_V X \arrow[r, "\theta_\alpha\,\varkappa_X"] & \theta_\alpha\,\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}\,X
\end{tikzcd}$$

(les exposants g et d pour gauche et droite). On vérifie enfin, à l'aide de l'énoncé 7.30 (et de son extension aux paires de $(V \rtimes \mathrm{GL}(V))$-espaces) et de l'énoncé 7.19, que les familles d'homomorphismes $(\mathrm{a}^{\mathrm{g}}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{GL}(V)}$ et $(\mathrm{a}^{\mathrm{d}}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{GL}(V)}$ correspondent (voir 7.15) aux actions à droite tordues respectivement introduites en 7.14 et 7.13. □

Quelques informations sur le $\mathrm{GL}(V)_{\mathrm{td}}$-$\mathrm{H}^*V$-A-*module instable* $\mathrm{M}(V)$. – La théorie que nous venons de développer concernant $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$, où plus directement la proposition 7.23, montre que le H^*V-A-module instable $\mathrm{M}(V)$ est canoniquement muni d'une action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$; le sous-espace $\mathrm{M}^0(V)$ des éléments de degré zéro est donc en particulier muni d'une action à droite de $\mathrm{GL}(V)$.

PROPOSITION 7.31. – *Le* $\mathrm{GL}(V)_{\mathrm{td}}$-$\mathrm{H}^*V$-A-*module instable* $\mathrm{M}(V)$ *possède les propriétés suivantes :*

(a) $\mathrm{M}(V)$ *est engendré comme* H^*V-*module par* $\mathrm{M}^0(V)$ *;*

(b) *comme* $\mathbb{F}_2[\mathrm{GL}(V)]$-*module à droite* $\mathrm{M}^0(V)$ *est isomorphe au dual* St_V^* *de la représentation de Steinberg (modulo* 2*)* St_V *de* $\mathrm{GL}(V)$ *(on convient de poser* $\mathrm{St}_V = \mathbb{F}_2$ *pour* $\dim V = 0$ *et* $\dim V = 1$*).*

(Pour des rappels concernant St_V voir par exemple 8.1.)

Démonstration du (a). – On procède par récurrence sur l'entier $n = \dim V$. Le cas $n = 0$ est trivial ; on franchit le pas de récurrence en observant que le cobord

$$\bigoplus\nolimits_{\dim W=1} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{M}(V/W) \xrightarrow{\mathrm{d}^{n-1}} \mathrm{M}(V)$$

de $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$ est surjectif. □

Démonstration du (b). – On suppose $n \geq 2$.

On va utiliser l'égalité $\mathrm{M}(V) := \mathrm{R}^n\mathrm{Pf}(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$ et l'isomorphisme $\mathrm{R}^n\mathrm{Pf}(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V) \cong \lim^{n-1}_{\mathcal{W}_0} \Psi(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$ fourni par la proposition 3.9.

On détermine ci-après le foncteur $\Psi(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$ et plus généralement le foncteur $\Psi(e\,\mathrm{H}^*V)$, e désignant un produit d'éléments de $\mathrm{H}^1V - \{0\}$.

PROPOSITION-DÉFINITION 7.32. – *Soit* e *un produit d'éléments de* $\mathrm{H}^1V - \{0\}$ *; soit* W *un sous-groupe de* V.

(a) *La classe* e *s'écrit de façon unique comme un produit* $e'e''$ *avec* e' *(resp.* e''*) un produit d'éléments de* $\mathrm{H}^1V - \{0\}$ *dont la restriction à* W *est nulle (resp. non nulle). La classe* e' *est notée* e_W *(on a en particulier* $e_0 = e$ *et* $e_V = 1$*).*

(b) *Si* W' *est un sous-groupe de* V *avec* $W' \subset W$ *alors* $e_{W'}$ *est un multiple de* e_W *et l'on a une inclusion canonique* $e_{W'}\,\mathrm{H}^*V \subset e_W\,\mathrm{H}^*V$.

(c) *Le foncteur* $\Psi(e\,\mathrm{H}^*V)$ *est le foncteur*

$$\mathcal{W}_0 \to V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U},\ W \mapsto e_W\,\mathrm{H}^*V.$$

Démonstration. – Les points (a) et (b) sont triviaux ; on démontre le point (c). On écrit $e = u_1u_2\cdots u_r$, avec $(u_1u_2,\ldots,u_r)$ une suite finie d'éléments de $\mathrm{H}^1V - \{0\}$; il est clair que l'on a un isomorphisme canonique de H^*V-A-modules instables :

$$e\,\mathrm{H}^*V \cong u_1\,\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V} u_2\,\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V} \cdots \otimes_{\mathrm{H}^*V} u_r\,\mathrm{H}^*V.$$

La proposition 1.13 montre que l'on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{EFix}_{(V,W)}(e\,\mathrm{H}^*V) \cong \mathrm{EFix}_{(V,W)}&(u_1\,\mathrm{H}^*V) \otimes_{\mathrm{H}^*V} \mathrm{EFix}_{(V,W)}(u_2\,\mathrm{H}^*V)\\ &\otimes_{\mathrm{H}^*V} \cdots \otimes_{\mathrm{H}^*V} \mathrm{EFix}_{(V,W)}(u_r\,\mathrm{H}^*V).\end{aligned}$$

On est donc amené à déterminer $\mathrm{EFix}_{(V,W)}(u\,\mathrm{H}^*V)$ pour u un élément de $\mathrm{H}^1V-\{0\}$. Pour cela on considère la suite exacte de H^*V-A-modules instables

$$0 \longrightarrow u\,\mathrm{H}^*V \xrightarrow{\subset} \mathrm{H}^*V \longrightarrow \mathrm{H}^*\ker u \longrightarrow 0$$

(on rappelle que l'on identifie H^1V et V^*). Puisque le foncteur $\mathrm{EFix}_{(V,W)}$ est exact on a aussi une suite exacte de H^*V-A-modules instables :

$$0 \to \mathrm{EFix}_{(V,W)}(u\,\mathrm{H}^*V) \to \mathrm{EFix}_{(V,W)}(\mathrm{H}^*V) \to \mathrm{EFix}_{(V,W)}(\mathrm{H}^*\ker u) \to 0.$$

En observant que l'on a $\mathrm{H}^*V \cong \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/V} \mathbb{F}_2$ et $\mathrm{H}^*\ker u \cong \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/\ker u} \mathbb{F}_2$ et en utilisant la proposition 1.25 on obtient des isomorphismes canoniques de H^*V-A-modules instables :

$$\mathrm{EFix}_{(V,W)}(\mathrm{H}^*V) \cong \mathrm{H}^*V \text{ et } \mathrm{EFix}_{(V,W)}(\mathrm{H}^*\ker u) \cong \begin{cases} \mathrm{H}^*\ker u & \text{pour } u_{|W} = 0, \\ 0 & \text{pour } u_{|W} \neq 0. \end{cases}$$

Dans le cas $u_{|W} = 0$ la proposition 1.25 montre également que l'homomorphisme $\mathrm{EFix}_{(V,W)}(\mathrm{H}^*V) \to \mathrm{EFix}_{(V,W)}(\mathrm{H}^*\ker u)$ s'identifie à l'épimorphisme canonique $\mathrm{H}^*V \to \mathrm{H}^*\ker u$.

Il en résulte que le monomorphisme $\mathrm{EFix}_{(V,W)}(u\,\mathrm{H}^*V) \to \mathrm{EFix}_{(V,W)}(\mathrm{H}^*V)$ s'identifie à l'inclusion $u\,\mathrm{H}^*V \hookrightarrow \mathrm{H}^*V$ dans le cas $u_{|W} = 0$ et à l'identité de H^*V dans le cas $u_{|W} \neq 0$. Le monomorphisme $\mathrm{EFix}_{(V,W)}(e\,\mathrm{H}^*V) \to \mathrm{EFix}_{(V,W)}(\mathrm{H}^*V)$ s'identifie donc à l'inclusion $e_W\,\mathrm{H}^*V \hookrightarrow \mathrm{H}^*V$.

On détermine la valeur de $\Psi(e\,\mathrm{H}^*V)$ sur les morphismes de $\mathcal{W}_0$ en observant que $\Psi(\mathrm{H}^*V)$ est le « foncteur constant » $W \mapsto \mathrm{H}^*V$ et en considérant la transformation naturelle de foncteurs de $\mathcal{W}_0$ dans V_{tf}-$\mathcal{U}$ induite par l'inclusion $e\,\mathrm{H}^*V \hookrightarrow \mathrm{H}^*V$. □

Exemple 7.33. – Soit W un sous-groupe de V, on pose $\mathrm{c}_{(V,W)} := q^*\mathrm{c}_{V/W}$, q désignant la surjection canonique $V \to V/W$; on a donc

$$\mathrm{c}_{(V,W)} := \prod_{u\in V^*,\, u_{|W}=0,\, u\neq 0} u$$

(en particulier $\mathrm{c}_{(V,0)} = \mathrm{c}_V$ et $\mathrm{c}_{(V,V)} = 1$). Soit $h \geq 0$ un entier, la proposition précédente dit que l'on a $\Psi(\mathrm{c}_V^h\,\mathrm{H}^*V)(W) = \mathrm{c}_{(V,W)}^h\,\mathrm{H}^*V$ et que l'image par $\Psi(\mathrm{c}_V^h\,\mathrm{H}^*V)$ d'une inclusion $W' \subset W$ (vue comme morphisme de $\mathcal{W}_0$) est l'inclusion $\mathrm{c}_{(V,W')}^h\,\mathrm{H}^*V \subset \mathrm{c}_{(V,W)}^h\,\mathrm{H}^*V$.

Suite de la démonstration du (b) de 7.31. – Soient $\mathcal{E}$ la catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels, et M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable ; on note $\Psi^0(M) : \mathcal{W}_0 \to \mathcal{E}$ le foncteur $W \mapsto (\Psi(M)(W))^0$ (le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel constitué des éléments de degré 0 du H^*V-A-module instable $\Psi(M)(W)$). Comme l'on a pour tout $k \geq 0$ l'égalité $\lim^k_{\mathcal{W}_0} \Psi^0(M) = (\lim^k_{\mathcal{W}_0} \Psi(M))^0$ (invoquer par exemple le rappel (R.2) de 3.5), la proposition 3.9 implique $(\mathrm{R}^n\mathrm{Pf}\, M)^0 \cong \lim_{\mathcal{W}_0}^{n-1} \Psi^0(M)$. On a donc en particulier $\mathrm{M}^0(V) \cong \lim_{\mathcal{W}_0}^{n-1} \Psi^0(\mathrm{c}_V\, \mathrm{H}^*V)$. On constate que l'on a :

$$\Psi^0(\mathrm{c}_V\, \mathrm{H}^*V)(W) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{pour } W = V, \\ 0 & \text{pour } W \neq V; \end{cases}$$

en effet la classe $\mathrm{c}_{(V,W)}$ (notation de 7.33) est de degré strictement positif pour $W \neq V$ et est égale à 1 pour $W = V$.

Récapitulons : on a $\mathrm{M}^0(V) \cong \lim_{\mathcal{W}_0}^{n-1} \mathrm{F}$, F désignant le foncteur de $\mathcal{W}_0$ dans $\mathcal{E}$ défini par

$$\mathrm{F}(W) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{pour } W = V, \\ 0 & \text{pour } W \neq V, \end{cases}$$

(la valeur de F sur les objets force la valeur de F sur les morphismes).

Soit $\mathrm{E} : \mathcal{W}_0 \to \mathcal{E}$ le foncteur « constant à valeur $\mathbb{F}_2$ » ($\mathrm{E} := \Delta_{\mathbb{F}_2}$ avec la notation du (R.1) de 3.5). On observe que l'on a $\mathrm{E} = \mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}_0}(-,V)}$, égalité qui entraîne $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}_0}}(G, \mathrm{E}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(G(V), \mathbb{F}_2)$ pour tout objet G de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}_0}$ et donc que E est un injectif de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}_0}$. Soit $\mathrm{i} : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ l'homomorphisme correspondant à l'isomorphisme $\mathrm{F}(V) \cong \mathbb{F}_2$; i est injectif ((E, i) est en fait une enveloppe injective de F dans la catégorie $\mathcal{E}^{\mathcal{W}_0}$). On note Q le conoyau de i ; on a :

– $\lim_{\mathcal{W}_0}^{n-1} \mathrm{F} \cong \lim_{\mathcal{W}_0}^{n-2} \mathrm{Q}$ pour $n > 2$,

– $\lim_{\mathcal{W}_0}^{n-1} \mathrm{F} \cong \operatorname{coker}(\lim_{\mathcal{W}_0}^{n-2} \mathrm{E} \longrightarrow \lim_{\mathcal{W}_0}^{n-2} \mathrm{Q})$ pour $n = 2$.

On a

$$\mathrm{Q}(W) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{pour } W \neq V \\ 0 & \text{pour } W = V \end{cases}$$

et $\mathrm{Q}(W' \subset W) = \mathrm{id}_{\mathbb{F}_2}$ pour $W \neq V$. Soit $\mathcal{W}_{0,n}$ le sous-ensemble ordonné de $\mathcal{W}$ constitué des W avec $W \neq 0$ et $W \neq V$; soit $\|\mathcal{W}_{0,n}\|$ le polyèdre associé. On constate que le complexe $\mathrm{L}^\bullet(\mathrm{Q})$ (voir le rappel (R.2) de 3.5) s'identifie au complexe de cochaînes polyédrales modulo 2 de $\|\mathcal{W}_{0,n}\|$ si bien que l'on a

$$\lim_{\mathcal{W}_0}^{n-2} \mathrm{Q} \;\cong\; \mathrm{H}^{n-2}(\|\mathcal{W}_{0,n}\|; \mathbb{F}_2).$$

Pareillement, le complexe $\mathrm{L}^\bullet(\mathrm{E})$ s'identifie au complexe de cochaînes polyédrales modulo 2 du cône sur $\|\mathcal{W}_{0,n}\|$ et l'homomorphisme $\mathrm{L}^\bullet(\mathrm{E}) \to \mathrm{L}^\bullet(\mathrm{Q})$ à l'homomorphisme induit par l'inclusion de $\|\mathcal{W}_{0,n}\|$ dans ce cône si bien que l'on a pour tout $n \geq 2$:

$$\lim_{\mathcal{W}_0}^{n-1} \mathrm{F} \;\cong\; \widetilde{\mathrm{H}}^{n-2}(\|\mathcal{W}_{0,n}\|; \mathbb{F}_2)$$

(voir 8.13). Comme l'on peut définir St_V par $\mathrm{St}_V := \widetilde{\mathrm{H}}_{n-2}(\|\mathcal{W}_{0,n}\|; \mathbb{F}_2)$ on obtient bien au bout du compte un isomorphisme canonique

$$\mathrm{M}^0(V) \;\cong\; (\mathrm{St}_V)^*.$$

Il reste à se convaincre qu'il s'agit d'un isomorphisme de $\mathbb{F}_2[\mathrm{GL}(V)]$-modules à droite. Pour cela on réexamine la proposition 3.9 dans le contexte des $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-modules instables munis d'une action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$.

Soient M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable et $M \to I^\bullet$ une résolution injective dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$. Les connectants associés à la suite exacte de complexes (voir le point (c) de 3.10)

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pf}(I^\bullet) \xrightarrow{\subset} I^\bullet \xrightarrow{\rho_{I^\bullet}} \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(I^\bullet) \longrightarrow 0$$

fournissent des V_{tf}-$\mathcal{U}$-morphismes naturels $\partial : \lim^k_{\mathcal{W}_0} \Psi(M) \to \mathrm{R}^{k+1}\mathrm{Pf}\,(M)$ pour tout $k \geq 0$ (∂ est un isomorphisme pour $k > 0$). Nous avons déjà montré que si M est muni d'une action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$ alors il en est de même pour $\mathrm{R}^{k+1}\mathrm{Pf}\,(M)$ (proposition 7.23). Nous allons d'abord montrer, de façon formelle, que $\lim^k_{\mathcal{W}_0} \Psi(M)$ est aussi canoniquement muni d'une action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$ et que pour cette action l'homomorphisme ∂ ci-dessus est $\mathrm{GL}(V)$-équivariant. Nous décrirons ensuite (proposition 7.38) cette action de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\lim^k_{\mathcal{W}_0} \Psi(M)$ en termes de la définition « combinatoire » des dérivés de lim (rappel (R.2) de 3.5). Passons à la réalisation de ce programme :

Supposons M muni d'une action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$. On dispose donc (proposition 7.15) d'une famille $(a_\alpha : M \to \theta_\alpha M)_{\alpha \in \mathrm{GL}(V)}$ d'homomorphismes dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$ avec $a_{\alpha\beta} = (\theta_\alpha a_\beta) \circ a_\alpha$ pour tous α et β dans $\mathrm{GL}(V)$ et $a_{1_{\mathrm{GL}(V)}} = \mathrm{id}_M$. Le fait que $\theta_\alpha M \to \theta_\alpha I^\bullet$ est encore une résolution injective dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$ (proposition 7.16) entraîne (proposition 7.17) que l'on dispose également d'une famille $(a^\bullet_\alpha : I^\bullet \to \theta_\alpha I^\bullet)_{\alpha \in \mathrm{GL}(V)}$ d'homomorphismes de complexes dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$, unique à homotopie près, homomorphismes qui font commuter les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & I^\bullet \\ {\scriptstyle a_\alpha}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle a^\bullet_\alpha} \\ \theta_\alpha M & \longrightarrow & \theta_\alpha I^\bullet \end{array}$$

et tels que $a^\bullet_{\alpha\beta}$ est homotope à $(\theta_\alpha a^\bullet_\beta) \circ a^\bullet_\alpha$ pour tous α, β dans $\mathrm{GL}(V)$ (et que $a^\bullet_{1_{\mathrm{GL}(V)}}$ est l'identité).

Soit Réd l'endofoncteur $M \mapsto M/\mathrm{Pf}(M)$ de la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$. La transformation naturelle, entre endofoncteurs de V_{tf}-$\mathcal{U}$, $\rho : \mathrm{id} \to \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(-)$, qui apparaît dans la proposition 3.9, induit d'après cette proposition une transformation naturelle $\bar{\rho} : \mathrm{Réd} \to \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(-)$ telle que $\bar{\rho}_I$ est un isomorphisme si I est injectif (point (c) de 3.10). On note $b^\bullet_\alpha$ l'homomorphisme de complexes composé

$$\lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(I^\bullet) \xrightarrow{(\bar{\rho}_{I^\bullet})^{-1}} \mathrm{Réd}(I^\bullet) \xrightarrow{\mathrm{Réd}(a^\bullet_\alpha)} \mathrm{Réd}(\theta_\alpha I^\bullet) = \theta_\alpha \mathrm{Réd}(I^\bullet) \xrightarrow{\theta_\alpha \bar{\rho}_{I^\bullet}} \theta_\alpha \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(I^\bullet).$$

Il est clair que $b^\bullet_{\alpha\beta}$ est homotope à $(\theta_\alpha b^\bullet_\beta) \circ b^\bullet_\alpha$ pour tous α, β dans $\mathrm{GL}(V)$ (et que $b^\bullet_{1_{\mathrm{GL}(V)}}$ est l'identité) : la famille $(b^\bullet_\alpha : \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(I^\bullet) \to \theta_\alpha \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(I^\bullet)_{\alpha \in \mathrm{GL}(V)}$ fournit une action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$ sur les $\lim^k_{\mathcal{W}_0} \Psi(M)$, $k \geq 0$, uniquement déterminée par l'action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$ sur M. La contemplation du diagramme commutatif de complexes (dont les deux lignes sont exactes)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Pf}(I^\bullet) \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\mathrm{Pf}(a^\bullet_\alpha)"'] & I^\bullet \arrow[r, "\rho_{I^\bullet}"] \arrow[d, "a^\bullet_\alpha"'] & \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(I^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "b^\bullet_\alpha"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \theta_\alpha \mathrm{Pf}(I^\bullet) \arrow[r, "\subset"] & \theta_\alpha I^\bullet \arrow[r, "\theta_\alpha \rho_{I^\bullet}"] & \theta_\alpha \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(I^\bullet) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

montre que les homomorphismes naturels $\partial : \lim^k_{\mathcal{W}_0} \Psi(M) \to \mathrm{R}^{k+1}\mathrm{Pf}\,(M)$ sont $\mathrm{GL}(V)$-équivariants.

La façon dont nous avons obtenu ci-dessus une action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$ sur les $\lim^k_{\mathcal{W}_0} \Psi(M)$ est très formelle ; nous allons ci-dessous décrire cette action en termes un peu plus concrets, dans la ligne du (R.2) de 3.5.

DÉFINITION 7.34. – *On reprend les notations du (R.2) de 3.5.*

Soient F un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}$ et ϕ un automorphisme de $\mathcal{C}$ (en clair une permutation qui respecte l'ordre).

On note $\lambda^\bullet_\phi : \mathrm{L}^\bullet(F) \to \mathrm{L}^\bullet(F \circ \phi)$ l'homomorphisme de complexes tel que le $\mathcal{A}$-morphisme

$$\lambda^k_\phi : \mathrm{L}^k(F) := \prod_{\sigma \in \mathrm{S}_k \mathcal{C}} F(\sup \sigma) \longrightarrow \prod_{\sigma \in \mathrm{S}_k \mathcal{C}} F(\phi \sup \sigma) =: \mathrm{L}^k(F \circ \phi)$$

est le produit $\prod_{\sigma \in \mathrm{S}_k \mathcal{C}} \pi_{\phi\sigma}$, $\pi_{\phi\sigma}$ désignant la projection du produit à la source sur le facteur d'indice $\phi\sigma$ à savoir $F(\sup \phi\sigma) = F(\phi \sup \sigma)$.

On note encore $\lambda^k_\phi : \lim^k_{\mathcal{C}} F \to \lim^k_{\mathcal{C}} (F \circ \phi)$ la transformation naturelle $\mathrm{H}^k(\lambda^\bullet_\phi)$; la transformation naturelle $\lambda^0_\phi : \lim_{\mathcal{C}} F \to \lim_{\mathcal{C}} (F \circ \phi)$ est aussi simplement notée λ_ϕ.

La vérification de l'énoncé suivant est immédiate :

PROPOSITION 7.35. – *Soient F un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}$ (notations du (R.2) de 3.5).*

(a) *Soient ϕ et ψ deux automorphismes de $\mathcal{C}$. Alors le composé des homomorphismes $\lambda^\bullet_\phi : \mathrm{L}^\bullet(F) \to \mathrm{L}^\bullet(F \circ \phi)$ et $\lambda^\bullet_\psi : \mathrm{L}^\bullet(F \circ \phi) \to \mathrm{L}^\bullet(F \circ (\phi \circ \psi))$ est $\lambda^\bullet_{\phi\circ\psi} : \mathrm{L}^\bullet(F) \to \mathrm{L}^\bullet(F \circ (\phi \circ \psi))$.*

(b) *Soit Γ un sous-groupe d'automorphismes de $\mathcal{C}$ avec $F \circ \phi = F$ pour tout ϕ dans Γ ; soit $k \geq 0$ un entier. Alors les $\lambda^k_\phi : \lim^k_{\mathcal{C}} F \to \lim^k_{\mathcal{C}} (F \circ \phi)$, ϕ parcourant Γ, définissent une action à droite de Γ sur $\lim^k_{\mathcal{C}} F$.*

PROPOSITION 7.36. – *On reprend les notations du (R.2) de 3.5.*

Soient F un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}$, ϕ un automorphisme de $\mathcal{C}$ et $F \to I^\bullet$ une résolution injective dans la catégorie $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$. Alors les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

– $F \circ \phi \to I^\bullet \circ \phi$ une résolution injective dans la catégorie $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$;

– le $\mathcal{A}$-morphisme induit entre k-ième objets de cohomologie par l'homomorphisme de $\mathcal{A}$-complexes $\lambda_\phi : \lim_{\mathcal{C}} I^\bullet \to \lim_{\mathcal{C}} (I^\bullet \circ \phi)$ s'identifie au $\mathcal{A}$-morphisme $\lambda^k_\phi : \lim^k_{\mathcal{C}} F \to \lim^k_{\mathcal{C}} (F \circ \phi)$.

Démonstration. – La première propriété est évidente : l'endofoncteur $F \mapsto F\circ\phi$ de $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ est exact et préserve les injectifs. Passons à la seconde. La famille d'homomorphismes de complexes $(\lambda_\phi^\bullet : \mathrm{L}^\bullet(I^q) \to \mathrm{L}^\bullet(I^q\circ\phi))_{q\in\mathbb{N}}$ définit un homomorphisme de bicomplexes $\mathrm{L}^\bullet(I^\bullet) \to \mathrm{L}^\bullet(I^\bullet\circ\phi)$ que l'on note $\lambda_\phi^{\bullet,\bullet}$. La seconde propriété est obtenue en appliquant le foncteur H^k au diagramme commutatif de complexes

$$\begin{array}{ccccc}
\lim_{\mathcal{C}} I^\bullet & \xrightarrow{\eta_{\mathrm{v}}} & \operatorname{Tot}\mathrm{L}^\bullet(I^\bullet) & \xleftarrow{\eta_{\mathrm{h}}} & \mathrm{L}^\bullet(F) \\
{\scriptstyle\lambda_\phi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\operatorname{Tot}\lambda_\phi^{\bullet,\bullet}}\big\downarrow & & {\scriptstyle\lambda_\phi^\bullet}\big\downarrow \\
\lim_{\mathcal{C}}(I^\bullet\circ\phi) & \xrightarrow{\eta_{\mathrm{v}}} & \operatorname{Tot}\mathrm{L}^\bullet(I^\bullet\circ\phi) & \xleftarrow{\eta_{\mathrm{h}}} & \mathrm{L}^\bullet(F\circ\phi)
\end{array}$$

(pour les notations se reporter au dernier point du (R.2) de 3.5). □

On revient maintenant au cas $\mathcal{A} = V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U}$, $\mathcal{C} = \mathcal{W}_0$ et $F = \Psi(M)$. On constate que l'énoncé (technique !) suivant est vérifié :

LEMME 7.37. – *Soient M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable et α un élément de $\mathrm{GL}(V)$ (que l'on peut aussi considérer comme un automorphisme de $\mathcal{W}_0$). L'homomorphisme $\theta_\alpha\,\rho_M : \theta_\alpha M \to \theta_\alpha \lim_{\mathcal{W}_0}\Psi(M)$ admet la factorisation suivante :*

$$\theta_\alpha M \xrightarrow{\rho\,\theta_\alpha M} \lim_{\mathcal{W}_0}\Psi(\theta_\alpha M) \xrightarrow{\cong} \theta_\alpha \lim_{\mathcal{W}_0}(\Psi(M)\circ\alpha^{-1}) \xrightarrow{\theta_\alpha\,\lambda_\alpha} \theta_\alpha \lim_{\mathcal{W}_0}\Psi(M),$$

la deuxième flèche étant induite par l'isomorphisme de 7.22.

Ce lemme conduit à la proposition ci-dessous.

PROPOSITION 7.38. – *Soient M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable muni d'une action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$, $k\geq 0$ un entier et α un élément de $\mathrm{GL}(V)$; soit $a_\alpha : M\to\theta_\alpha M$, $\alpha\in\mathrm{GL}(V)$, l'homomorphisme $x\mapsto x.\alpha$.*

Alors l'homomorphisme $\lim^k_{\mathcal{W}_0}\Psi(M) \to \theta_\alpha \lim^k_{\mathcal{W}_0}\Psi(M)$ donnée par l'action à droite tordue de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\lim^k_{\mathcal{W}_0}\Psi(M)$ admet la factorisation suivante :

$$\lim_{\mathcal{W}_0}^k\Psi(M) \xrightarrow{\lim^k_{\mathcal{W}_0}\Psi(a_\alpha)} \lim_{\mathcal{W}_0}^k\Psi(\theta_\alpha M) \xrightarrow{\cong} \theta_\alpha \lim_{\mathcal{W}_0}^k(\Psi(M)\circ\alpha^{-1}) \xrightarrow{\theta_\alpha\,\lambda_\alpha^k} \theta_\alpha \lim_{\mathcal{W}_0}^k\Psi(M),$$

la deuxième flèche étant induite par l'isomorphisme de 7.22.

Démonstration. – On reprend le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
I^\bullet & \xrightarrow{\rho_{I^\bullet}} & \lim_{\mathcal{W}_0}\Psi(I^\bullet) \\
{\scriptstyle a_\alpha^\bullet}\big\downarrow & & {\scriptstyle b_\alpha^\bullet}\big\downarrow \\
\theta_\alpha I^\bullet & \xrightarrow{\theta_\alpha\rho_{I^\bullet}} & \theta_\alpha\lim_{\mathcal{W}_0}\Psi(I^\bullet)
\end{array}$$

considéré plus haut. Soit $c_\alpha^\bullet$ l'homomorphisme de complexes composé

$$\lim_{\mathcal{W}_0}\Psi(I^\bullet) \xrightarrow{\lim_{\mathcal{W}_0}\Psi(a_\alpha^\bullet)} \lim_{\mathcal{W}_0}\Psi(\theta_\alpha I^\bullet) \xrightarrow{\cong} \theta_\alpha \lim_{\mathcal{W}_0}(\Psi(I^\bullet)\circ\alpha^{-1}) \xrightarrow{\theta_\alpha\,\lambda_\alpha} \theta_\alpha \lim_{\mathcal{W}_0}\Psi(I^\bullet).$$

En utilisant la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} I^\bullet & \xrightarrow{\rho_{I^\bullet}} & \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(I^\bullet) \\ {\scriptstyle a_\alpha^\bullet}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle lim_{\mathcal{W}_0}\Psi(a_\alpha^\bullet)} \\ \theta_\alpha I^\bullet & \xrightarrow{\rho_{\theta_\alpha I^\bullet}} & \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(\theta_\alpha I^\bullet) \end{array}$$

(naturalité de ρ) et le lemme 7.37 on constate que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} I^\bullet & \xrightarrow{\rho_{I^\bullet}} & \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(I^\bullet) \\ {\scriptstyle a_\alpha^\bullet}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle c_\alpha^\bullet} \\ \theta_\alpha I^\bullet & \xrightarrow{\theta_\alpha\rho_{I^\bullet}} & \theta_\alpha \lim_{\mathcal{W}_0} \Psi(I^\bullet) \end{array}$$

est aussi commutatif. On en déduit $b_\alpha^\bullet = c_\alpha^\bullet$ (car $\rho_{I^\bullet}$ est surjectif). □

On prend enfin $M = \mathrm{c}_V \mathrm{H}^*V$, $k = n-1$ ($n = \dim V$) et on se focalise sur le degré zéro. On rappelle que l'on a posé $\mathrm{F} := \Psi^0(\mathrm{c}_V \mathrm{H}^*V)$.

On constate que l'on a $\mathrm{End}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}_0}}(\mathrm{F}) = \{0, \mathrm{id}\}$ et donc que tout automorphisme de F est l'identité. On constate également que l'on a $\mathrm{F}\circ\alpha = \mathrm{F}$ pour tout α dans $\mathrm{GL}(V)$ et donc que les $\lambda_\alpha^{n-1} : \lim_{\mathcal{W}_0}^{n-1} \mathrm{F} \to \lim_{\mathcal{W}_0}^{n-1} \mathrm{F}$ définissent une action à droite de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\lim_{\mathcal{W}_0}^{n-1} \mathrm{F}$ (point (b) de 7.35). Ces constations faites, la proposition 7.38 permet de se convaincre que si l'on munit $\lim_{\mathcal{W}_0}^{n-1} \mathrm{F}$ de cette action alors l'homomorphisme $\lim_{\mathcal{W}_0}^{n-1} \mathrm{F} \to \mathrm{M}^0(V)$, considéré plus haut, est $\mathrm{GL}(V)$-équivariant.

On reprend ensuite la suite exacte $0 \to \mathrm{F} \to \mathrm{E} \to \mathrm{Q} \to 0$. On observe que l'on a aussi $\mathrm{E}\circ\alpha = \mathrm{E}$ et $\mathrm{Q}\circ\alpha = \mathrm{Q}$ pour tout α dans $\mathrm{GL}(V)$. En contemplant les diagrammes commutatifs de complexes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{L}^\bullet(\mathrm{F}) & \longrightarrow & \mathrm{L}^\bullet(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathrm{L}^\bullet(\mathrm{Q}) & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \lambda_\alpha^\bullet}\big\downarrow & & {\scriptstyle \lambda_\alpha^\bullet}\big\downarrow & & {\scriptstyle \lambda_\alpha^\bullet}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{L}^\bullet(\mathrm{F}) & \longrightarrow & \mathrm{L}^\bullet(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathrm{L}^\bullet(\mathrm{Q}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes (et en invoquant, si l'on en éprouve le besoin, le rappel (R.3) de 3.5) on voit que la suite exacte

$$\lim\nolimits_{\mathcal{W}_0}^{n-2} \mathrm{E} \longrightarrow \lim\nolimits_{\mathcal{W}_0}^{n-2} \mathrm{Q} \longrightarrow \lim\nolimits_{\mathcal{W}_0}^{n-1} \mathrm{F} \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de $\mathbb{F}_2[\mathrm{GL}(V)]$-modules à droite. Ceci achève (finalement !) la démonstration du point (b) de la proposition 7.31. □

Les complexes $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{c}_V^h\,\mathrm{H}^*V)$, $h \in \mathbb{N}$

Les résultats concernant le complexe $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V)$ que nous venons de présenter s'étendent *mutatis mutandis* aux complexes $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet\,(\mathrm{c}_V^h\,\mathrm{H}^*V)$, $h \in \mathbb{N}$ (on aura intérêt à traiter séparément le cas $h = 0$... qui est vraiment trivial).

Posons
$$\mathrm{M}(V;h) := \mathrm{R}^n\mathrm{Pf}(\mathrm{c}_V^h\,\mathrm{H}^*V) \cong \Sigma^{-n}\,\mathrm{H}_{\mathrm{c}}^*(V\backslash(\widetilde{\mathbb{R}}[V]^{\oplus h})_{\text{rég}})$$
(on a donc $\mathrm{M}(V;1)=\mathrm{M}(V)$).

– Le complexe $\mathrm{C}^\bullet\,(\mathrm{c}_V^h\,\mathrm{H}^*V)$ est obtenu en remplaçant $\mathrm{M}(-)$ par $\mathrm{M}(-;h)$.

– L'énoncé obtenu en remplaçant $\mathrm{M}(-)$ par $\mathrm{M}(-;h)$ dans l'énoncé 7.31 reste valable pour $h\geq 1$.

Précisons la seconde affirmation ci-dessus et tirons-en les conséquences :

Proposition 7.39. – *Soient h et h' deux entiers avec $1\leq h\leq h'$. L'inclusion de $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-modules instables, $\mathrm{c}_V^{h'}\,\mathrm{H}^*V \hookrightarrow \mathrm{c}_V^h\,\mathrm{H}^*V$, induit un isomorphisme $\mathrm{M}^0(V;h')\cong\mathrm{M}^0(V;h)$ et un homomorphisme surjectif $\mathrm{M}(V;h')\twoheadrightarrow\mathrm{M}(V;h)$ de $\mathrm{GL}(V)_{\mathrm{td}}$-$\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-modules instables.*

(La terminologie $\mathrm{GL}(V)_{\mathrm{td}}$-$\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-*module instable* est transparente.)

Démonstration. – Compte tenu du point (a) de 7.31, la seconde partie de la proposition résulte de la première. Pour démontrer celle-ci on considère le diagramme commutatif
$$\begin{array}{ccc}
\lim^{n-1}_{\mathcal{W}_0}(\Psi(\mathrm{c}_V^{h'}\,\mathrm{H}^*V))^0 & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{M}^0(V;h') \\
\downarrow & & \downarrow \\
\lim^{n-1}_{\mathcal{W}_0}(\Psi(\mathrm{c}_V^{h}\,\mathrm{H}^*V))^0 & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{M}^0(V;h)
\end{array}$$
dans lequel les isomorphismes horizontaux sont fournis par la proposition 3.10 (on suppose $V\neq 0$) et les flèches verticales sont induites par l'inclusion $\mathrm{c}_V^{h'}\,\mathrm{H}^*V\hookrightarrow\mathrm{c}_V^h\,\mathrm{H}^*V$, disons ι ; on conclut en observant que la transformation naturelle $\Psi(\mathrm{c}_V^{h'}\,\mathrm{H}^*V))^0\to\Psi(\mathrm{c}_V^{h}\,\mathrm{H}^*V))^0$ induite par ι est un isomorphisme fonctoriel d'après 7.32. □

Relation entre $\mathrm{M}(V;h)$ *et* $\mathrm{M}(V;2h)$. – Pour décrire cette relation il nous faut introduire l'endofoncteur « double » de la catégorie $\mathcal{U}$, foncteur noté Φ (voir par exemple [**32**, §2.3]). Rappelons sa définition. Soit M un A-module instable, on note ΦM le A-module instable défini par
$$(\Phi M)^k = \begin{cases} M^{\frac{k}{2}} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et}\ \mathrm{Sq}^i(\Phi x) = \begin{cases} \Phi(\mathrm{Sq}^{\frac{i}{2}}x) & \text{si } i \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
Φx désignant l'élément de $(\Phi M)^{2k}$ associé à un élément x de M^k. L'application, $\Phi M\to M, \Phi x\mapsto \mathrm{Sq}^{|x|}x$ ($|x|$ désignant le degré de x) est A-linéaire ; elle fournit une transformation naturelle, que l'on note λ, de Φ dans $1_{\mathcal{U}}$. Soit K une A-algèbre instable ; ΦK est muni d'une structure naturelle de A-algèbre instable et $\lambda_K:\Phi K\to K$ est un homomorphisme de A-algèbres instables qui par définition même d'une A-algèbre instable coïncide avec l'élévation au carré. Si M est muni d'une structure de K-A-module instable alors ΦM est naturellement muni d'une structure de ΦK-A-module instable. On note $\mathrm{E}\Phi : V\text{-}\mathcal{U}\to V\text{-}\mathcal{U}$ le foncteur
$$M\ \mapsto\ \mathrm{H}^*V\otimes_{\Phi\mathrm{H}^*V}\Phi M,$$

H^*V étant ci-dessus un $\Phi\mathrm{H}^*V$-module *via* λ_{H^*V} ; la transformation naturelle $\lambda : \Phi \to 1_{\mathcal{U}}$ induit une transformation naturelle $\mathrm{E}\Phi \to 1_{V\text{-}\mathcal{U}}$ que l'on note $\mathrm{E}\lambda$.

Proposition 7.40. – *Le foncteur* $\mathrm{E}\Phi$ *possède les cinq propriétés suivantes :*

(a) *Le foncteur* $\mathrm{E}\Phi$ *est exact.*

(b) *Si M est un* H^*V-A-*module instable de type fini comme* H^*V-*module alors il en est de même pour* $\mathrm{E}\Phi(M)$.

(c) *Si M est un* H^*V-A-*module instable e-fini (terminologie introduite en 5.6) alors il en est de même pour* $\mathrm{E}\Phi(M)$.

(d) *Soient M un* H^*V-A-*module instable et α un élément de* $\mathrm{GL}(V)$, *on a un isomorphisme de* H^*V-A-*modules instables, naturel en M :*

$$\mathrm{E}\Phi(\theta_\alpha M) \cong \theta_\alpha\, \mathrm{E}\Phi(M).$$

(e) *Si M est un* H^*V-A-*module instable muni d'une action à droite tordue de* $\mathrm{GL}(V)$ *alors* $\mathrm{E}\Phi(M)$ *est aussi naturellement muni d'une telle action. En d'autres termes l'endofoncteur* $\mathrm{E}\Phi$ *de V-$\mathcal{U}$ induit un endofoncteur de* $\mathrm{GL}(V)_{\mathrm{td}}$-$V$-$\mathcal{U}$.

On note tout d'abord que H^*V est un $\Phi\mathrm{H}^*V$-module libre de dimension finie (avec $\mathbb{F}_2 \otimes_{\Phi\mathrm{H}^*V} \mathrm{H}^*V$ isomorphe à l'algèbre extérieure Λ^*V).

(a) Le foncteur Φ est exact et H^*V est un $\Phi\mathrm{H}^*V$-module plat.

(b) Le $\Phi\mathrm{H}^*V$-module ΦM est de type fini.

(c) Soient W un sous-groupe de V et N un H^*V/W-A-module instable. On constate que l'on a un isomorphisme de H^*V-A-modules instables

$$\mathrm{H}^*V \otimes_{\Phi\mathrm{H}^*V} \Phi(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N) \cong \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} (\mathrm{H}^*V/W \otimes_{\Phi\mathrm{H}^*V/W} \Phi N)$$

(naturel en N) et que si le H^*V/W-A-module instable N est fini alors il en est de même pour le H^*V/W-A-module instable $\mathrm{H}^*V/W \otimes_{\Phi\mathrm{H}^*V/W} \Phi N$ (parce que H^*V/W est un $\Phi\mathrm{H}^*V/W$-module libre de dimension finie). □

Le point (e) résulte formellement du point (d) et de 7.15. L'isomorphisme en question dans le point (d) est induit par l'application $\mathrm{H}^*V \times \Phi M \to \mathrm{E}\Phi(M)$, $(a, \Phi x) \mapsto \alpha^* a \otimes_{\Phi\mathrm{H}^*V} \Phi x$. □

Proposition 7.41. – *Soit M un* $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-*module instable.*

(a) *On a un isomorphisme de* $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-*modules instables*

$$\mathrm{R}^p\mathrm{Pf}\,(\mathrm{E}\Phi(M)) \cong \mathrm{E}\Phi\,(\mathrm{R}^p\mathrm{Pf}\, M)$$

(naturel en M) pour tout entier naturel p.

(b) *Si M est muni d'une action à droite tordue de* $\mathrm{GL}(V)$ *alors l'isomorphisme ci-dessus préserve les actions à droite tordues données par 7.23 et le point* (e) *de 7.40.*

Soit $r : M \to I^\bullet$ une résolution injective dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$. Comme les injectifs de cette catégorie sont e-finis, les trois premiers points de la proposition 7.40 montre que $\mathrm{E}\Phi(r) : \mathrm{E}\Phi(M) \to \mathrm{E}\Phi(I^\bullet)$ est une résolution e-finie au sens de la partie définition de 5.10. La partie corollaire de 5.10 permet de conclure.

On note (localement) ν l'isomorphisme naturel du point (d) de 7.40 et on reprend les notations de 7.17.

Soit $s : \mathrm{E}\Phi(I^\bullet) \to J^\bullet$ un remplacement injectif dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$ (terminologie introduite au début de la section 6) ; on constate que $s\circ\mathrm{E}\Phi(r) : \mathrm{E}\Phi(M) \to J^\bullet$ est une résolution injective. Comme $\theta_\alpha s : \theta_\alpha\mathrm{E}\Phi(I^\bullet) \to \theta_\alpha J^\bullet$ est également un remplacement injectif, il existe un homomorphisme de complexes $b_\alpha^\bullet$, unique à homotopie près, tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E}\Phi(I^\bullet) & \xrightarrow{s} & J^\bullet \\ {\scriptstyle \nu_{I^\bullet}\circ\mathrm{E}\Phi(a_\alpha^\bullet)}\big\downarrow & & {\scriptstyle b_\alpha^\bullet}\big\downarrow \\ \theta_\alpha\mathrm{E}\Phi(I^\bullet) & \xrightarrow{\theta_\alpha s} & \theta_\alpha J^\bullet \end{array}$$

est commutatif à homotopie près (voir 6.2). Il en résulte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E}\Phi(M) & \xrightarrow{s\circ\mathrm{E}\Phi(r)} & J^\bullet \\ {\scriptstyle \nu_M\circ\mathrm{E}\Phi(a_\alpha)}\big\downarrow & & {\scriptstyle b_\alpha^\bullet}\big\downarrow \\ \theta_\alpha\mathrm{E}\Phi(M) & \xrightarrow{\theta_\alpha(s\circ\mathrm{E}\Phi(r))} & \theta_\alpha J^\bullet \end{array}$$

est commutatif. Comme les actions de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathrm{R}^p\mathrm{Pf}\,M)$ et $\mathrm{R}^p\mathrm{Pf}\,(\mathrm{E}\Phi(M))$ sont respectivement définies par les homomorphismes $\mathrm{H}^p(a_\alpha^\bullet)$ et $\mathrm{H}^p(b_\alpha^\bullet)$, les deux commutativités ci-dessus impliquent le point (b). □

Corollaire 7.42. – *On a un isomorphisme canonique de* $\mathrm{GL}(V)_{\mathrm{td}}$-$\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-*modules instables :*

$$\mathrm{M}(V,2h) \cong \mathrm{E}\Phi\,(\mathrm{M}(V,h))$$

pour tout entier naturel h.

Démonstration. – On prend $M = \mathrm{c}_V^h\,\mathrm{H}^*V$, $p = n$, dans l'énoncé précédent et l'on observe que l'homomorphisme $\mathrm{E}\lambda : \mathrm{E}\Phi(\mathrm{c}_V^h\,\mathrm{H}^*V) \to \mathrm{c}_V^h\,\mathrm{H}^*V$ induit un isomorphisme de $\mathrm{GL}(V)_{\mathrm{td}}$-$\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-modules instables $\mathrm{E}\Phi(\mathrm{c}_V^h\,\mathrm{H}^*V) \cong \mathrm{c}_V^{2h}\,\mathrm{H}^*V$. □

CHAPITRE 8

MODULES DE STEINBERG ET ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

L'objectif de cette section est double :

– Dégager diverses connexions entre notre travail et l'article [38] de Bob Oliver.

– Expliciter la construction du bicomplexe $\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}M$ évoqué dans la proposition 5.31, bicomplexe qui joue un rôle crucial dans la démonstration de l'implication (iii)⇒(i) du théorème 5.20 (et par ricochet dans celle de l'implication (iii)⇒(i) du théorème 6.20).

Spécialisation dans notre contexte des résultats de [38]

Tout d'abord un commentaire :

COMMENTAIRE 8.1. – Soient $\mathcal{A}b$ la catégorie des groupes abéliens et $\mathrm{F}_{\mathbb{Z}}$ le foncteur de $\mathcal{W}_0$ dans $\mathcal{A}b$ défini par

$$\mathrm{F}_{\mathbb{Z}}(W) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } W = V, \\ 0 & \text{pour } W \neq V. \end{cases}$$

Bob Oliver signale dans l'introduction de [38] qu'il est facile de déduire des isomorphismes

$$\lim\nolimits^{*}_{\mathcal{W}_0} \mathrm{F}_{\mathbb{Z}} \;\cong\; \mathrm{Ext}^{*}_{\mathbb{Z}}(\Delta_{\mathbb{Z}}, \mathrm{F}_{\mathbb{Z}}) \;\cong\; \mathrm{H}^{*} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}b^{\mathcal{W}_0}}(\mathrm{P}_{\bullet}, \mathrm{F}_{\mathbb{Z}}),$$

$\mathrm{P}_{\bullet}$ désignant une résolution projective « standard » de $\Delta_{\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{A}b^{\mathcal{W}_0}$, que les groupes abéliens $\lim^{k}_{\mathcal{W}_0} \mathrm{F}_{\mathbb{Z}}$ sont isomorphes, de façon naturelle, aux groupes de cohomologie $\widetilde{\mathrm{H}}^{k-1}(\|\mathcal{W}_{0,n}\|;\mathbb{Z})$ et en particulier que $\lim^{n-1}_{\mathcal{W}_0} \mathrm{F}_{\mathbb{Z}}$ est isomorphe au dual du $\mathbb{Z}$-module de Steinberg de $\mathrm{GL}(V)$.

La catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$ n'ayant pas assez de projectifs (voir 2.18) nous avons choisi en 3.5 de présenter une variante (fort classique) de ce qui précède à savoir une définition des foncteurs dérivés de lim comme groupe de cohomologie d'un complexe « combinatoire » $\mathrm{L}^{\bullet}(-)$. Dans le cas où l'on considère des foncteurs de $\mathcal{W}_0$ dans $\mathcal{A}b$ on a $\mathrm{L}^{\bullet}(-) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}b^{\mathcal{W}_0}}(\mathrm{P}_{\bullet}, -)$.

Ce commentaire étant fait, nous expliquons ci-après ce que donne le résultat principal de [**38**] dans notre contexte.

On spécialise la proposition 5 de [**38**] en prenant $p = 2$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2(V)(:= \mathcal{W}_0)$. Soit F un foncteur de $\mathcal{W}_0$ dans $\mathcal{E}$ (catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels) ; cette proposition dit que l'on dispose d'un $\mathcal{E}$-complexe de la forme

$$\mathrm{C}^0_{\mathrm{St}}(F) \to \mathrm{C}^1_{\mathrm{St}}(F) \to \cdots \to \mathrm{C}^k_{\mathrm{St}}(F) \xrightarrow{\mathrm{d}^k} \mathrm{C}^{k+1}_{\mathrm{St}}(F) \to \cdots \to \mathrm{C}^{n-1}_{\mathrm{St}}(F)$$

dont le k-ième groupe de cohomologie est isomorphe à $\lim^k_{\mathcal{W}_0} F$. Précisons : On a

$$\mathrm{C}^k_{\mathrm{St}}(F) = \prod_{\dim W = k+1} \mathrm{St}^*_W \otimes F(W) = \bigoplus_{\dim W = k+1} \mathrm{St}^*_W \otimes F(W)$$

(la notation St^*_W désigne ci-dessus le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel dual de l'espace de la représentation de Steinberg modulo 2 de $\mathrm{GL}(W)$, le produit et la somme directe sont indexées par l'ensemble des sous-groupes $W \subset V$ de dimension $k+1$) ; le cobord

$$\mathrm{d}^k : \bigoplus_{\dim W = k+1} \mathrm{St}^*_W \otimes F(W) \longrightarrow \bigoplus_{\dim W' = k+2} \mathrm{St}^*_{W'} \otimes F(W')$$

a pour matrice $[\,\mathrm{d}^k_{W',W} : \mathrm{St}^*_W \otimes F(W) \to \mathrm{St}^*_{W'} \otimes F(W')\,]$ avec

$$\mathrm{d}^k_{W',W} = \begin{cases} (\mathrm{r}_{W',W})^* \otimes F(W \subset W') & \text{pour } W \subset W' \\ 0 & \text{pour } W \not\subset W', \end{cases}$$

$\mathrm{r}_{W',W}$ désignant l'homomorphisme canonique de $\mathrm{St}_{W'}$ dans St_W (pour une définition de cet homomorphisme on pourra se reporter à 8.1).

Exemple 8.2. – On suppose $V \neq 0$ et on prend pour F le foncteur $\Delta_{\mathbb{F}_2}$, à savoir le foncteur constant à valeur $\mathbb{F}_2$. On a $\lim_{\mathcal{W}_0} \Delta_{\mathbb{F}_2} = \mathbb{F}_2$ et $\lim^k_{\mathcal{W}_0} \Delta_{\mathbb{F}_2} = 0$ pour $k > 0$; en effet on a $\Delta_{\mathbb{F}_2} = \mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}_0}(-,V)}$, égalité qui montre que $\Delta_{\mathbb{F}_2}$ et un objet injectif de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}_0}$. On constate donc que l'on dispose d'un complexe acyclique, que nous notons $\mathrm{Lu}^\bullet = (\mathrm{Lu}^0 \to \mathrm{Lu}^1 \to \cdots \to \mathrm{Lu}^n)$, avec $\mathrm{Lu}^k = \bigoplus_{\dim W = k} \mathrm{St}^*_W$ (on convient que l'on a $\mathrm{St}_0 = \mathbb{F}_2$), le cobord $\mathrm{d}^k : \bigoplus_{\dim W = k} \mathrm{St}^*_W \to \bigoplus_{\dim W' = k+1} \mathrm{St}^*_W$ étant donné par la matrice d'homomorphismes $[\,\mathrm{d}^k_{W',W}\,]$ avec

$$\mathrm{d}^k_{W',W} = \begin{cases} (\mathrm{r}_{W',W})^* & \text{pour } W \subset W' \\ 0 & \text{pour } W \not\subset W' \end{cases}$$

(on convient que l'on a $\mathrm{r}_{U,0} = \mathrm{id}_{\mathbb{F}_2}$ pour $\dim U = 1$). Le complexe $\mathrm{Lu}^\bullet$ est le dual du complexe (b) de la page 22 de [**36**] (avec $A = \mathbb{F}_2$) dont nous reparlerons en 8.1 ; ceci explique notre notation.

Soit maintenant F un foncteur de $\mathcal{W}_0$ dans V_{tf}-$\mathcal{U}$. Par les mêmes formules que ci-dessus on définit un complexe $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{St}}(F)$ dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$. On se convainc aisément que $\lim^k_{\mathcal{W}_0} F$ est isomorphe à $\mathrm{H}^k\,\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{St}}(F)$ comme $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable.

Soit M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable. Le complexe $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{St}}(\Psi_M)$ est muni d'une coaugmentation « tautologique » $\lim_{\mathcal{W}_0} \Psi_M \to \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{St}}(\Psi_M)$; en composant à la source par l'homomorphisme ρ_M de 3.9 on obtient une nouvelle coaugmentation que l'on note $\mathrm{d}^{-1} : M \to \mathrm{C}^{\bullet}_{\mathrm{St}}(\Psi_M)$. Le complexe coaugmenté associé

$$M =: \mathrm{C}^{-1}_{\mathrm{St}}(\Psi_M) \xrightarrow{\mathrm{d}^{-1}} \mathrm{C}^{0}_{\mathrm{St}}(\Psi_M) \to \mathrm{C}^{1}_{\mathrm{St}}(\Psi_M) \to \cdots \to \mathrm{C}^{n-1}_{\mathrm{St}}(\Psi_M)$$

est noté $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{St}}(\Psi_M)$. Compte tenu de ce qui précède, la proposition suivante est une simple reformulation de la proposition 3.9 :

Proposition 8.3. – *Soit M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable ; on a pour tout entier $k \geq 0$ un isomorphisme de $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-modules instables :*

$$\mathrm{R}^k\mathrm{Pf}\, M \;\cong\; \mathrm{H}^k\,(\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{St}}(\Psi_M)[1]).$$

Décodons la notation. Le k-ième terme de $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{St}}(\Psi_M)[1]$ est le $(k-1)$-ième terme de $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{St}}(\Psi_M)$: on a « décalé » $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{St}}(\Psi_M)$ « de 1 vers la droite ».[(1)]

Exemple 8.4. – Cet exemple fait suite à l'exemple 8.2.

Soit N un A-module instable fini. La proposition 1.25 (avec $U = V$), ou le point (b) du corollaire 1.15, implique que $\Psi_{\mathrm{H}^*V\otimes N}$ est le foncteur constant $\Delta_{\mathrm{H}^*V\otimes N}$; on a donc $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{St}}(\Psi_{\mathrm{H}^*V\otimes N})[1] = \mathrm{Lu}^{\bullet} \otimes (\mathrm{H}^*V \otimes N)$. Ce complexe est acyclique ce qui est bien en accord avec les propositions 8.3 et 3.15.

Considérons plus généralement un H^*V-A-module instable M qui est libre de dimension finie comme H^*V-module. La théorie de Smith algébrique dit que le A-module instable $\mathrm{Fix}_V M$ est fini et que l'unité d'adjonction $\eta : M \to \mathrm{H}^*V \otimes \mathrm{Fix}_V M$ est injective (η s'identifie d'ailleurs au cobord d^{-1} du complexe $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}M$ qui est acyclique d'après 5.16). Puisque le foncteur $\Psi : V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U} \to (V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})^{\mathcal{W}_0}$ est exact, η induit un monomorphisme $\Psi_M \hookrightarrow \Psi_{\mathrm{H}^*V\otimes\mathrm{Fix}_V M}$ si bien que le complexe $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{St}}(\Psi_M)[1]$ s'identifie à un sous-complexe de $\mathrm{Lu}^{\bullet} \otimes (\mathrm{H}^*V \otimes \mathrm{Fix}_V M)$.

On observe que tous les termes du complexe $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{St}}(\Psi_M)[1]$ sont des H^*V-A-modules instables qui sont libres de dimension finie comme H^*V-modules. En effet le k-ième terme de ce complexe, $0 \leq k \leq n$, est par définition une somme directe finie de H^*V-A-modules instables de la forme $\mathrm{EFix}_{(V,W)}M$ avec $\dim W = k$ et $\mathrm{EFix}_{(V,W)}M \cong \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)}M$ est libre comme H^*V-module d'après 4.12 (et de type fini comme H^*V-module d'après 2.9).

La proposition 8.3 et le corollaire 3.20 montrent que $\mathrm{H}^k\,(\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{St}}(\Psi_M)[1])$ est nul pour $0 \leq k \leq n-1$ et isomorphe à $\mathrm{R}^n\mathrm{Pf}\, M$ pour $k = n$; on note ε l'homomorphisme de $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-modules instables de $\mathrm{St}^*_V \otimes (\mathrm{H}^*V \otimes \mathrm{Fix}_V M)$ (le n-ième terme

(1) Nous avons adopté la convention de **[41]** : Si C est un complexe de cochaînes $(C[p])^k = C^{k-p}$; si C est un complexe de chaînes $(C[p])_k = C_{k+p}$.

de $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{St}}(\Psi_M)[1])$ dans $\mathrm{R}^n\mathrm{Pf}\,M$ induit par cet isomorphisme. On dispose donc d'une suite exacte dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$ de la forme

$$0 \to M \to \bigoplus_{\dim W=1} \mathrm{St}^*_W \otimes \mathrm{EFix}_{(V,W)}M \to \cdots \to \bigoplus_{\dim W=k} \mathrm{St}^*_W \otimes \mathrm{EFix}_{(V,W)}M \to$$
$$\to \cdots \to \bigoplus_{\dim W=n-1} \mathrm{St}^*_W \otimes \mathrm{EFix}_{(V,W)}M \to \mathrm{St}^*_V \otimes (\mathrm{H}^*V \otimes \mathrm{Fix}_V M) \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{R}^n\mathrm{Pf}\,M \to 0,$$

telle que la suite exacte sous-jacente dans la catégorie des H^*V-modules de type fini est une résolution libre du H^*V-module fini $\mathrm{R}^n\mathrm{Pf}\,M$.

Voici une spécialisation concrète de ce qui précède : on prend $M = \mathrm{c}_V\mathrm{H}^*V$. Le complexe $\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{St}}(\Psi_{\mathrm{c}_V\mathrm{H}^*V})[1]$ est le sous-complexe de $\mathrm{Lu}^\bullet \otimes \mathrm{H}^*V$ dont le k-ième terme est $\bigoplus_{\dim W=k} \mathrm{St}^*_W \otimes \mathrm{c}_{(V,W)}\mathrm{H}^*V$.

On rappelle que nous avons posé $\mathrm{M}(V) := \mathrm{R}^n\mathrm{Pf}\,(\mathrm{c}_V\mathrm{H}^*V)$. L'homomorphisme $\varepsilon : \mathrm{St}^*_V \otimes \mathrm{H}^*V \to \mathrm{M}(V)$ s'identifie à l'application $\mathrm{M}^0(V) \otimes \mathrm{H}^*V \to \mathrm{M}(V)$ induite par la structure de H^*V-module de $\mathrm{M}(V)$. Comme ε est H^*V-linéaire il suffit de vérifier cette affirmation en degré zéro : c'est essentiellement ce que nous avons fait au tout début de la démonstration du point (b) de la proposition 7.31.

8.1. Quelques rappels sur les modules de Steinberg

Soit V un $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel de dimension finie.

Soient d et c deux entiers naturels ; on note $\mathcal{B}_{d,c}(V)$ l'ensemble des sous-espaces W de V avec $\dim W \geq d$ et $\operatorname{codim} W \geq c$ ($d \leq \dim W \leq \dim V - c$). L'ensemble $\mathcal{B}_{d,c}(V)$ est ordonné par inclusion ; l'action à droite évidente du groupe $\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathcal{B}_{d,c}(V)$ respecte cet ordre. On observera que l'on a en particulier $\mathcal{B}_{0,0}(V) = \mathcal{W}$ et $\mathcal{B}_{1,0}(V) = \mathcal{W}_0$.

Soit n la dimension de V ; pour $n \geq 1$, on pose

$$\mathrm{St}_V := \widetilde{\mathrm{H}}_{n-2}\,(\mathcal{B}_{1,1}(V); \mathbb{F}_2).$$

La notation $\widetilde{\mathrm{H}}_{n-2}\,(\mathcal{B}_{1,1}(V); \mathbb{F}_2)$ désigne le $(n-2)$-ième groupe d'homologie réduite, à coefficients $\mathbb{F}_2$, du polyèdre associé à l'ensemble ordonné $\mathcal{B}_{1,1}(V)$.

Tous les groupes d'homologie apparaissant ci-après seront à coefficients $\mathbb{F}_2$; ce choix des coefficients est justifié par les applications que nous avons en vue...il nous permettra par ailleurs de ne pas nous préoccuper de questions de signes !

Cette définition donne $\mathrm{St}_V = \mathbb{F}_2$ pour $n = 1$. On convient que l'on a $\mathrm{St}_V = \mathbb{F}_2$ pour $n = 0$ (cette convention sera justifiée en 8.12).

On note respectivement $\mathrm{S}_\bullet I$ l'ensemble $\mathbb{N}$-gradué des simplexes et $\mathrm{C}_\bullet I$ le complexe des chaînes polyédrales, à coefficients $\mathbb{F}_2$, d'un ensemble ordonné I ($\mathrm{C}_\bullet I = \mathbb{F}_2[\mathrm{S}_\bullet I]$). On note $\widetilde{\mathrm{S}}_\bullet I$ et $\widetilde{\mathrm{C}}_\bullet I$ les versions augmentées ($\widetilde{\mathrm{S}}_{-1} I := \{\text{point}\}$). Soit I' un sous-ensemble de I ; on pose $\mathrm{C}_\bullet(I, I') := \mathrm{C}_\bullet I/\mathrm{C}_\bullet I'$ (ou, ce qui revient au même, $\mathrm{C}_\bullet(I, I') := \widetilde{\mathrm{C}}_\bullet I/\widetilde{\mathrm{C}}_\bullet I' =: \widetilde{\mathrm{C}}_\bullet(I, I')$).

On rappelle maintenant la définition de l'homomorphisme $\mathrm{r}_{V,H} : \mathrm{St}_V \to \mathrm{St}_H$, H hyperplan de V, évoqué en 8.1.

On constate que l'on a

$$\mathrm{S}_\bullet \mathcal{B}_{1,1}(V) - \mathrm{S}_\bullet \mathcal{B}_{1,2}(V) = \coprod_{\operatorname{codim} H=1} (\widetilde{\mathrm{S}}_\bullet \mathcal{B}_{1,1}(H))[-1]$$

(le coproduit est indexé par l'ensemble des hyperplans H de V, la notation $[-1]$ désigne le décalage de 1 vers la droite). Il en résulte :

$$\mathrm{C}_\bullet(\mathcal{B}_{1,1}(V), \mathcal{B}_{1,2}(V)) \cong \bigoplus_{\operatorname{codim} H=1} (\widetilde{\mathrm{C}}_\bullet \mathcal{B}_{1,1}(H))[-1].$$

La composition

$$\widetilde{\mathrm{H}}_{n-2}\, \mathcal{B}_{1,1}(V) \to \mathrm{H}_{n-2}\, (\mathcal{B}_{1,1}(V), \mathcal{B}_{1,2}(V)) \cong \bigoplus_{\operatorname{codim} H=1} \widetilde{\mathrm{H}}_{n-3}\, \mathcal{B}_{1,1}(H)$$

donne un homomorphisme $\mathrm{St}_V \to \bigoplus_{\operatorname{codim} H=1} \mathrm{St}_H$. Le composé de cet homomorphisme et de la projection sur le facteur indexé par H est noté $\mathrm{r}_{V,H}$.

Remarque. – Dans le cas $\dim V = 2$, l'homomorphisme $\mathrm{St}_V \to \bigoplus_{\operatorname{codim} H=1} \mathrm{St}_H$ s'identifie à l'homomorphisme $\widetilde{\mathrm{H}}_{n-2}\, \mathcal{B}_{1,1}(V) \to \mathrm{H}_{n-2}\, \mathcal{B}_{1,1}(V)$.

Convention. – Dans le cas $\dim V = 1$, on convient de prendre $\mathrm{r}_{V,H} = \mathrm{id}_{\mathbb{F}_2}$.

On définit pareillement un homomorphisme $\mathrm{St}_V \to \mathrm{St}_{V/D}$ pour D une droite de V. On constate que l'on a

$$\mathrm{S}_\bullet \mathcal{B}_{1,1}(V) - \mathrm{S}_\bullet \mathcal{B}_{2,1}(V) = \coprod_{\dim D=1} (\widetilde{\mathrm{S}}_\bullet \mathcal{B}_{1,1}(V/D))[-1]$$

(le coproduit est indexé par l'ensemble des droites D de E). Il en résulte :

$$\mathrm{C}_\bullet(\mathcal{B}_{1,1}(V), \mathcal{B}_{2,1}(V)) \cong \bigoplus_{\dim D=1} (\widetilde{\mathrm{C}}_\bullet \mathcal{B}_{1,1}(V/D))[-1].$$

La composition

$$\widetilde{\mathrm{H}}_{n-2}\, \mathcal{B}_{1,1}(V) \to \mathrm{H}_{n-2}\, (\mathcal{B}_{1,1}(V), \mathcal{B}_{2,1}(V)) \cong \bigoplus_{\dim D=1} \widetilde{\mathrm{H}}_{n-3}\, \mathcal{B}_{1,1}(V/D)$$

donne un homomorphisme $\mathrm{St}_V \to \bigoplus_{\dim D=1} \mathrm{St}_{V/D}$. Le composé de cet homomorphisme et de la projection sur le facteur indexé par D est noté $\mathrm{s}_{V,V/D}$.

Remarque. – Dans le cas $\dim V = 2$, l'homomorphisme $\mathrm{St}_V \to \bigoplus_{\dim D=1} \mathrm{St}_{V/D}$ s'identifie à l'homomorphisme $\widetilde{\mathrm{H}}_{n-2}\, \mathcal{B}_{1,1}(V) \to \mathrm{H}_{n-2}\, \mathcal{B}_{1,1}(V)$.

Convention. – Dans le cas $\dim V = 1$, on convient de prendre $\mathrm{s}_{V,V/D} = \mathrm{id}_{\mathbb{F}_2}$.

PROPOSITION 8.5. – *Soient respectivement D et H une droite et un hyperplan de V avec $D \subset H$. Alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{St}_V & \xrightarrow{\mathrm{r}_{V,H}} & \mathrm{St}_H \\
{\scriptstyle \mathrm{s}_{V,V/D}}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{s}_{H,H/D}}\downarrow \\
\mathrm{St}_{V/D} & \xrightarrow{\mathrm{r}_{V/D,H/D}} & \mathrm{St}_{H/D}
\end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. – Par hypothèse, on a $\dim V \geq 2$. Le cas $\dim V = 2$ découle des remarques et conventions ci-dessus. On suppose $\dim V > 2$. On a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S}_\bullet\mathcal{B}_{1,1}(V) &- (\mathrm{S}_\bullet\mathcal{B}_{1,2}(V) \cup \mathrm{S}_\bullet\mathcal{B}_{2,1}(V)) \\
&= (\mathrm{S}_\bullet\mathcal{B}_{1,1}(V) - \mathrm{S}_\bullet\mathcal{B}_{1,2}(V)) \cap (\mathrm{S}_\bullet\mathcal{B}_{1,1}(V) - \mathrm{S}_\bullet\mathcal{B}_{2,1}(V)) \\
&= \left(\coprod_{\operatorname{codim} H=1} \{\sigma; \sup\sigma = H\}\right) \cap \left(\coprod_{\dim D=1} \{\sigma; \inf\sigma = D\}\right) \\
&= \coprod_{D\subset H} \{\sigma; \inf\sigma = D, \sup\sigma = H\}.
\end{aligned}
$$

Il en résulte :

$$\mathrm{C}_\bullet(\mathcal{B}_{1,1}(V), \mathcal{B}_{1,2}(V)) \cup \mathcal{B}_{2,1}(V)) \;\cong\; \bigoplus_{D\subset H} (\widetilde{\mathrm{C}}_\bullet\mathcal{B}_{1,1}(H/D))[-2].$$

La commutativité du diagramme de complexes

$$
\begin{array}{ccc}
\widetilde{\mathrm{C}}_\bullet\mathcal{B}_{1,1}(V) & \longrightarrow & \mathrm{C}_\bullet(\mathcal{B}_{1,1}(V), \mathcal{B}_{1,2}(V)) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\mathrm{C}_\bullet(\mathcal{B}_{1,1}(V), \mathcal{B}_{2,1}(V)) & \longrightarrow & \mathrm{C}_\bullet(\mathcal{B}_{1,1}(V), \mathcal{B}_{1,2}(V)) \cup \mathcal{B}_{2,1}(V))
\end{array}
$$

permet de conclure. □

Dualité. – L'application $W \mapsto W^\perp$ fournit un isomorphisme canonique d'ensembles ordonnés $\mathcal{B}_{d,c}(V) \to \mathcal{B}^{\mathrm{op}}_{c,d}(V^*)$. On en déduit un isomorphisme de $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels, disons $\delta : \mathrm{St}_V \xrightarrow{\cong} \mathrm{St}_{V^*}$ (δ est $\mathrm{GL}(V)$-équivariant si l'on fait agir $\mathrm{GL}(V)$ sur St_{V^*} *via* l'isomorphisme $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V^*), \alpha \mapsto (\alpha^*)^{-1}$).

La vérification de la proposition suivante est laissée au lecteur :

PROPOSITION 8.6. – *Soit D une droite de E ; le diagramme suivant*

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{St}_E & \xrightarrow{\mathrm{s}_{E,E/D}} & \mathrm{St}_{E/D} \\
{\scriptstyle\delta}\big\downarrow & & {\scriptstyle\delta}\big\downarrow \\
\mathrm{St}_{E^*} & \xrightarrow{\mathrm{r}_{E^*,D^\perp}} & \mathrm{St}_{D^\perp}
\end{array}
$$

est commutatif (on identifie l'hyperplan $D^\perp$ de E^* à $(E/D)^*$).

Retour sur le complexe de Lusztig. – On commence par observer que $\|\mathcal{B}_{1,0}(V)\|$ (le polyèdre associé à l'ensemble ordonné $\mathcal{B}_{1,0}(V)$) est contractile. En effet, puisque $\mathcal{B}_{1,0}(V)$ possède un plus grand élément, à savoir V, $\|\mathcal{B}_{1,0}(V)\|$ est un cône de sommet le 0-simplexe $\{V\}$ et de base $\|\mathcal{B}_{1,1}(V)\|$ ($\mathcal{B}_{1,0}(V) - \{V\} = \mathcal{B}_{1,1}(V)$).

On considère ensuite la filtration de $\|\mathcal{B}_{1,0}(V)\|$ induite par la filtration croissante $(\mathrm{F}_p\,\mathcal{B}_{1,0}(V))_{-1\leq p\leq n}$ de $\mathcal{B}_{1,0}(V)$ définie par $\mathrm{F}_p\,\mathcal{B}_{1,0}(V) = \mathcal{B}_{1,n-p}(V)$ (on a donc $\mathrm{F}_p\,\mathcal{B}_{1,0}(V) = \emptyset$ pour $p = -1, 0$ et $\mathrm{F}_n\,\mathcal{B}_{1,0}(V) = \mathcal{B}_{1,0}(V)$) et la suite spectrale associée $(\mathrm{E}^r_{p,q})_{r\geq 1}$ en homologie modulo 2. On a

$$\mathrm{E}^1_{p,q} = \mathrm{H}_{p+q}(\mathcal{B}_{1,n-p}(V), \mathcal{B}_{1,n+1-p}(V)).$$

L'égalité (pour $p \geq 1$)

$$\mathrm{S}_\bullet\mathcal{B}_{1,n-p}(V) - \mathrm{S}_\bullet\mathcal{B}_{1,n+1-p}(V) = \coprod_{\dim W=p} (\widetilde{\mathrm{S}}_\bullet\mathcal{B}_{1,1}(W))[-1]$$

implique

$$\mathrm{E}^1_{p,q} \cong \begin{cases} \bigoplus_{\dim W=p} \mathrm{St}_W & \text{pour } p \geq 1 \text{ et } q = -1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

REMARQUE 8.7. – On utilise ici que l'on a $\widetilde{\mathrm{H}}_k\,\mathcal{B}_{1,1}(V) = 0$ pour $k < n-2$ ($n := \dim V \geq 3$). Pour le confort du lecteur, nous reproduisons la démonstration de cette propriété, que l'on trouve à la page 12 de [**36**], par une méthode que Lusztig attribue à Jon Folkman [**17**]. On considère le « recouvrement », disons $\mathcal{F}$, de $\mathcal{B}_{1,1}(V)$ par les $\mathcal{B}_{1,0}(H)$, H décrivant l'ensemble, disons $\mathcal{H}$, des hyperplans de V. Soit $\mathcal{P}$ une partie non vide de $\mathcal{H}$; l'intersection $\bigcap_{H\in\mathcal{P}} \mathcal{B}_{1,0}(H)$ possède un plus grand élément (si $\bigcap_{H\in\mathcal{P}} H \neq 0$) ou est vide (si $\bigcap_{H\in\mathcal{P}} H = 0$) si bien que $\mathcal{B}_{1,1}(V)$ a le type d'homotopie du nerf de $\mathcal{F}$, disons $\mathrm{N}(\mathcal{F})$. Si le cardinal de $\mathcal{P}$ est strictement inférieur à n alors $\bigcap_{H\in\mathcal{P}} \mathcal{B}_{1,0}(H)$ est non vide ; le $(n-2)$-squelette de $\mathrm{N}(\mathcal{F})$ coïncide donc avec le $(n-2)$-squelette du simplexe « standard » sur l'ensemble $\mathcal{H}$. L'égalité $\widetilde{\mathrm{H}}_k\,\mathrm{N}(\mathcal{F}) = 0$ pour $k < n-2$ en résulte.

L'isomorphisme précédant la remarque et le fait que l'aboutissement de la suite spectrale est l'homologie modulo 2 d'un espace contractile montrent que la suite

$$0 \to \mathrm{E}^1_{n,-1} \xrightarrow{\mathrm{d}^1} \mathrm{E}^1_{n-1,-1} \xrightarrow{\mathrm{d}^1} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}^1} \mathrm{E}^1_{p,-1} \xrightarrow{\mathrm{d}^1} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}^1} \mathrm{E}^1_{1,-1}$$

est exacte et que le conoyau de la dernière flèche est isomorphe à $\mathbb{F}_2$. On dispose donc d'un complexe, acyclique pour $V \neq 0$, *le complexe de Lustig* [**36**, p. 22],

$$\mathrm{Lu}_\bullet := (\mathrm{Lu}_n \xrightarrow{\mathrm{d}_n} \mathrm{Lu}_{n-1} \cdots \to \mathrm{Lu}_p \xrightarrow{\mathrm{d}_p} \mathrm{Lu}_{p-1} \to \cdots \to \mathrm{Lu}_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} \mathrm{Lu}_0)$$

avec $\mathrm{Lu}_p = \bigoplus_{\dim W=p} \mathrm{St}_W$ (on rappelle que l'on a posé $\mathrm{St}_0 = \mathbb{F}_2$) dont les opérateurs de bord sont explicités ci-dessous.

PROPOSITION 8.8. – *Le p-ième opérateur de bord du complexe de Lusztig*

$$\mathrm{d}_p : \mathrm{Lu}_p := \bigoplus_{\dim W = p} \mathrm{St}_W \longrightarrow \bigoplus_{\dim W' = p-1} \mathrm{St}_{W'} =: \mathrm{Lu}_{p-1}$$

est donné par

$$\pi_{W'} \circ \mathrm{d}_p \circ \iota_W = \begin{cases} \mathrm{r}_{W,W'} & \textit{pour}\, W' \subset W, \\ 0 & \textit{pour}\, W' \not\subset W, \end{cases}$$

ι_W *et* $\pi_{W'}$ *désignant respectivement l'inclusion de* St_W *dans* Lu_p *et la projection de* Lu_{p-1} *sur* $\mathrm{St}_{W'}$.

Démonstration. – On traite d'abord le cas $p = n$. L'opérateur de bord d_n est le composé

$$\mathrm{H}_{n-1}(\mathcal{B}_{1,0}(V), \mathcal{B}_{1,1}(V)) \xrightarrow{\partial} \widetilde{\mathrm{H}}_{n-2}\, \mathcal{B}_{1,1}(V) \longrightarrow \mathrm{H}_{n-2}(\mathcal{B}_{1,1}(V), \mathcal{B}_{1,2}(V)).$$

Or la flèche de gauche est un isomorphisme car $\|\mathcal{B}_{1,0}(V)\|$ est contractile et celle de droite est par définition le produit des $\mathrm{r}_{V,H}$, H décrivant l'ensemble des hyperplans de V. On passe ensuite au cas général. Soit W un sous-groupe de V avec $\dim W = p$; on considère l'application de triples évidente

$$(\mathcal{B}_{1,0}(W), \mathcal{B}_{1,1}(W), \mathcal{B}_{1,2}(W)) \to (\mathcal{B}_{1,n-p}(V), \mathcal{B}_{1,n+1-p}(V), \mathcal{B}_{1,n+2-p}(V)).$$

En remplaçant V par W dans l'argument que l'on vient de donner pour d_n, on constate que $\mathrm{d}_p \circ \iota_W$ est le produit des $\mathrm{r}_{W,W'}$, W' décrivant l'ensemble des hyperplans de W. □

Quand cela nous paraîtra utile nous préciserons la notation $\mathrm{Lu}_\bullet$ en $\mathrm{Lu}_{\bullet,V}$.

Nous exploitons maintenant l'isomorphisme $\mathcal{B}_{d,c}(V) \cong \mathcal{B}^{\mathrm{op}}_{c,d}(V^*)$, dont nous avons traité plus haut sous l'intertitre « Dualité », pour décrire $\mathrm{Lu}_{\bullet,V^*}$ en termes des sous-groupes W de V.

On a

$$\mathrm{Lu}_{p,V^*} = \bigoplus_{\operatorname{codim} W = p} \mathrm{St}_{W^\perp} \cong \bigoplus_{\operatorname{codim} W = p} \mathrm{St}_{V/W}$$

(l'isomorphisme ci-dessus provient des isomorphismes $\delta : \mathrm{St}_{V/W} \xrightarrow{\cong} \mathrm{St}_{(V/W)^*}$ et $(V/W)^* \cong W^\perp$). On pose $\mathrm{Lu}_{p,2} := \bigoplus_{\operatorname{codim} W = p} \mathrm{St}_{V/W}$, on dispose donc d'un *second complexe de Lusztig*, tout aussi acyclique que le premier,

$$\mathrm{Lu}_{\bullet,2} := (\mathrm{Lu}_{n,2} \to \cdots \to \mathrm{Lu}_{p,2} \xrightarrow{\mathrm{d}_p} \mathrm{Lu}_{p-1,2} \to \cdots \to \mathrm{Lu}_{0,2}),$$

dont les opérateurs de bord sont explicités ci-dessous.

Les propositions 8.8 et 8.6 conduisent à la suivante :

PROPOSITION 8.9. – *Le p-ième opérateur de bord du second complexe de Lusztig*

$$\mathrm{d}_p : \mathrm{Lu}_{p,2} := \bigoplus_{\operatorname{codim} W = p} \mathrm{St}_{V/W} \longrightarrow \bigoplus_{\operatorname{codim} W' = p-1} \mathrm{St}_{V/W'} =: \mathrm{Lu}_{p-1,2}$$

est donné par

$$\pi_{W'} \circ \mathrm{d}_p \circ \iota_W = \begin{cases} \mathrm{s}_{W,W'} & \textit{pour}\, W' \subset W, \\ 0 & \textit{pour}\, W' \not\subset W, \end{cases}$$

ι_W *et* $\pi_{W'}$ *désignant respectivement l'inclusion de* $\mathrm{St}_{V/W}$ *dans* $\mathrm{Lu}_{p,2}$ *et la projection de* $\mathrm{Lu}_{p-1,2}$ *sur* $\mathrm{St}_{V/W'}$.

Les complexes de cochaînes $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathrm{Lu}_\bullet, \mathbb{F}_2)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathrm{Lu}_{\bullet,2}, \mathbb{F}_2)$ seront respectivement notés $\mathrm{Lu}^\bullet$ et $\mathrm{Lu}_2^\bullet$; tout comme $\mathrm{Lu}_\bullet$ et $\mathrm{Lu}_{\bullet,2}$ les complexes $\mathrm{Lu}^\bullet$ et $\mathrm{Lu}_2^\bullet$ sont acycliques. Quand cela nous paraîtra utile voire nécessaire ces notations seront précisées par un V en indice.

8.2. Algèbre homologique dans la catégorie abélienne $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$

On rappelle que l'on note respectivement $\mathcal{E}$ et $\mathcal{W}$, la catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels et l'ensemble ordonné par inclusion des sous-groupes de V (que l'on peut voir comme une catégorie).

Commentaires. – Dans cette sous-section on change de paradigme : on remplace $\mathcal{E}^{\mathcal{W}_0}$ par $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$. Expliquons la raison de l'apparition de $\mathcal{W}_0$ dans notre mémoire. Celui-ci est influencé par les travaux de Henn **[23][24]** eux-mêmes influencés par ceux de Jackowski et McClure **[29]**. Soient G un groupe de Lie compact, ℓ un nombre premier fixé, $\widehat{\mathcal{A}}_G$ la catégorie (introduite par Quillen **[39]**) dont les objets sont les ℓ-groupes abéliens élémentaires $E \subset G$ et dont les morphismes sont les applications linéaires $E \to E'$ induite par une conjugation dans G et enfin $\mathcal{A}_G$ la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{A}}_G$ obtenue en excluant l'objet 0 ; Jackowski et McClure montrent que l'espace classifiant $\mathrm{B}G$, « en ℓ », peut être obtenu comme une colimite homotopique, indexée par $\mathcal{A}_G$, des $\mathrm{B}\,\mathrm{C}(E)$, $\mathrm{C}(E)$ désignant le centralisateur de E dans G. Comme l'on a $\mathrm{C}(0) = G$, le résultat en question manquerait de sel si 0 n'était pas exclu ! L'article **[38]** est un sous-produit de la collaboration d'Oliver avec Jackowski et McClure.

Soit F un foncteur de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}$. On définit une filtration décroissante de F

$$F = \mathrm{filt}_1^0 F \supset \mathrm{filt}_1^1 F \supset \cdots \supset \mathrm{filt}_1^n F \supset \mathrm{filt}_1^{n+1} F = 0$$

en prenant

$$(\mathrm{filt}_1^p F)(U) := \begin{cases} F(U) & \text{pour } \dim U \geq p, \\ 0 & \text{pour } \dim U < p. \end{cases}$$

On pose $\mathrm{Gr}_1^p F := \mathrm{filt}_1^p F / \mathrm{filt}_1^{p+1} F$.

Soit W un sous-groupe de V, on note S_W le foncteur de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}$ défini par

$$\mathrm{S}_W(U) := \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{pour } U = W, \\ 0 & \text{pour } U \neq W. \end{cases}$$

Il est clair que S_W est un objet simple de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$. On constate que l'on a

$$\mathrm{filt}_1^p F/\mathrm{filt}_1^{p+1} F \cong \bigoplus_{\dim W=p} F(W)\otimes \mathrm{S}_W$$

(si E est un objet de $\mathcal{E}$ et S un objet de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$ alors la notation $E\otimes S$ désigne le foncteur $U\mapsto E\otimes S(U)$). Ceci implique en particulier que les S_W sont les seuls objets simples de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$.

On introduit maintenant les projectifs et injectifs « tautologiques » de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$:

– On note $\mathbb{P}_W$ le foncteur $\mathcal{W}\to\mathcal{E}, U\mapsto \mathbb{F}_2[\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}}(W,U)]$; le lemme de Yoneda donne $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathbb{P}_W,F)=F(W)$, ce qui montre que $\mathbb{P}_W$ est un objet projectif de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$. On observe que l'on dispose pour tout objet F de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$ d'un épimorphisme canonique $\bigoplus_{W\in\mathcal{W}} F(W)\otimes\mathbb{P}_W \twoheadrightarrow F$; ceci montre à la fois que $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$ a assez de projectifs et qu'un projectif de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$ est facteur direct d'une somme directe de $\mathbb{P}_W$.

– On note $\mathbb{I}^W$ le foncteur $\mathcal{W}\to\mathcal{E}, U\mapsto \mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}}(U,W)}$; le lemme de Yoneda donne cette fois $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(F,\mathbb{I}^W)=(F(W))^*$, ce qui montre que $\mathbb{I}^W$ est un objet injectif de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$. Soit E un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel, on constate que le foncteur $E\otimes\mathbb{I}^W$ coïncide avec le foncteur $\mathcal{W}\to\mathcal{E}, U\mapsto E^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}}(U,W)}$; on en déduit que l'on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(F,E\otimes\mathbb{I}^W)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(F(W),E)$ et donc que $E\otimes\mathbb{I}^W$ est un objet injectif de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$. On dispose pour tout objet F de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$ d'un monomorphisme canonique $F\hookrightarrow\prod_{W\in\mathcal{W}}F(W)\otimes\mathbb{I}^W=\bigoplus_{W\in\mathcal{W}}F(W)\otimes\mathbb{I}^W$; il en résulte que $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$ a assez d'injectifs et qu'un injectif de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$ est facteur direct d'une somme directe de $\mathbb{I}^W$.

Résolution projective de S_0 *dans la catégorie* $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$. – On considère le $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-épimorphisme canonique $\varepsilon:\mathbb{P}_0\to\mathrm{S}_0$ (qui est en fait une couverture projective) ; on se propose de « prolonger » ε en une résolution projective.

Soit k un entier naturel ; on pose

$$\mathrm{P}_k := \bigoplus_{\dim Z=k}\mathrm{St}_Z\otimes\mathbb{P}_Z$$

et on note

$$\mathrm{d}_{k+1} : \mathrm{P}_{k+1} = \bigoplus_{\dim Z'=k+1}\mathrm{St}_{Z'}\otimes\mathbb{P}_{Z'} \longrightarrow \bigoplus_{\dim Z=k}\mathrm{St}_Z\otimes\mathbb{P}_Z=\mathrm{P}_k$$

la transformation naturelle dont la composante d'indices Z,Z' (convention « matricielle »), disons ${\mathrm{d}_{k+1}}_{Z,Z'}$, est donnée par

$${\mathrm{d}_{k+1}}_{Z,Z'} = \begin{cases}\mathrm{r}_{Z',Z}\otimes\nu_{Z',Z} & \text{pour } Z\subset Z'\\ 0 & \text{pour } Z\not\subset Z',\end{cases}$$

$\nu_{Z',Z}$ désignant l'unique élément non trivial de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathbb{P}_{Z'},\mathbb{P}_Z)$.

Proposition 8.10. – *La suite de* $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$*-morphismes*

$$0\longleftarrow \mathrm{S}_0 \xleftarrow{\varepsilon} \mathrm{P}_0 \xleftarrow{\mathrm{d}_1} \mathrm{P}_1 \xleftarrow{\mathrm{d}_2} \cdots \xleftarrow{\mathrm{d}_n} \mathrm{P}_n,$$

est une résolution projective de S_0 *dans la catégorie* $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$.

Démonstration. Soit U un sous-groupe non nul de V. On constate que

$$\mathrm{P}_0(U) \xleftarrow{\mathrm{d}_{1U}} \mathrm{P}_1(U) \xleftarrow{\mathrm{d}_{2U}} \cdots \xleftarrow{\mathrm{d}_{nU}} \mathrm{P}_n(U)$$

est le « complexe de Lusztig » $\mathrm{Lu}_{\bullet,U}$ et que $\mathrm{S}_0(U)$ est nul ; or $\mathrm{Lu}_{\bullet,U}$ est acyclique. Dans le cas $U = 0$, on a $\mathrm{P}_k(U) = 0$ pour $k > 0$ et ε_U est un isomorphisme. □

COROLLAIRE 8.11. – *Soit W un sous-groupe de V ; on a*

$$\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_W) = \begin{cases} \mathrm{St}^*_W & \textit{pour } k = \dim W, \\ 0 & \textit{pour } k \neq \dim W. \end{cases}$$

Démonstration. – On constate que l'on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{P}_k, \mathrm{S}_W) = 0$ pour $k \neq \dim W$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{P}_k, \mathrm{S}_W) = \mathrm{St}^*_W$ pour $k = \dim W$. □

REMARQUE 8.12. – On a $\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_0) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_0) = \mathbb{F}_2$; cette observation peut être vue comme une justification de notre convention $\mathrm{St}_0 = \mathbb{F}_2$.

On remplace maintenant le foncteur S_W de l'énoncé 8.11 par un foncteur $F : \mathcal{W} \to \mathcal{E}$ arbitraire. On pose $\mathrm{C}^\bullet_1 F := \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{P}_\bullet, F)$ ($\mathrm{P}_\bullet \to \mathrm{S}_0$ étant ici la résolution projective de 8.10). Explicitons ce complexe de cochaînes. On a

$$\mathrm{C}^k_1 F := \bigoplus_{\dim Z = k} \mathrm{St}^*_Z \otimes F(Z)$$

et le cobord

$$\mathrm{d}^k \,:\, \mathrm{C}^k_1 F = \bigoplus_{\dim Z = k} \mathrm{St}^*_Z \otimes F(Z) \longrightarrow \bigoplus_{\dim Z' = k+1} \mathrm{St}^*_{Z'} \otimes F(W') = \mathrm{C}^{k+1}_1 F$$

est l'homomorphisme dont la composante d'indice Z, Z' (convention matricielle), disons $\mathrm{d}^k_{Z',Z}$, est donnée par

$$\mathrm{d}^k_{Z',Z} = \begin{cases} (\mathrm{r}_{Z',Z})^* \otimes F(Z \subset Z') & \text{pour } Z \subset Z', \\ 0 & \text{pour } Z \not\subset Z'. \end{cases}$$

Par définition même on a :

PROPOSITION 8.13. – *Soient F un foncteur de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}$ et k un entier naturel ; on a*

$$\mathrm{H}^k \mathrm{C}^\bullet_1 F = \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{S}_0, F).$$

Le complexe d'Oliver $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{St}} F$ dont nous avons traité en 8.1 est, à décalage près, le tronqué (brutal) $\sigma^{\geq 1} \mathrm{C}^\bullet_1 F$; ce phénomène n'est pas surprenant :

Relation entre $\mathrm{Ext}^{p+1}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{S}_0, F)$ *et* $\lim^{p}_{\mathcal{W}_0}(F \circ \mathrm{i})$. – La notation i qui apparaît dans l'intertitre ci-dessus désigne le « foncteur inclusion canonique » de $\mathcal{W}_0$ dans $\mathcal{W}$. On pose $\mathrm{K} := \ker(\varepsilon : \mathbb{P}_0 \to \mathrm{S}_0)$.

PROPOSITION 8.14. – *Soit F un foncteur de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}$; on a un $\mathcal{E}$-isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{K}, F) \;\cong\; \lim_{\mathcal{W}_0}(F \circ \mathrm{i}).$$

Démonstration. – On constate que l'on a

$$\mathrm{K}(U) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{pour } U \neq 0, \\ 0 & \text{pour } U = 0. \end{cases}$$

Il en résulte $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{K}, F) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}_0}}(\Delta_{\mathbb{F}_2}, F \circ \mathrm{i})$. □

COROLLAIRE 8.15. – *Soient F un foncteur de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}$ et k un entier naturel ; on a un $\mathcal{E}$-isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Ext}^{k}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{K}, F) \;\cong\; \lim^{k}_{\mathcal{W}_0}(F \circ \mathrm{i}).$$

Démonstration. – On observe que le foncteur $\mathcal{E}^{\mathcal{W}} \to \mathcal{E}^{\mathcal{W}_0}, F \mapsto F \circ \mathrm{i}$ est exact et transforme injectifs en injectifs. □

PROPOSITION 8.16. – *Soit F un foncteur de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}$; on a une suite exacte dans $\mathcal{E}$*

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{S}_0, F) \to F(0) \to \lim_{\mathcal{W}_0}(F \circ \mathrm{i}) \to \mathrm{Ext}^{1}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{S}_0, F) \to 0$$

et pour $k > 0$ un isomorphisme

$$\lim^{k}_{\mathcal{W}_0}(F \circ \mathrm{i}) \;\cong\; \mathrm{Ext}^{k+1}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{S}_0, F).$$

Démonstration. – On considère la longue suite exacte des Ext associée à la suite exacte dans $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$, $0 \to \mathrm{K} \to \mathbb{P}_0 \to \mathrm{S}_0 \to 0$. □

Résolution projective de S_W *($W \subset V$) dans la catégorie* $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$. – Soient W un sous-groupe de V et k un entier naturel ; on pose

$$\mathrm{P}_{k,W} := \bigoplus_{\substack{Z \supset W \\ \dim Z/W = k}} \mathrm{St}_{Z/W} \otimes \mathbb{P}_Z$$

et on note

$$\mathrm{d}_{k+1} : \mathrm{P}_{k+1,W} = \bigoplus_{\substack{Z' \supset W \\ \dim Z'/W = k+1}} \mathrm{St}_{Z'/W} \otimes \mathbb{P}_{Z'} \longrightarrow \bigoplus_{\substack{Z \supset W \\ \dim Z/W = k}} \mathrm{St}_{Z/W} \otimes \mathbb{P}_Z = \mathrm{P}_{k,W}$$

la transformation naturelle dont la composante d'indices Z, Z' (convention « matricielle »), disons ${\mathrm{d}_{k+1}}_{Z,Z'}$, est donnée par

$${\mathrm{d}_{k+1}}_{Z,Z'} = \begin{cases} \mathrm{r}_{Z'/W, Z/W} \otimes \nu_{Z',Z} & \text{pour } Z \subset Z' \\ 0 & \text{pour } Z \not\subset Z', \end{cases}$$

$\nu_{Z',Z}$ désignant l'unique élément non trivial de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathbb{P}_{Z'}, \mathbb{P}_Z)$.

On note encore $\varepsilon : \mathrm{P}_{0,W} = \mathbb{P}_W \to \mathrm{S}_W$ le $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-épimorphisme canonique (qui est à nouveau une couverture projective).

Proposition 8.17. – *Soit W un sous-groupe de V avec $\operatorname{codim} W = p$; la suite de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-morphismes*

$$0 \longleftarrow \mathrm{S}_W \xleftarrow{\varepsilon} \mathrm{P}_{0,W} \xleftarrow{\mathrm{d}_1} \mathrm{P}_{1,W} \xleftarrow{\mathrm{d}_2} \cdots \xleftarrow{\mathrm{d}_p} \mathrm{P}_{p,W},$$

est une résolution projective de S_W dans la catégorie $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$.

Démonstration. Soit U un sous-groupe de V. Si W est un sous-groupe strict de U alors $\mathrm{P}_{\bullet,W}(U)$ s'identifie au complexe $\mathrm{Lu}_{\bullet,U/W}$ qui est acyclique et $\mathrm{S}_W(U)$ est nul. Dans le cas $U = W$, on a $\mathrm{P}_{k,W}(U) = 0$ pour $k > 0$ et ε_U est un isomorphisme. Si W n'est pas contenu dans U alors $\mathrm{P}_{\bullet,W}(U)$ et $\mathrm{S}_W(U)$ sont nuls.

Corollaire 8.18. – *Soient W et Z deux sous-groupes de V. On a un isomorphisme canonique*

$$\operatorname{Ext}^k_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{S}_W, \mathrm{S}_Z) \cong \begin{cases} \mathrm{St}^*_{Z/W} & \textit{pour } W \subset Z \textit{ et } k = \dim Z/W, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. – On constate que l'on a

$$\operatorname{Hom}^k_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{P}_{k,W}, \mathrm{S}_Z) \cong \begin{cases} \mathrm{St}^*_{Z/W} & \text{pour } W \subset Z \text{ et } k = \dim Z/W, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$ □

Résolution injective de S_V dans la catégorie $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$. – On considère le $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-monomorphisme canonique $\eta : \mathrm{S}_V \to \mathbb{I}^V$ (qui est en fait une enveloppe injective) ; on se propose de « prolonger » η en une résolution injective.

Soit k un entier naturel ; on pose

$$\mathrm{I}^k := \bigoplus_{\operatorname{codim} W = k} \mathrm{St}^*_{V/W} \otimes \mathbb{I}^W$$

et on note

$$\mathrm{d}^k : \mathrm{I}^k = \bigoplus_{\operatorname{codim} W = k} \mathrm{St}^*_{V/W} \otimes \mathbb{I}^W \longrightarrow \bigoplus_{\operatorname{codim} W' = k+1} \mathrm{St}^*_{V/W'} \otimes \mathbb{I}^{W'} = \mathrm{I}^{k+1}$$

la transformation naturelle dont la composante d'indices W', W (convention « matricielle »), disons $\mathrm{d}^k_{W',W}$, est donnée par

$$\mathrm{d}^k_{W',W} = \begin{cases} \mathrm{s}^*_{V/W',V/W} \otimes \nu_{W,W'} & \text{pour } W \supset W' \\ 0 & \text{pour } W \not\supset W', \end{cases}$$

$\nu_{W,W'}$ désignant ici l'unique élément non trivial de $\operatorname{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathbb{I}^W, \mathbb{I}^{W'})$.

Proposition 8.19. – *La suite de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-morphismes*

$$0 \longrightarrow \mathrm{S}_V \xrightarrow{\eta} \mathrm{I}^0 \xrightarrow{\mathrm{d}^0} \mathrm{I}^1 \xrightarrow{\mathrm{d}^1} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}^{n-1}} \mathrm{I}_n,$$

est une résolution injective de S_V dans la catégorie $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$.

Démonstration. Soit U un sous-groupe strict de V. On constate que

$$\mathrm{I}^0(U) \xrightarrow{\mathrm{d}_U^0} \mathrm{I}^1(U) \xrightarrow{\mathrm{d}_U^2} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_U^{n-1}} \mathrm{I}^n(U)$$

est le « complexe de Lusztig » $\mathrm{Lu}_{2,U}^{\bullet}$ et que $\mathrm{S}_V(U)$ est nul ; or $\mathrm{Lu}_{2,U}^{\bullet}$ est acyclique. Dans le cas $U = V$, on a $\mathrm{I}^k(U) = 0$ pour $k > 0$ et η_U est un isomorphisme.

Résolution injective de S_Z *($Z \subset V$) dans la catégorie* $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$. – Soient Z un sous-groupe de V et k un entier naturel ; on pose

$$\mathrm{I}^{k,Z} := \bigoplus_{\substack{W\subset Z \\ \dim Z/W=k}} \mathrm{St}^*_{Z/W} \otimes \mathbb{I}^W$$

et on note

$$\mathrm{d}^k \ : \ \mathrm{I}^{k,Z} \ = \bigoplus_{\substack{W\subset Z \\ \dim Z/W=k}} \mathrm{St}^*_{Z/W} \otimes \mathbb{I}^W \longrightarrow \bigoplus_{\substack{W'\subset Z \\ \dim Z/W'=k+1}} \mathrm{St}^*_{Z/W'} \otimes \mathbb{I}^{W'} \ = \ \mathrm{I}^{k+1,Z}$$

la transformation naturelle dont la composante d'indices W', W (convention « matricielle »), disons $\mathrm{d}^k_{W',W}$, est donnée par

$$\mathrm{d}^k_{W',W} = \begin{cases} \mathrm{s}^*_{Z/W',\,Z/W} \otimes \nu_{W,W'} & \text{pour } W \supset W' \\ 0 & \text{pour } W \not\supset W', \end{cases}$$

$\nu_{W,W'}$ désignant l'unique élément non trivial de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathbb{I}^W, \mathbb{I}^{W'})$.

On note encore $\eta : \mathrm{S}_Z \to \mathbb{I}^Z = \mathrm{I}^{0,Z}$ le $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-monomorphisme canonique (qui est à nouveau une enveloppe injective).

Proposition 8.20. – *La suite de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-morphismes*

$$0 \longrightarrow \mathrm{S}_Z \xrightarrow{\eta} \mathrm{I}^{0,Z} \xrightarrow{\mathrm{d}^0} \mathrm{I}^{1,Z} \xrightarrow{\mathrm{d}^1} \cdots$$

est une résolution injective de S_Z *dans la catégorie* $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$.

Démonstration. – Soit U un sous-groupe de V. Si U est un sous-groupe strict de Z alors $\mathrm{I}^{\bullet,Z}(U)$ s'identifie au complexe $\mathrm{Lu}^{\bullet}_{2,Z/U}$ qui est acyclique et $\mathrm{S}_Z(U)$ est nul. Dans la cas $U = Z$, on a $\mathrm{I}^{k,Z}(U) = 0$ pour $k > 0$ et η_U est un isomorphisme. Si U n'est pas contenu dans Z alors $\mathrm{I}^{\bullet,Z}(U)$ et $\mathrm{S}_Z(U)$ sont nuls. □

Remarques 8.21. – Le lecteur aura noté que les quatre démonstrations des propositions 8.10, 8.17, 8.19 et 8.20 sont *mutatis mutandis* les mêmes. Nous présentons ci-dessous, en petits caractères, des arguments conceptuels qui auraient pu éviter ces répétitions (tout en rallongeant l'exposition !).

1) *Dualité (suite)*

On note $\mathcal{E}_{\mathrm{f}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ dont les objets sont les $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels de dimension finie. Par « general nonsense » on a un isomorphisme fonctoriel

$$(\mathcal{E}_{\mathrm{f}}^{\mathcal{W}_V})^{\mathrm{op}} \cong (\mathcal{E}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{op}})^{\mathcal{W}_V^{\mathrm{op}}}$$

(rappelons que lorsque nous sommes amenés à faire varier le 2-groupe abélien élémentaire V, nous précisons, si nécessaire, la notation $\mathcal{W}$ en $\mathcal{W}_V$).

Or on dispose :

– d'un isomorphisme d'ensembles ordonnés $\mathcal{W}_V^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{W}_{V^*}$, à savoir l'application $U \mapsto U^{\perp}$;

– d'un isomorphisme fonctoriel $\mathcal{E}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}_{\mathrm{f}}$, à savoir le foncteur $E \mapsto E^*$.

Il existe donc un isomorphisme fonctoriel canonique, disons

$$\mathrm{D} : \mathcal{E}_{\mathrm{f}}^{\mathcal{W}_{V^*}} \xrightarrow{\cong} (\mathcal{E}_{\mathrm{f}}^{\mathcal{W}_V})^{\mathrm{op}}.$$

Explicitons. Soit F un foncteur de $\mathcal{W}_{V^*}$ dans $\mathcal{E}_{\mathrm{f}}$; $\mathrm{D}F$ est le foncteur de $\mathcal{W}_V$ dans $\mathcal{E}_{\mathrm{f}}$, $U \mapsto F(U^{\perp})^*$. Il est clair que le foncteur D est exact et qu'il transforme les objets projectifs (resp. injectifs) de la catégorie abélienne $\mathcal{E}_{\mathrm{f}}^{\mathcal{W}_{V^*}}$ en objets injectifs (resp. projectifs) de la catégorie abélienne $\mathcal{E}_{\mathrm{f}}^{\mathcal{W}_V}$. Donnons deux exemples. Considérons le foncteur $\mathbb{P}_{W^{\perp}} : \mathcal{W}_{V^*} \to \mathcal{E}_{\mathrm{f}}$, W désignant un sous-groupe de V ; on constate que l'on a $\mathrm{D}\,\mathbb{P}_{W^{\perp}} = \mathbb{I}^W$. Considérons le foncteur $\mathrm{S}_{0_{W^*}} : \mathcal{W}_{V^*} \to \mathcal{E}_{\mathrm{f}}$; on constate que l'on a $\mathrm{D}\,\mathrm{S}_{0_{V^*}} = \mathrm{S}_V$.

La discussion précédente montre que l'on peut obtenir la résolution injective de 8.19 en appliquant le foncteur D à la résolution projective de 8.10 (V étant remplacé par V^*).

2) *Extensions de Kan*

Soit Z un sous-groupe de V on note $\mathcal{W}_{\leq Z}$ (resp. $\mathcal{W}_{\geq Z}$) le sous-ensemble (ordonné) de $\mathcal{W}$ constitué des W avec $W \subset Z$ (resp. $W \supset Z$) ; on note $\mathrm{i}_{\leq Z} : \mathcal{W}_{\leq Z} \to \mathcal{W}$ (resp. $\mathrm{i}_{\geq Z} : \mathcal{W}_{\geq Z} \to \mathcal{W}$) l'inclusion canonique. On identifiera respectivement les catégories $\mathcal{W}_{\leq Z}$ et $\mathcal{W}_{\geq Z}$ aux catégories $\mathcal{W}_Z$ et $\mathcal{W}_{V/Z}$ auxquelles elles sont canoniquement isomorphes.

On note

$$\mathrm{Ran}_Z : \mathcal{E}^{\mathcal{W}_Z} \longrightarrow \mathcal{E}^{\mathcal{W}}$$

le foncteur extension de Kan à droite le long de $\mathrm{i}_{\leq Z}$, c'est-à-dire l'adjoint à droite du fonteur $\mathcal{E}^{\mathcal{W}} \to \mathcal{E}^{\mathcal{W}_Z}, F \mapsto F \circ \mathrm{i}_{\leq Z}$. Soit G un foncteur de $\mathcal{W}_Z$ dans $\mathcal{E}$; on constate que l'on a :

$$(\mathrm{Ran}_Z\, G)(U) = \begin{cases} G(U) & \text{pour } U \subset Z, \\ 0 & \text{pour } U \not\subset Z, \end{cases}$$

et que la co-unité d'adjonction $\epsilon_G : \mathrm{Ran}_Z\, G \circ \mathrm{i}_{\leq Z} \to G$ est un isomorphisme.

On note

$$\mathrm{Lan}_Z : \mathcal{E}^{\mathcal{W}_{V/Z}} \longrightarrow \mathcal{E}^{\mathcal{W}}$$

le foncteur extension de Kan à gauche le long de $\mathrm{i}_{\geq Z}$ c'est-à-dire l'adjoint à gauche du fonteur $\mathcal{E}^{\mathcal{W}} \to \mathcal{E}^{\mathcal{W}_{V/Z}}, G \mapsto G \circ \mathrm{i}_{\geq Z}$. Soit F un foncteur de $\mathcal{W}_{V/Z}$ dans $\mathcal{E}$; on constate que l'on a :

$$(\mathrm{Lan}_Z\, F)(U) = \begin{cases} F(U) & \text{pour } U \supset Z, \\ 0 & \text{pour } U \not\supset Z, \end{cases}$$

et que l'unité d'adjonction $\eta_F : F \to \mathrm{Lan}_Z\, F \circ \mathrm{i}_{\geq Z}$ est un isomorphisme.

Les deux propositions suivantes sont immédiates :

PROPOSITION R. – *Soit Z un sous-groupe de V.*

(a) *Les deux foncteurs $F \mapsto F \circ \mathrm{i}_{\leq Z}$ et Ran_Z sont exacts.*

(b) *Le foncteur $F \mapsto F \circ \mathrm{i}_{\leq Z}$ envoie projectifs sur projectifs.*

(c) *Le foncteur Ran_Z envoie injectifs sur injectifs.*

(d) *Pour tout entier $k \geq 0$, tout foncteur $F : \mathcal{W} \to \mathcal{E}$ et tout foncteur $G : \mathcal{W}_Z \to \mathcal{E}$, on a un isomorphisme (naturel) :*

$$\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}_Z}}(F \circ \mathrm{i}_{\leq Z}, G) \cong \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(F, \mathrm{Ran}_Z G).$$

PROPOSITION L. – *Soit Z un sous-groupe de V.*

(a) *Les deux foncteurs $G \mapsto G \circ \mathrm{i}_{\geq Z}$ et Lan_Z sont exacts.*

(b) *Le foncteur $G \mapsto G \circ \mathrm{i}_{\geq Z}$ envoie injectifs sur injectifs.*

(c) *Le foncteur Lan_Z envoie projectifs sur projectifs.*

(d) *Pour tout entier $k \geq 0$, tout foncteur $F : \mathcal{W}_{V/Z} \to \mathcal{E}$ et tout foncteur $G : \mathcal{W} \to \mathcal{E}$, on a un isomorphisme (naturel) :*

$$\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}_{V/Z}}}(F, G \circ \mathrm{i}_{\geq Z}) \cong \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{Lan}_Z F, G).$$

Le fait que Lan_W est exact et envoie projectifs sur projectifs permet de déduire 8.17 de 8.10 (avec V remplacé par V/W). Pareillement, le fait que Ran_Z est exact et envoie injectifs sur injectifs permet de déduire 8.20 de 8.19 (avec V remplacé par Z).

Résolution injective d'un foncteur arbitraire de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}$. – Soit F un foncteur de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}$.

– Soient W et Z deux sous-groupes de V avec $W \subset Z$ (alternativement, de façon plus pédante, soit $W \subset Z$ un morphisme de $\mathcal{W}$). On pose

$$\mathrm{I}^{W \subset Z} F := \mathrm{St}^*_{Z/W} \otimes F(Z) \otimes \mathbb{I}^W \,;$$

$\mathrm{I}^{W \subset Z} F$ est un objet injectif de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$.

– Soient W', W, Z trois sous-groupes de V avec $W' \subset W \subset Z$ et $\dim W/W' = 1$. On note

$$\mathrm{d}_{\mathrm{h}}^{W' \subset W \subset Z} : \mathrm{I}^{W \subset Z} F \to \mathrm{I}^{W' \subset Z} F$$

le $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-morphisme induit par

– l'homomorphisme $\mathrm{s}^*_{Z/W', Z/W} : \mathrm{St}^*_{Z/W} \to \mathrm{St}^*_{Z/W'}$,

– l'identité de $F(Z)$,

– l'unique $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-morphisme non trivial de $\mathbb{I}^W$ dans $\mathbb{I}^{W'}$.

– Soient W, Z, Z' trois sous-groupes de V avec $W \subset Z \subset Z'$ et $\dim Z'/Z = 1$. On note

$$\mathrm{d}_{\mathrm{v}}^{W \subset Z \subset Z'} : \mathrm{I}^{W \subset Z} F \to \mathrm{I}^{W \subset Z'} F$$

le $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-morphisme induit par

– l'homomorphisme $\mathrm{r}^*_{Z'/W, Z/W} : \mathrm{St}^*_{Z/W} \to \mathrm{St}^*_{Z'/W}$,

– l'homomorphisme $F(Z \subset Z')$,

– l'identité de $\mathbb{I}^W$.

– On organise la famille $\{\mathrm{I}^{W\subset Z}F\}$ en un objet $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$-gradué de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$. On pose :

$$\mathrm{I}^{p,q}F := \bigoplus_{W\subset Z,\,\mathrm{codim}\,W=p,\,\mathrm{codim}\,Z=-q} \mathrm{I}^{W\subset Z}F\,;$$

par définition, $\mathrm{I}^{p,q}F$ est nul pour $(p,q)\notin \mathrm{Tg}_n$ (on rappelle que Tg_n est le sous-ensemble de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ constitué des couples (p,q) vérifiant $p\geq 0$, $p\leq n$, $p+q\geq 0$ et $q\leq 0$).

On note $\mathrm{d}_{\mathrm{h}}^{p,q}:\mathrm{I}^{p,q}F\to \mathrm{I}^{p+1,q}F$, le $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-morphisme induit par les $\mathrm{d}_{\mathrm{h}}^{W'\subset W\subset Z}$ (on a $\mathrm{d}_{\mathrm{h}}^{p,q}=0$ si (p,q) ou $(p+1,q)$ n'appartient pas à Tg_n).

On note $\mathrm{d}_{\mathrm{v}}^{p,q}:\mathrm{I}^{p,q}F\to \mathrm{I}^{p,q+1}F$, le $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-morphisme induit par les $\mathrm{d}_{\mathrm{v}}^{W\subset Z\subset Z'}$ (on a $\mathrm{d}_{\mathrm{v}}^{p,q}=0$ si (p,q) ou $(p,q+1)$ n'appartient pas à Tg_n).

Proposition-Définition 8.22. – *Soit F un foncteur de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}$; soit (p,q) un élément de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.*

(a) *Le $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{I}^{p,q+1}F & \xrightarrow{\mathrm{d}_{\mathrm{h}}^{p,q+1}} & \mathrm{I}^{p+1,q+1}F \\
{\scriptstyle \mathrm{d}_{\mathrm{v}}^{p,q}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{d}_{\mathrm{v}}^{p+1,q}} \\
\mathrm{I}^{p,q}F & \xrightarrow{\mathrm{d}_{\mathrm{h}}^{p,q}} & \mathrm{I}^{p+1,q}F
\end{array}$$

est commutatif.

(b) *Le $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-morphisme composé*

$$\mathrm{I}^{p,q}F \xrightarrow{\mathrm{d}_{\mathrm{h}}^{p,q}} \mathrm{I}^{p+1,q}F \xrightarrow{\mathrm{d}_{\mathrm{h}}^{p+1,q}} \mathrm{I}^{p+2,q}F$$

est nul.

(c) *Le $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-morphisme composé*

$$\mathrm{I}^{p,q}F \xrightarrow{\mathrm{d}_{\mathrm{v}}^{p,q}} \mathrm{I}^{p,q+1}F \xrightarrow{\mathrm{d}_{\mathrm{v}}^{p,q+1}} \mathrm{I}^{p,q+2}F$$

est nul.

Le $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-objet bigradué $\{\mathrm{I}^{p,q}F\}_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$, muni des cobords $\mathrm{d}_{\mathrm{h}}^{p,q}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{v}}^{p,q}$, est un bicomplexe de cochaînes dans la catégorie $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$ que l'on note $\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F$.

Elle résulte de 8.5.

On considère la résolution injective $\mathrm{S}_Z\to \mathrm{I}^{\bullet,Z}$ de la proposition 8.20. Soit q un entier avec $-n\leq q\leq 0$; on a tout fait pour que la suite de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}]}$-morphismes

$$\mathrm{I}^{0,q}F \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{I}^{p,q}F \xrightarrow{\mathrm{d}_{\mathrm{h}}^{p,q}} \mathrm{I}^{p+1,q}F \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{I}^{n,q}F$$

coïncide avec $\bigoplus_{\mathrm{codim}\,Z=-q} F(Z)\otimes \mathrm{I}^{\bullet,Z}[-q]$.

On considère la résolution projective $\mathrm{P}_{\bullet,W} \to \mathrm{S}_W$ de la proposition 8.17 et le $\mathcal{E}$-complexe de cochaînes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{P}_{\bullet,W}, F)$. Soit p un entier avec $0 \leq p \leq n$; on constate cette fois que la suite de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}]}$-morphismes

$$\mathrm{I}^{p,-n}F \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{I}^{p,q}F \xrightarrow{\mathrm{d}_{\mathrm{v}}^{p,q}} \mathrm{I}^{p,q+1}F \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{I}^{p,0}F$$

s'identifie à $\bigoplus_{\operatorname{codim} W=p} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{P}_{\bullet,W}, F)[-p] \otimes \mathbb{I}^W$.

On note $\mathrm{Tot}\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F$ le totalisé du bicomplexe défini ci-dessus ; $\mathrm{Tot}\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F$ est donc un complexe de cochaînes dans la catégorie $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$ dont tous les termes sont injectifs. Soit $k \geq 0$ un entier ; on constate que l'on a

$$\mathrm{Tot}^k\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F = \bigoplus_{W\subset Z,\, \dim Z/W=k} \mathrm{St}^*_{Z/W} \otimes F(Z) \otimes \mathbb{I}^W$$

et donc en particulier

$$\mathrm{Tot}^0\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F = \bigoplus_W F(W) \otimes \mathbb{I}^W,\ \mathrm{Tot}^1\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F = \bigoplus_{W\subset Z,\, \dim Z/W=1} F(Z) \otimes \mathbb{I}^W.$$

On note $\eta : F \to \bigoplus_W F(W) \otimes \mathbb{I}^W = \mathrm{Tot}^0\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F$ le $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-monomorphisme canonique.

Proposition 8.23. – *Soit F un foncteur de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}$. Le $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-morphisme composé*

$$F \xrightarrow{\ \eta\ } \mathrm{Tot}^0\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F \xrightarrow{\mathrm{d}^0_{\mathrm{Tot}}} \mathrm{Tot}^1\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F$$

est nul (la notation $\mathrm{d}^0_{\mathrm{Tot}}$ est transparente) et $F \xrightarrow{\eta} \mathrm{Tot}\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F$ est une résolution injective de F dans la catégorie $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$.

Démonstration. – On vérifie tout d'abord l'égalité $\mathrm{d}^0_{\mathrm{Tot}} \circ \eta = 0$. Soient W et Z deux sous-groupes de V avec $W \subset Z$ et $\dim Z/W = 1$; soit π la projection de $\mathrm{Tot}^1\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F$ sur $F(Z)\otimes\mathbb{I}^W$. Par construction $\pi\circ(\mathrm{d}^0_{\mathrm{Tot}}\circ\eta)$ est la somme dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(F, F(Z)\otimes\mathbb{I}^W)$ des deux homomorphismes suivants :

– le composé de l'homomorphisme $F \to F(W) \otimes \mathbb{I}^W$ « donné par Yoneda » et de l'homomorphisme $F(W) \otimes \mathbb{I}^W \to F(Z) \otimes \mathbb{I}^W$ induit par $F(W \subset Z)$,

– le composé de l'homomorphisme $F \to F(Z) \otimes \mathbb{I}^Z$ « donné par Yoneda » et de l'homomorphisme $F(Z) \otimes \mathbb{I}^Z \to F(Z) \otimes \mathbb{I}^W$ induit par l'unique $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-morphisme non trivial de $\mathbb{I}^Z$ dans $\mathbb{I}^W$.

L'égalité $\mathrm{d}^0_{\mathrm{Tot}} \circ \eta = 0$ est donc équivalente à la commutativité des diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd} F(Z)\otimes\mathbb{I}^Z \arrow[r] & F(Z)\otimes\mathbb{I}^W \\ F \arrow[u] \arrow[r] & F(W)\otimes\mathbb{I}^W \arrow[u] \end{tikzcd}$$

dont la vérification est immédiate.

On montre maintenant que $F \xrightarrow{\eta} \mathrm{Tot}\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F$ est bien une résolution injective de F dans la catégorie $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$. On pose $\Gamma^\bullet F := \mathrm{Tot}\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F$ et on note $\widetilde{\Gamma}^\bullet F$ le complexe co-augmenté défini par η ; on considère ci-après $F \mapsto \widetilde{\Gamma}^\bullet F$ comme un foncteur défini sur la catégorie $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$ et à valeurs dans la catégorie des $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-complexes de cochaînes coaugmentés. Le foncteur $\widetilde{\Gamma}^{\bullet}$ possède les deux propriétés suivantes :

1) Il est exact. En effet, il est manifeste que le foncteur $F \mapsto \mathrm{I}^{W \subset Z} F$ est exact.

2) Pour tout sous-groupe Z de V le complexe $\widetilde{\Gamma}^{\bullet}\,\mathrm{S}_Z$ est acyclique. En effet, on constate que $\widetilde{\Gamma}^{\bullet}\,\mathrm{S}_Z$ coïncide avec la résolution injective de 8.20.

On en déduit que le complexe $\widetilde{\Gamma}^{\bullet} F$ est acyclique pour tout F en utilisant la filtration décroissante de F par les $\mathrm{filt}_1^k F$, $0 \leq k \leq n+1$. En effet, on a $\mathrm{filt}_1^{n+1} F = 0$, $\mathrm{filt}_1^0 F = F$ et le quotient $\mathrm{Gr}_1^k F := \mathrm{filt}_1^k F / \mathrm{filt}_1^{k+1} F$ est isomorphe à une somme directe de S_Z (avec $\dim Z = k$) pour tout k avec $0 \leq k \leq n$. □

Remarque 8.24. – Par construction le complexe $\mathrm{I}^{\bullet,q} F\,[q]$ est une résolution injective du foncteur $\mathrm{Gr}_1^{q+n} F$ dans la catégorie $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$ (voir la démonstration du point (b) de 8.22). Nous approfondissons cette remarque ci-après.

Soit k un entier avec $0 \leq k \leq n-1$. Soit ϵ_k l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{Gr}_1^k F, \mathrm{Gr}_1^{k+1} F)$ associé à la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Gr}_1^{k+1} F \to \mathrm{filt}_1^k F / \mathrm{filt}_1^{k+2} F \to \mathrm{Gr}_1^k F \to 0\,;$$

un argument formel montre que le produit de Yoneda $\epsilon_{k+1} \smile \epsilon_k$ est nul pour $k \leq n-2$. Soit $\mathrm{e}_k : \mathrm{I}^{\bullet,k-n} F\,[k-n]\,[1] \to \mathrm{I}^{\bullet,k+1-n} F\,[k+1-n]$ l'homomorphisme de complexes induit par le cobord vertical du bicomplexe $\mathrm{I}^{\bullet,\bullet} F$. On observe que l'on a par définition

$$\mathrm{I}^{\bullet,q}\,(\mathrm{filt}_1^k F / \mathrm{filt}_1^{k+2} F) = \begin{cases} \mathrm{I}^{\bullet,q} F & \text{pour } q = k-n, k+1-n \\ 0 & \text{pour } q \neq k-n, k+1-n \end{cases}$$

et que le cobord vertical du bicomplexe $\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}\,(\mathrm{filt}_1^k F / \mathrm{filt}_1^{k+2} F)$ est $\mathrm{e}_k\,[n-k-1]$. Comme la proposition 8.23 dit que $\mathrm{Tot}\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}\,(\mathrm{filt}_1^k F / \mathrm{filt}_1^{k+2} F)$ est une résolution injective du foncteur $\mathrm{filt}_1^k F / \mathrm{filt}_1^{k+2} F$, un argument presque aussi formel que celui évoqué précédemment montre que e_k représente ϵ_k. Ceci implique que le composé $\mathrm{e}_{k+1} \circ \mathrm{e}_k$ est homotopiquement nul. En fait ce composé est nul ; cette annulation est cruciale dans notre construction du bicomplexe $\mathrm{I}^{\bullet,\bullet} F$ (point (c) de 8.22). Bernhard Keller nous a signalé que ce phénomène n'était par contre pas formel en général. Précisons. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne avec assez d'injectifs et A un objet de $\mathcal{A}$, muni d'une filtration décroissante $A = A^0 \supset \cdots \supset A^k \supset \cdots \supset A^{n+1} = 0$. Soient ϵ_k les éléments de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A^k/A^{k+1}, A^{k+1}/A^{k+2})$ définis comme ci-dessus (qui vérifient $\epsilon_{k+1} \smile \epsilon_k = 0$ pour $k \leq n-2$) ; en général, il n'est pas possible d'exhiber des résolutions injectives $I_k^{\bullet}$ de A^k/A^{k+1} et des homomorphismes de complexes $e_k : I_k^{\bullet}[1] \to I_{k+1}^{\bullet}$ qui représentent ϵ_k et vérifient $e_{k+1} \circ e_k = 0$. Bernard Keller nous a indiqué que l'on peut trouver des informations sur cette question dans [**4**, 3.1].

8.3. Sur les foncteurs de $\mathcal{W}$ dans V-$\mathcal{U}$ vus comme certaines suites de foncteurs de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}$

Le début de cette sous-section est vraiment sans surprises d'où les petits caractères.

Soit M un objet de V-$\mathcal{U}$. La donnée de M est équivalente aux données suivantes :

– une suite $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{E}$-objets (M^k est constitué des éléments de degré k de M) ;

– des $\mathcal{E}$-morphismes, disons $\mu(k,h) : M^k \to M^{k+|h|}$, h désignant un élément (homogène) de H^*V dont le degré est noté $|h|$ ($\mu(k,h)$ est la multiplication par h),

– des $\mathcal{E}$-morphismes, disons $\alpha(k,\theta) : M^k \to M^{k+|\theta|}$, θ désignant un élément (homogène) de A dont le degré est noté $|\theta|$ ($\alpha(k,\theta)$ est fourni par l'action de θ sur M^k),

les $\mathcal{E}$-morphismes ci-dessus satisfaisant la liste, disons $(\mathcal{R})$, des relations ci-dessous :

– $\mu(k,h_1+h_2) = \mu(k,h_1)+\mu(k,h_2)$ (h_1 et h_2 de même degré)

– $\mu(k,h_2h_1) = \mu(k+|h_1|,h_2)\circ\mu(k,h_1)$

– $\alpha(k,\theta_1+\theta_2) = \alpha(k,\theta_1)+\alpha(k,\theta_2)$ (θ_1 et θ_2 de même degré)

– $\alpha(k,\theta_2\theta_1) = \alpha(k+|\theta_1|,\theta_2)\circ\alpha(k,\theta_1)$

– $\alpha(k+|h|,\theta)\circ\mu(k,h) = \sum\mu(k+|\theta''|,\theta'h)\circ\alpha(k,\theta'')$ avec $\Delta\theta = \sum\theta'\otimes\theta''$, $\Delta : \mathrm{A}\to\mathrm{A}\otimes\mathrm{A}$ désignant la diagonale de l'algèbre de Steenrod.

La discussion (un peu lourde !) ci-dessus montre que la donnée d'un foncteur F de $\mathcal{W}$ dans V-$\mathcal{U}$ est équivalente à celle d'une suite de foncteurs F^k de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}$ ($F^k(U)$, $U\subset V$, est l'ensemble des éléments de degré k de $F(U)$) et de transformations naturelles $\mathrm{m}(k,h) : F^k\to F^{k+|h|}$, h désignant un élément (homogène) de H^*V, et $\mathrm{a}(k,\theta) : F^k\to F^{k+|\theta|}$, θ désignant un élément (homogène) de A, transformations naturelles qui satisfont une liste de relations, disons $(\mathcal{S})$, calquée sur la liste $(\mathcal{R})$ ($\mu(-;-)$ est remplacé par $\mathrm{m}(-,-)$ et $\alpha(-,-)$ par $\mathrm{a}(-,-)$).

Définition 8.25. – *Soient S un foncteur de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}$ et F un foncteur de $\mathcal{W}$ dans V-$\mathcal{U}$. On note $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(S,F)$ le H^*V-A-module instable dont le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel des éléments de degré k et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(S,F^k)$ et dont la structure est donnée par les $\mathcal{E}$-morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(S,\mathrm{m}(k,h))$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(S,\mathrm{a}(k,\theta))$.*

Exemple 8.26. – Soit W un sous-groupe de V et F un foncteur de $\mathcal{W}$ dans V-$\mathcal{U}$; on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathbb{P}_W,F) = F(W)$.

Proposition 8.27. – *Soient S un foncteur de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}$ et F un foncteur de $\mathcal{W}$ dans V_{tf}-$\mathcal{U}$. Si $S(W)$ est de dimension finie pour tout sous-groupe W de V alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(S,F)$ est de type fini comme H^*V-module.*

Démonstration. – On considère le $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-épimorphisme canonique

$$\bigoplus_{W\in\mathcal{W}} S(W)\otimes\mathbb{P}_W \twoheadrightarrow S$$

(on observera incidemment que l'existence de cet épimorphisme entraîne que la catégorie $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$ a assez de projectifs). Cet épimorphisme induit un $(V$-$\mathcal{U})$-monomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(S,F) \hookrightarrow \bigoplus_{W\in\mathcal{W}} (S(W))^*\otimes F(W)$$

(observer que $F(W)$ est de dimension finie en chaque degré). On conclut en invoquant le fait que H^*V est noethérien. □

La proposition-définition ci-dessous étend la définition 8.25. La première partie de la proposition est immédiate ; la seconde résulte du fait que si I est un objet injectif de $(V\text{-}\mathcal{U})^{\mathcal{W}}$ alors, pour tout entier $k \geq 0$, I^k (I en degré k) est un objet injectif de $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$.

PROPOSITION-DÉFINITION 8.28. – *Soient p un entier naturel, S un foncteur de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}$ et F un foncteur de $\mathcal{W}$ dans V-$\mathcal{U}$.*

On note $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(S,F)$ le H^*V-A-module instable dont le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel des éléments de degré k est $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(S,F^k)$ et dont la structure est donnée par les $\mathcal{E}$-morphismes $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(S,\mathrm{m}(k,h))$ et $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(S,\mathrm{a}(k,\theta))$.

Soit $P_\bullet \to S$ une résolution projective dans la catégorie $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$ alors on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(S,F) \cong \mathrm{H}^p\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(P_\bullet,F).$$

Soit $F \to I^\bullet$ une résolution injective dans la catégorie $(V\text{-}\mathcal{U})^{\mathcal{W}}$ alors on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(S,F) \cong \mathrm{H}^p\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(S,I^\bullet).$$

La proposition 8.29 et le corollaire 8.30 (avatar de 8.3) ci-après, illustrent les définitions 8.25 et 8.28. Soit M un H^*V-A-module instable ; on rapelle que la notation $\widehat{\Psi}_M$ désigne le foncteur de $\mathcal{W}$ dans V-$\mathcal{U}$, $W \mapsto \mathrm{EFix}_{(V,W)}M$.

PROPOSITION 8.29. – *Soit M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-$\mathrm{A}$-module instable. On a un isomorphisme canonique de $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-$\mathrm{A}$-modules instables*

$$\mathrm{Pf}\,M \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{S}_0,\widehat{\Psi}_M).$$

Démonstration. – Soit F un foncteur de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}$; on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{S}_0,F) \cong \mathrm{H}^0\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{P}_\bullet,F),$$

$\mathrm{P}_\bullet \to \mathrm{S}_0$ étant la résolution projective de 8.10, c'est-à dire

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{S}_0,F) \cong \bigcap_{\dim W=1} \ker\left(F(0) \to F(W)\right).$$

Soit maintenant M un H^*V-A-module instable. L'isomorphisme ci-dessus donne

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{S}_0,\widehat{\Psi}_M) \cong \bigcap_{\dim W=1} \ker\left(M \to \mathrm{EFix}_{(V,W)}M\right).$$

Par définition le membre de droite est le terme F^nM de la filtration décroissante de M introduite au début de la section 5. Or on a $\mathrm{F}^nM = \mathrm{Pf}M$ si M est de type fini comme H^*V-module (proposition 5.3). □

COROLLAIRE 8.30. – *Soit M un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-$\mathrm{A}$-module instable. On a pour tout entier $k \geq 0$, un isomorphisme canonique de $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-$\mathrm{A}$-modules instables*

$$\mathrm{R}^k\mathrm{Pf}\,M \cong \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{E}^{\mathcal{W}}}(\mathrm{S}_0,\widehat{\Psi}_M).$$

Démonstration. – Soit $M \to I^\bullet$ une résolution injective dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$ alors $\widehat{\Psi}_M \to \widehat{\Psi}_{I^\bullet}$ est une résolution injective dans la catégorie $(V_{\mathrm{tf}}\text{-}\mathcal{U})^{\mathcal{W}}$ (remplacer Ψ par $\widehat{\Psi}$ dans la démonstration des points (a) et (b) de 3.9). On conclut à l'aide de 8.28 (dernière partie de la proposition) et 8.29. □

REMARQUE 8.31. – On observera que les énoncés 8.16 et 8.30 redonnent 3.9.

8.4. Construction du bicomplexe $\mathrm{B}^{p,q}M$

Soient M un H^*V-A-module instable et F^pM le p-ième terme de la filtration décroissante de M introduite en section 5. Par définition on a :

$$\mathrm{F}^pM = \bigcap_{\operatorname{codim} W<p} \ker\,(M = \widehat{\Psi}_M(0) \to \widehat{\Psi}_M(W))\,;$$

ceci motive la définition ci-après.

DÉFINITION 8.32. – *Soit F un foncteur de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}$ ou V-$\mathcal{U}$. On définit une filtration décroissante de $F(0)$:*

$$F(0) = \operatorname{filt}_2^0 F(0) \supset \cdots \supset \operatorname{filt}_2^p F(0) \supset \cdots \supset \operatorname{filt}_2^n F(0) \supset \operatorname{filt}_2^{n+1} F(0) = 0$$

en prenant

$$\operatorname{filt}_2^p F(0) := \bigcap_{\operatorname{codim} W<p} \ker\,(F(0) \to F(W)).$$

On pose $\operatorname{Gr}_2^p F(0) := \operatorname{filt}_2^p F(0)/\operatorname{filt}_2^{p+1} F(0)$.

REMARQUE 8.33. – La filtration de $F(0)$ que nous venons d'introduire se prolonge en fait en une filtration décroissante de F :

$$F = \operatorname{filt}_2^0 F \supset \cdots \supset \operatorname{filt}_2^p F \supset \cdots \supset \operatorname{filt}_2^n F \supset \operatorname{filt}_2^{n+1} F = 0$$

en prenant

$$(\operatorname{filt}_2^p F)(U) := \bigcap_{\operatorname{codim} W<p} \ker\,(F(U) \to F(U+W)).$$

Il est clair que l'on a tout fait pour avoir $\operatorname{filt}_2^p F(0) = (\operatorname{filt}_2^p F)(0)$. Si M est un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable alors $\operatorname{filt}_2^p \widehat{\Psi}_M$ s'identifie à $\widehat{\Psi}_{\mathrm{F}^pM}$. Pour s'en convaincre observer que le foncteur $M \mapsto \widehat{\Psi}_M$ est exact et que 2.11 implique l'identification $\widehat{\Psi}_{\mathrm{EFix}_{(V,W)}M}(U) = \widehat{\Psi}_M(U+W)$.

Le formalisme ci-dessus permet de définir pour tout foncteur $F : \mathcal{W} \to \mathcal{A}$, avec $\mathcal{A} = \mathcal{E}$ ou $\mathcal{A} = V$-$\mathcal{U}$, un $\mathcal{A}$-complexe de cochaînes, que nous notons $\mathrm{C}_2^\bullet F$. La définition de $\mathrm{C}_2^\bullet F$ imite celle du complexe $\mathrm{C}^\bullet M$, associé en section 5 à tout H^*V-A-module instable M, de telle sorte que l'on ait $\mathrm{C}_2^\bullet \widehat{\Psi}_M = \mathrm{C}^\bullet M$.

Explicitons. Soit $F \to I^\bullet$ une résolution injective de F dans la catégorie $\mathcal{A}^{\mathcal{W}}$; $\mathrm{C}_2^\bullet F$ est le complexe de cochaînes dans la catégorie $\mathcal{A}$ dont le p-ième terme est

$\mathrm{H}^p\mathrm{Gr}_2^p\, I^\bullet(0)$ et dont le cobord est donné par le connectant associé à la suite exacte de $\mathcal{A}$-complexes

$$0 \to \mathrm{Gr}_2^{p+1}\, I^\bullet(0) \to \mathrm{filt}_2^p\, I^\bullet(0)/\mathrm{filt}_2^{p+2}\, I^\bullet(0) \to \mathrm{Gr}_2^p\, I^\bullet(0) \to 0.$$

Là encore, les mantras de la théorie des résolutions injectives montrent que le complexe $\mathrm{C}_2^\bullet F$ est indépendant du choix de $I^\bullet$.

Proposition 8.34. – *Si F est un foncteur de $\mathcal{W}$ dans V-$\mathcal{U}$ alors on a*

$$\mathrm{C}_2^\bullet F = \mathrm{C}^\bullet F(0).$$

Démonstration. – Observer que si $F \to I^\bullet$ est une résolution injective de F dans la catégorie $(V\text{-}\mathcal{U})^{\mathcal{W}}$ alors $F(0) \to I^\bullet(0)$ est une résolution injective de F dans la catégorie V-$\mathcal{U}$ (voir le point (d) de 3.6). □

Corollaire 8.35. – *Soit M un* H^*V-A-*module instable ; on a*

$$\mathrm{C}_2^\bullet\, \widehat{\Psi}_M = \mathrm{C}^\bullet M.$$

Soient M un H^*V-A-module instable et $M \to I^\bullet$ une résolution injective de M dans la catégorie V-$\mathcal{U}$. Nous avons mis en oeuvre dans la démonstration de l'implication (i)⇒(ii) du théorème 5.16 la suite spectrale définie par la filtration du complexe $I^\bullet$ par les $\mathrm{F}^pI^\bullet$; nous notons ci-après $\mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}M$ son terme E_1. La ligne $\mathrm{E}_1^{\bullet,q}M$, munie de la différentielle d_1, est un complexe de cochaines dans la catégorie V-$\mathcal{U}$ et $\mathrm{C}^\bullet M$ n'est rien d'autre que $\mathrm{E}_1^{\bullet,0}M$.

Soit maintenant F un foncteur de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{A}$, avec $\mathcal{A} = \mathcal{E}$ ou $\mathcal{A} = V$-$\mathcal{U}$, et $F \to I^\bullet$ une résolution injective de F dans la catégorie $\mathcal{A}^{\mathcal{W}}$; nous notons $\mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}F$ le terme E_1 de la suite spectrale associée à la filtration du complexe $I^\bullet(0)$ par les $\mathrm{filt}_2^p\, I^\bullet(0)$. À nouveau $\mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}F$ ne dépend pas du choix de $I^\bullet$ et $\mathrm{C}_2^\bullet F$ n'est rien d'autre que $\mathrm{E}_1^{\bullet,0}F$. La proposition 8.34 et le corollaire 8.35 se généralisent immédiatement :

Proposition 8.36. – *Si F est un foncteur de $\mathcal{W}$ dans V-$\mathcal{U}$ alors on a*

$$\mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}F = \mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}F(0).$$

Corollaire 8.37. – *Soit M un* H^*V-A-*module instable ; on a*

$$\mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}\, \widehat{\Psi}_M = \mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}M.$$

Exemple 8.38. – Le $\mathcal{E}$-complexe $\mathrm{C}_2^\bullet\, \mathrm{S}_V$ est canoniquement isomorphe au complexe de Lusztig $\mathrm{Lu}_{2,V}^\bullet$ et $\mathrm{E}_1^{\bullet,q}$ est nul pour $q \neq 0$. On vérifie ces affirmations ci-après. On considère la résolution injective $\mathrm{S}_V \to \mathrm{I}^\bullet$ de 8.19. Comme l'on a $\mathbb{I}^W(0) = \mathbb{F}_2$ pour tout sous-groupe W de V, on constate que l'on a $\mathrm{I}^\bullet(0) = \mathrm{Lu}_{2,V}^\bullet$. On a d'autre part

$$\mathrm{filt}_2^p\, \mathbb{I}^W(0) = \begin{cases} \mathbb{I}^W(0) & \text{pour } \operatorname{codim} W \geq p, \\ 0 & \text{pour } \operatorname{codim} W < p, \end{cases}$$

si bien que la filtration de $\mathrm{I}^\bullet(0)$ par les $\mathrm{filt}_2^p\, \mathrm{I}^\bullet(0)$ coïncide avec celle par les troncations brutales $\sigma^{\geq p}\, \mathrm{I}^\bullet(0)$ (pour la définition de la troncation brutale on pourra se reporter à la démonstration du point (a) de 6.7). On conclut à l'aide du lemme 6.8.

Nous en arrivons à présent à la définition du bicomplexe $\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}M$, M désignant un H^*V-A-module instable, évoqué dans la proposition 5.31 ; nous suivons toujours la même stratégie :

– nous définissons d'abord $\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}F$ pour F un foncteur de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}$,

– nous étendons ensuite la définition ci-dessus aux foncteurs F de $\mathcal{W}$ dans V-$\mathcal{U}$ grâce au yoga de la sous-section 8.4,

– nous faisons enfin $F = \widehat{\Psi}_M$.

DÉFINITION 8.39. – *Soit F un foncteur de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}$. On pose*

$$\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}F := (\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F)(0),$$

$\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F$ désignant le $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-bicomplexe introduit en 8.22 ; $\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}F$ est donc un $\mathcal{E}$-bicomplexe de cochaînes avec

$$\mathrm{B}^{p,q}F = \bigoplus_{W\subset Z,\ \mathrm{codim}\, W=p,\ \mathrm{codim}\, Z=-q} \mathrm{St}^*_{Z/W} \otimes F(Z),$$

dont les cobords horizontaux et verticaux sont obtenus « en évaluant en 0 » ceux de 8.22.

PROPOSITION-DÉFINITION 8.40. – *Soit F un foncteur de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}$.*

Soit ${}_{\mathrm{B}}\mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}F$ le terme $\mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}$ de la suite spectrale associée à $\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}F$ obtenue « en dérivant verticalement ». Alors on a un isomorphisme canonique

$${}_{\mathrm{B}}\mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}F \cong \mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}F,$$

préservant les différentielles d_1 (en clair, on considère ici ${}_{\mathrm{B}}\mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}F$ et $\mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}F$ comme des bicomplexes avec cobord vertical nul, suivant en cela [**13**]*).*

Démonstration. – 1) D'une part la proposition 8.23 dit que $F \xrightarrow{\eta} \mathrm{Tot}\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F$ est une résolution injective de F dans la catégorie $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$ si bien que $\mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}F$ peut être vu comme le terme E_1 de la suite spectrale définie par la filtration du $\mathcal{E}$-complexe $(\mathrm{Tot}\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F)(0)$ par les $\mathrm{filt}_2^p\,(\mathrm{Tot}\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F)(0)$.

2) D'autre part ${}_{\mathrm{B}}\mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}F$ est obtenu de la façon suivante :

Soit $p \geq 0$ un entier ; on considère le sous-bicomplexe $\mathrm{F}^p_{\mathrm{II}}(\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F)(0)$ de $(\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F)(0)$ (notation de [**13**]) défini par

$$(\mathrm{F}^p_{\mathrm{II}}(\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F)(0))^{s,t} = \begin{cases} (\mathrm{I}^{s,t}F)(0) & \text{pour } s \geq p, \\ 0 & \text{pour } s < p. \end{cases}$$

La filtration (décroissante) du bicomplexe $(\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F)(0)$ par les $\mathrm{F}^p_{\mathrm{II}}(\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F)(0)$ induit une filtration du complexe $\mathrm{Tot}\,(\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F)(0) = (\mathrm{Tot}\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F)(0)$ par des sous-complexes $\mathrm{F}^p_{\mathrm{II}}(\mathrm{Tot}\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F)(0) := \mathrm{Tot}\,(\mathrm{F}^p_{\mathrm{II}}\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F)(0)$; ${}_{\mathrm{B}}\mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}F$ est le terme E_1 de la suite spectrale définie par la filtration du $\mathcal{E}$-complexe $(\mathrm{Tot}\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F)(0)$ par les $\mathrm{F}^p_{\mathrm{II}}(\mathrm{Tot}\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F)(0)$.

Or on constate que l'on a

$$\mathrm{filt}_2^p\,(\mathrm{Tot}\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F)(0) = \mathrm{F}^p_{\mathrm{II}}(\mathrm{Tot}\,\mathrm{I}^{\bullet,\bullet}F)(0).$$

Ceci résulte de l'argument déjà utilisé dans l'exemple 8.38. :

$$\underset{2}{\overset{p}{\mathrm{filt}}}\ \mathbb{I}^W(0) = \begin{cases} \mathbb{I}^W(0) & \text{pour } \operatorname{codim} W \geq p, \\ 0 & \text{pour } \operatorname{codim} W < p. \end{cases}$$ □

Soit F un foncteur de $\mathcal{W}$ dans V-$\mathcal{U}$; on définit $\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}F$, qui est maintenant un bicomplexe de cochaînes dans la catégorie V-$\mathcal{U}$, en posant

$$\mathrm{B}^{p,q}F := \bigoplus_{W\subset Z,\, \operatorname{codim} W=p,\, \operatorname{codim} Z=-q} \mathrm{St}^*_{Z/W} \otimes F(Z)$$

et en explicitant les cobords, horizontaux et verticaux, « par les mêmes formules » que précédemment. Alternativement, on peut définir $\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}F$ en adoptant le point de vue de 8.4. Donnons quelques détails. Soit k un entier naturel ; on note $\deg^k : V\text{-}\mathcal{U} \to \mathcal{E}$ le foncteur $M \mapsto M^k$ et $\mathrm{Deg}^k : (V\text{-}\mathcal{U})^{\mathcal{W}} \to \mathcal{E}^{\mathcal{W}}$ le foncteur $F \mapsto \deg^k \circ F$. On prend $\deg^k \mathrm{B}^{\bullet,\bullet}F := \mathrm{B}^{\bullet,\bullet}\,\mathrm{Deg}^k F$, la $(V\text{-}\mathcal{U})$-structure de $\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}F$ est obtenue en appliquant le foncteur $\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}$, défini sur la catégorie $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$ et à valeurs dans la catégorie des $\mathcal{E}$-bicomplexes de cochaînes, aux $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$-morphismes $\mathrm{Deg}^k F \to \mathrm{Deg}^{k'} F$ donnés par la $(V\text{-}\mathcal{U})$-structure des $F(U)$, $U \subset V$ (voir la sous-section 8.4). Ce point de vue permet d'étendre l'énoncé 8.40 aux foncteurs de $\mathcal{W}$ dans V-$\mathcal{U}$:

Proposition-Définition 8.41. – *Soit F un foncteur de $\mathcal{W}$ dans V-$\mathcal{U}$.*

Soit ${}_{\mathrm{B}}\mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}F$ le terme $\mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}$ de la suite spectrale associée à $\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}F$ obtenue « en dérivant verticalement ». Alors on a un isomorphisme canonique

$${}_{\mathrm{B}}\mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}F \cong \mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}F,$$

préservant les différentielles d_1.

Démonstration. – On a par définition $\deg^k \mathrm{B}^{\bullet,\bullet}F = \mathrm{B}^{\bullet,\bullet}\,\mathrm{Deg}^k F$. D'autre part, comme le foncteur Deg^k est exact et envoit injectifs sur injectifs, on a un isomorphisme canonique $\deg^k \mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}F \cong \mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}\,\mathrm{Deg}^k F$, naturel en F. □

Définition 8.42. – *Soit M un H^*V-A-module instable. On pose*

$$\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}M := \mathrm{B}^{\bullet,\bullet}\,\widehat{\Psi}_M\,;$$

$\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}M$ est donc un bicomplexe de cochaînes dans la catégorie V-$\mathcal{U}$ dont les termes sont donnés par l'égalité

$$\mathrm{B}^{p,q}M := \bigoplus_{W\subset Z,\, \operatorname{codim} W=p,\, \operatorname{codim} Z=-q} \mathrm{St}^*_{Z/W} \otimes \mathrm{EFix}_{(V,W)}M.$$

Vérification des affirmations de la proposition 5.31. – Si M est un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable alors il en est de même pour les $\mathrm{B}^{p,q}M$ d'après 2.9.

– La propriété $(\mathcal{B}_0)$ est satisfaite par définition.

– Compte tenu de l'égalité ${}_{\mathrm{B}}\mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}M = {}_{\mathrm{B}}\mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}\,\widehat{\Psi}_M$, la propriété $(\mathcal{B}_1)$ est un cas particulier de 8.41.

– L'isomorphisme $\mathrm{EFix}_{(V,W)}M \cong \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)}M$ de 1.5 implique immédiatement la propriété $(\mathcal{B}_2)$.

Remarque 8.43. – Soit M un H^*V-A-module instable, l'isomorphisme

$$ {}_{\mathrm{B}}\mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}\,\widehat{\Psi}_M \cong \mathrm{E}_1^{\bullet,\bullet}M $$

apporte un éclairage concret sur le complexe $\mathrm{C}^\bullet M$ introduit en section 5. Expliquons pourquoi. Comme l'on a, par définition, $\mathrm{C}^\bullet M = \mathrm{E}_1^{\bullet,0}M$, l'isomorphisme ci-dessus dit en particulier que l'on dispose d'un isomorphisme

$$ \mathrm{C}^\bullet M \cong \operatorname{coker}(\mathrm{d}_{\mathrm{h}}^{\bullet,-1} : \mathrm{B}^{\bullet,-1}M \to \mathrm{B}^{\bullet,0}M). $$

Toujours par définition, on a

$$ \mathrm{B}^{\bullet,0}M = \mathrm{Lu}_{2,V}^\bullet \otimes \mathrm{EFix}_{(V,V)}M $$

et

$$ \mathrm{B}^{\bullet,-1}M = \bigoplus_{\operatorname{codim} Z=1} \mathrm{Lu}_{2,Z}^\bullet[-1] \otimes \mathrm{EFix}_{(V,Z)}M. $$

L'homomorphisme de $(V\text{-}\mathcal{U})$-complexes $\mathrm{d}_{\mathrm{h}}^{\bullet,-1}$ est induit par

– les homomorphismes de $\mathcal{E}$-complexes $\mathrm{Lu}_{2,Z}^\bullet[-1] \to \mathrm{Lu}_{2,V}^\bullet$ définis en termes des homomorphismes $\mathrm{r}_{V/W,Z/W} : \mathrm{St}_{V/W} \to \mathrm{St}_{Z/W}$ $(W \subset Z \subset V)$,

– les $(V\text{-}\mathcal{U})$-morphismes $\mathrm{EFix}_{(V,Z)}M \to \mathrm{EFix}_{(V,V)}M$.

On observera que dans le cas $M = \mathrm{H}_V^*X$, X désignant un V-CW-complexe fini, c'est-à-dire dans le cas où l'on considère le complexe $\mathrm{C}_{\mathrm{alg}}^\bullet X$, l'homomorphisme $\mathrm{EFix}_{(V,Z)}M \to \mathrm{EFix}_{(V,V)}M$ s'identifie à l'homomomorphisme restriction $\mathrm{H}_V^*X^Z \to \mathrm{H}_V^*X^V$.

Illustrons cette remarque par un cas particulier. On prend $M = \mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V$ avec $V \neq 0$. On a vu lors de la démonstration du point (b) de la proposition 7.31 que l'on a $(\mathrm{Deg}^0\,\widehat{\Psi}_{\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V})(W) = 0$ pour $W \neq V$ (le cas $W = 0$, exclu en section 7, est trivial) ; il en résulte l'égalité $\deg^0 \mathrm{B}^{\bullet,-1}(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V) = 0$ et l'isomorphisme $\deg^0 \mathrm{C}^\bullet(\mathrm{c}_V\,\mathrm{H}^*V) \cong \mathrm{Lu}_{2,V}^\bullet$. Une méthode alternative pour démontrer le point (b) de 7.31 est de se convaincre que cet isomorphisme est équivariant pour les actions à droite de $\mathrm{GL}(V)$ et de procéder ensuite par récurrence sur la dimension de V.

CHAPITRE 9

FILTRATION PAR LA CODIMENSION DU SUPPORT ET FONCTEURS Fix

Cette section comporte trois sous-sections. La première est un rappel d'algèbre commutative : pour le confort du lecteur on explicite la définition de la filtration par la codimension du support d'un module sur un anneau commutatif. Dans la deuxième on montre que la filtration par la codimension du support du H^*V-module (V étant un 2-groupe abélien élémentaire) sous-jacent à un $\mathrm{H}^*V_{\mathrm{tf}}$-A-module instable coïncide avec celle définie en termes de foncteurs Fix. Dans la troisième on fait quelques commentaires concernant le lien entre les deux premières sous-sections et le joli résultat (vieux de 60 ans) de Serre concernant les idéaux homogènes de H^*V stables sous l'action des opérations de Steenrod.

À partir de 9.2, énoncé 9.8 excepté, on suppose $\ell = 2$.

9.1. Filtration par la codimension du support

Soit R un anneau (commutatif unitaire) ; on note $\operatorname{Spec} R$ son spectre : l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de R, muni de la topologie de Zariski.

Soit M un R-module ; soit $k \geq 0$ un entier. On pose

$$\mathrm{F}^k M := \bigcap_{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})<k} \ker\,(M \to M_{\mathfrak{p}}).$$

Les notations $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ et $M_{\mathfrak{p}}$ ci-dessus désignent respectivement la hauteur de l'idéal premier $\mathfrak{p}$ [**7**, Chap. VIII, §1, n° 3, définition 6] et le localisé de M en $\mathfrak{p}$. Pour le confort du lecteur rappelons la définition « concrète » [**7**, Chap. VIII, §1, n° 3, proposition 7-a)] de $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$: c'est la borne supérieure des entiers n tels que l'on a $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ avec $\mathfrak{p}_i$ premier pour $0 \leq i \leq n$. Les sous-modules $\mathrm{F}^k M$ fournissent une filtration décroissante naturelle de M :

$$M = \mathrm{F}^0 M \supset \mathrm{F}^1 M \supset \cdots \supset \mathrm{F}^k M \supset \cdots$$

que l'on appelle la *filtration par la codimension du support*. On fait ci-après quelques observations naïves qui sont censées justifier cette terminologie.

– Rappelons que le *support* d'un R-module M est le sous-ensemble de $\operatorname{Spec} R$ constitué des idéaux premier $\mathfrak{p}$ tels que l'on a $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$; on le note $\operatorname{Supp}(M)$.

– Notons $\ell_{\mathfrak{p}} : M \to M_{\mathfrak{p}}$ l'homomorphisme canonique. Soit x un élément de M, les deux conditions suivantes sont équivalentes (on utilise l'exactitude du foncteur localisation en $\mathfrak{p}$) :

(i) $\ell_{\mathfrak{p}}(x) = 0$;

(ii) $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Supp}(R\,x)$.

Il en résulte que $x \in \mathrm{F}^k M$ et $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(R\,x)$ implique $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \geq k$.

– Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de R, nous notons $\operatorname{Var}(\mathfrak{a})$ le sous-ensemble $\{\mathfrak{p}; \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$ de $\operatorname{Spec} R$ (ce sous-ensemble est fermé par définition, il est classiquement noté $\mathrm{V}(\mathfrak{a})$ mais le lecteur devinera aisément pourquoi nous avons écarté cette notation dans notre mémoire). Soient M' un sous-module de M et $\operatorname{Ann}(M')$ son idéal annulateur ; si M' est de type fini alors on a $\operatorname{Supp}(M') = \operatorname{Var}(\operatorname{Ann}(M'))$ [**6**, Chap. II, §4, n° 4, proposition 17] si bien que le support de M' est fermé dans $\operatorname{Spec} R$ et que l'on peut parler de sa codimension (dans $\operatorname{Spec} R$), que l'on note $\operatorname{codim} \operatorname{Supp}(M')$ [**7**, Chap. VIII, §1, n° 2]. Ce qui précède conduit à l'énoncé suivant (utiliser notamment [**6**, Chap. II, §4, n° 4, corollaire de la proposition 16] et [**7**, Chap. VIII, §1, n° 3, définition 6 et proposition 7-a)]) :

PROPOSITION 9.1. – *Soient M un R-module et M' un sous-module de type fini de M. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $M' \subset \mathrm{F}^k M$;

(ii) $M' = \mathrm{F}^k M'$;

(iii) $\operatorname{codim} \operatorname{Supp}(M') \geq k$.

COROLLAIRE 9.2. – *Soient R un anneau noethérien et M un R-module de type fini. Alors pour tout sous-module M' de M et tout entier $k \geq 0$ les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $M' \subset \mathrm{F}^k M$;

(ii) $M' = \mathrm{F}^k M'$;

(iii) $\operatorname{codim} \operatorname{Supp}(M') \geq k$.

(En particulier on a $\operatorname{codim} \operatorname{Supp}(\mathrm{F}^k M) \geq k$.*)*

Exemple. – Soit K un corps ; on prend pour R l'anneau $K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ des polynômes en n indéterminées à coefficients dans K. Dans ce cas :

(1) La dimension de Krull de R [**7**, Chap. VIII, §1, n° 3, définition 5] est égale à n [**7**, Chap. VIII, §2, n° 4, corollaire 1].

(2) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de R, alors on a les équivalences suivantes :

(2.1) $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 0 \iff \mathfrak{p} = \{0\}$;

(2.2) $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1 \iff \mathfrak{p} = R\,a$ avec a irréductible ;

(2.3) $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = n \iff \mathfrak{p}$ maximal.

Soit M un R-module.

– Le point (1) implique que l'on a $\mathrm{F}^k M = 0$ pour $k > n$.

– Le point (2.1) montre que $\mathrm{F}^1 M$ est la torsion de M.

– Si M est de type fini alors $\mathrm{F}^n M$ est de dimension finie en tant qu'espace vectoriel sur K (utiliser [**6**, Chap. IV, §1, n° 4, théorèmes 1 et 2] et le nullstellensatz).

9.2. Comparaison entre la filtration d'un H^*V-A-module instable définie en termes des foncteurs Fix et la filtration par la codimension du support du H^*V-module sous-jacent

Soit M un H^*V-A-module instable. Nous avons défini dans l'introduction (et mis en œuvre dans la section 5) une première filtration décroissante naturelle de M, par des sous-H^*V-A-modules instables,

$$M = \mathrm{F}^0 M \supset \mathrm{F}^1 M \supset \cdots \supset \mathrm{F}^k M \supset \cdots \supset \mathrm{F}^n M \supset \mathrm{F}^{n+1} M = 0$$

en posant

$$\mathrm{F}^k M = \bigcap_{\operatorname{codim} W < k} \ker\left(\eta_{(V,W),M} : M \to \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)} M\right).$$

D'autre part le H^*V-module sous-jacent à M admet une seconde filtration décroissante naturelle, par des sous-H^*V-modules, à savoir la filtration par la codimension du support qui est du même type, compte tenu du fait que H^*V est isomorphe à un anneau de polynômes, à coefficients dans $\mathbb{F}_2$, en n indéterminées (voir l'exemple à la fin de 9.1.1).

Proposition 9.3. – *Soit M un H^*V-A-module instable qui est de type fini comme H^*V-module. La filtration de M définie en termes des foncteurs* Fix *et la filtration par la codimension du support du H^*V-module sous-jacent coïncident (en tant que filtrations par des sous-H^*V-modules).*

Démonstration. – Notons (localement) $\mathrm{F}_1^k M$ les sous-H^*V-A-modules instables de la première filtration et $\mathrm{F}_2^k M$ les sous-H^*V-modules de la seconde. Soit $M \subset I$ une inclusion de H^*V-A-modules instables alors on a

$$\mathrm{F}_j^k M = M \cap \mathrm{F}_j^k I \tag{1}$$

pour $j = 1, 2$. Cette égalité résulte pour $j = 1$ de l'exactitude des foncteurs EFix (voir 5.1) et pour $j = 2$ de celle des foncteurs de localisation en $\mathfrak{p}$. Comme la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$ a assez d'injectifs, l'égalité (1) montre qu'il suffit de vérifier 9.3 pour M injectif. Compte tenu de la classification des (V_{tf}-$\mathcal{U}$)-injectifs (voir 2.5) on est ramené à vérifier 9.3 pour $M = \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N$ avec $W \subset V$ et N un H^*V/W-A-module instable fini. On conclut en constatant que si M est de cette forme alors on a

$$\mathrm{F}_j^k M = \begin{cases} M & \text{pour } k \leq \operatorname{codim} W, \\ 0 & \text{pour } k > \operatorname{codim} W. \end{cases} \tag{2}$$

Le cas $j = 1$ a déjà été traité dans la section 5 (proposition 5.4). Reste à traiter le cas $j = 2$.

On pose $\mathcal{P}_W := \ker(\mathrm{H}^*V \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^*W)$, i désignant l'inclusion de W dans V ; $\mathcal{P}_W$ est un idéal homogène de H^*V stable sous l'action de l'algèbre de Steenrod. Cet idéal est premier, puisque H^*W est intègre, sa hauteur est la codimension de W (invoquer par exemple [**7**, Chap. VIII, §2, n° 4, corollaire 2]). On observera que i^* induit un isomorphisme canonique de A-algèbres instables

$$\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathbb{F}_2 \cong \mathrm{H}^*W$$

($\mathbb{F}_2$ étant considéré ci-dessus comme un H^*V/W-A-module instable).

Le H^*V/W-A-module instable fini N admet une filtration finie

$$0 = N_{-1} \subset N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_r = N$$

avec $N_s/N_{s-1} \cong \Sigma^k\mathbb{F}_2$, $k \in \mathbb{N}$, pour $0 \leq s \leq r$. Du coup le H^*V-A-module instable M admet une filtration finie

$$0 = M_{-1} \subset M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M \tag{3}$$

avec $M_s/M_{s-1} \cong \Sigma^k\,\mathrm{H}^*W \cong \Sigma^k\,(\mathrm{H}^*V/\mathcal{P}_W)$, $k \in \mathbb{N}$, pour $0 \leq s \leq r$. Le cas $j = 2$ de l'égalité (2) en résulte. Détaillons lourdement :

Soient R un anneau et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de R ; on a $\mathrm{Supp}\,(R/\mathfrak{p}) = \mathrm{Var}(\mathfrak{p})$ et $(R/\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ est le corps des fractions de l'anneau intègre $R/\mathfrak{p}$, en particulier $\ell_\mathfrak{p} : R/\mathfrak{p} \to (R/\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ est injective. Spécialisons : on a $\mathrm{Supp}\,(\mathrm{H}^*V/\mathcal{P}_W) = \mathrm{Var}(\mathcal{P}_W)$ et $\ell_{\mathcal{P}_W} : \mathrm{H}^*V/\mathcal{P}_W \to (\mathrm{H}^*V/\mathcal{P}_W)_{\mathcal{P}_\mathrm{W}}$ est injective. On en déduit par récurrence sur la longueur de la filtration (3) que l'on a $\mathrm{Supp}\,(M) = \mathrm{Var}(\mathcal{P}_W)$([**6**, chapitre II, §4, n°4, proposition 16 (i)]) et que $\ell_{\mathcal{P}_W} : M \to M_{\mathcal{P}_\mathrm{W}}$ est injective. Les égalités $\mathrm{codim}\,\mathrm{Supp}\,(M) = \mathrm{ht}(\mathcal{P}_W)$ ([**7**, Chap. VIII, §1, n° 3, définition 6 et proposition 7-a)]), $\mathrm{ht}(\mathcal{P}_W) = \mathrm{codim}\,W$, et l'implication (iii)⇒(ii) de 9.1 montrent que l'on a $\mathrm{F}_2^k M = M$ pour $k \leq \mathrm{codim}\,W$. L'injectivité de $\ell_{\mathcal{P}_W} : M \to M_{\mathcal{P}_\mathrm{W}}$ (et à nouveau l'égalité $\mathrm{ht}(\mathcal{P}_W) = \mathrm{codim}\,W$) implique $\mathrm{F}_2^k M = 0$ pour $k > \mathrm{codim}\,W$. □

Scholie 9.4. – *Soit M un* H^*V-A-*module instable qui est de type fini comme* H^*V-*module ; soit* $\mathrm{F}^k M$ *le k-ième sous-*H^*V-A-*module instable de la filtration de M définie en termes des foncteurs* Fix. *Alors on a*

$$\mathrm{F}^k M = \underset{\mathrm{codim}\,W=k}{+} \Gamma_{\mathcal{P}_W}$$

($\Gamma_{\mathcal{P}_W}$ désigne ci-dessus la $\mathcal{P}_W$-torsion de M, voir le début de la section 3).

Scholie 9.5. – *Soit M un* H^*V-A-*module instable qui est de type fini comme* H^*V-*module. Alors les sous-*H^*V-*modules de la filtration par la codimension du support du* H^*V-*module sous-jacent sont stables sous l'action de l'algèbre de Steenrod.*

Compte tenu de 5.2, on a également :

SCHOLIE 9.6. – *Soit X un V-CW-complexe fini. Alors la filtration décroissante de $\mathrm{H}^*_V X$ définie par*

$$\mathrm{F}^k\,\mathrm{H}^*_V X = \bigcap_{\operatorname{codim} W<k} \ker\,(\mathrm{H}^*_V X \to \mathrm{H}^*_V X^W)$$

coïncide (en tant que filtration par des sous-H^*V*-modules) avec la filtration par la codimension du support du* H^*V*-module sous-jacent.*

REMARQUE 9.7. – Les quatre énoncés précédents font intervenir la notion de « H^*V-module sous-jacent à un H^*V-A-module instable » et non celle de « H^*V-module $\mathbb{N}$-gradué sous-jacent à un tel objet » ; en d'autres termes nous avons oublié (au sens mathématique) les $\mathbb{N}$-graduations « compatibles » de H^*V et des H^*V-A-modules instables. Le lecteur pourra trouver un précis d'algèbre commutative dans le contexte gradué (en fait $\mathbb{Z}$-gradué... mais qui peut le plus peut le moins), dans [**11**, 1.5.1] ; en particulier une théorie de la filtration par la codimension du support dans le contexte $\mathbb{N}$-gradué est implicite dans cette référence.

Sur l'hypothèse de finitude qui figure dans les énoncés 9.3, 9.4 et 9.5. – Nous avons supposé dans les énoncés en question que le H^*V-A-module instable M est de type fini comme H^*V-module. Nous avions deux raisons pour cela. La première était que dans notre contexte (sections 3, 4, 5 et 6) cette condition était satisfaite, la seconde que cela simplifiait notre exposition. En fait cette restriction peut être levée. Pour cela on doit apporter de légères modifications à la démonstration que nous avons donnée de 9.3, modifications que nous décrivons brièvement ci-après.

1) On remplace le théorème de classification des V_{tf}-$\mathcal{U}$-injectifs par celui de classification des V-$\mathcal{U}$-injectifs (respectivement 2.5 et 2.2).

2) On observe que les foncteurs localisation en $\mathfrak{p}$ et les foncteurs EFix, qui sont des adjoints à gauche, commutent aux sommes directes arbitraires si bien que l'on est ramené à nouveau au cas où M est un V-$\mathcal{U}$-injectif indécomposable et plus généralement au cas $M = S \otimes (\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N)$ avec S un A-module instable et N un H^*V/W-A-module instable fini.

3) On revisite le point (a) de 1.16. Soit P un H^*V-A-module instable ; on vérifie que l'unité d'adjonction

$$\eta_{(V,W),S\otimes P} : S \otimes P \longrightarrow \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)}(S \otimes P)$$

s'identifie au produit tensoriel de l'homomorphisme $\iota_S : S = \mathrm{T}_0 S \to \mathrm{T}_W S$ et de l'unité d'adjonction $\eta_{(V,W),P} : P \to \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)} P$. Comme ι_S admet une rétraction naturelle, à savoir l'homomorphisme $\mathrm{T}_W S \to \mathrm{T}_0 S = S$, on constate que l'on dispose de la variante suivante de la proposition 1.27 :

PROPOSITION 9.8. – *Soient V un ℓ-groupe abélien élémentaire et W, U des sous-groupes ; soient S un* A*-module instable et N un* H^*V/U*-*A*-module instable fini. Alors l'unité d'adjonction*

$$S \otimes (\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N) \xrightarrow{\eta_{(V,W)}} \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{Fix}_{(V,W)}(S \otimes (\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N))$$

est un monomorphisme (scindé) si l'on a $W \subset U$ et est nulle si l'on a $W \not\subset U$.

Cette proposition implique la généralisation ci-dessous de la proposition 5.4 :

PROPOSITION 9.9. – *Soient U un sous-groupe de V, S un* A*-module instable et N un* H^*V/U-A*-module instable fini. Alors on a*

$$\mathrm{F}^k\left(S \otimes (\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N)\right) = \begin{cases} S \otimes (\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/U} N) & \textit{pour } k \leq \operatorname{codim} U, \\ 0 & \textit{pour } k > \operatorname{codim} U. \end{cases}$$

(Ci-dessus F^k est défini en termes des foncteurs Fix.)

9.3. Compléments

La spécificité de la filtration par la codimension du support d'un H^*V-module gradué muni d'une action « compatible et instable » de l'algèbre de Steenrod tient essentiellement au résultat ci-dessous dû à Jean-Pierre Serre [**40**, §2, proposition (1)]. On rappelle que la *racine* (ou le *radical*) d'un idéal $\mathfrak{a}$ d'un anneau R, est le sous-ensemble de R constitué des éléments dont une puissance appartient à $\mathfrak{a}$; ce sous-ensemble est aussi un idéal de R, il est noté $\sqrt{\mathfrak{a}}$. On dit que $\mathfrak{a}$ est *radiciel* si l'on a $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$; l'idéal $\sqrt{\mathfrak{a}}$ est radiciel.

THÉORÈME 9.10. – *Soient $\mathfrak{a}$ un idéal homogène de* H^*V *stable sous l'action de l'algèbre de Steenrod. Soit $\mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{W}$ constitué des sous- groupes $W \subset V$ tels que l'on a $\mathfrak{a} \subset \mathcal{P}_W$ et qui sont maximaux pour cette propriété. Alors on a :*

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{W \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}} \mathcal{P}_W .$$

Compte tenu d'un lemme bien connu sur les idéaux premiers d'un anneau (voir par exemple [**3**, proposition 1.11 (ii)]) ce théorème admet le corollaire suivant :

COROLLAIRE 9.11. – *Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier homogène de* H^*V *stable sous l'action de l'algèbre de Steenrod. Alors il existe un sous-groupe W de V, uniquement déterminé, tel que l'on a $\mathfrak{p} = \mathcal{P}_W$.*

On se propose de montrer que la théorie des V_{tf}-$\mathcal{U}$-injectifs conduit à une démonstration de 9.10.

LEMME 9.12. – *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de* H^*V*. Si $\mathfrak{a}$ est homogène et stable sous l'action de l'algèbre de Steenrod alors il en est de même pour $\sqrt{\mathfrak{a}}$.*

Démonstration. – Le fait que $\sqrt{\mathfrak{a}}$ est homogène est un cas particulier d'un résultat général sur les idéaux homogènes d'un anneau gradué (voir par exemple [**42**, Chap. VII, §2, Theorem 8 (b)]). Dans le cas de l'anneau gradué H^*V on peut se convaincre de ce que $\sqrt{\mathfrak{a}}$ est homogène grâce à l'observation triviale ci-après. Soit x un élément, pas nécessairement homogène, de H^*V alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe m dans $\mathbb{N} - \{0\}$ avec $x^m \in \mathfrak{a}$;
(ii) il existe m dans $\mathbb{N}$ avec $x^{2^m} \in \mathfrak{a}$.

Cette observation conduit aussi à une preuve du fait que $\sqrt{\mathfrak{a}}$ est stable sous l'action de l'algèbre de Steenrod. Soient x un élément, cette fois homogène, de $\sqrt{\mathfrak{a}}$ et i un entier. Il existe un entier m tel que l'on a $x^{2^m} \in \mathfrak{a}$. Comme $\mathfrak{a}$ est stable sous l'action de l'algèbre de Steenrod on a aussi $\mathrm{Sq}^{2^m i}\, x^{2^m} \in \mathfrak{a}$; l'égalité $\mathrm{Sq}^{2^m i}\, x^{2^m} = (\mathrm{Sq}^i x)^{2^m}$ montre $\mathrm{Sq}^i x \in \mathfrak{a}$. □

On va démontrer l'énoncé d'algèbre commutative 9.10 en utilisant l'énoncé d'algèbre linéaire 9.13.

Soit M un A-module instable. Rappelons que l'on dit que M est *réduit* si pour tout entier i l'opération $\mathrm{Sq}^i : M^i \to M^{2i}$, souvent notée Sq_0, est injective. Rappelons également l'origine de cette terminologie. Si M est une A-algèbre instable alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la $\mathbb{F}_2$-algèbre graduée sous-jacente à M est réduite (au sens de l'algèbre commutative) ;
(ii) le A-module instable sous-jacent à M est réduit (au sens ci-dessus).

Cette équivalence provient du fait que l'on a $\mathrm{Sq}_0\, x = x^2$ pour tout x dans M.

Ces rappels étant faits, nous pouvons énoncer :

PROPOSITION 9.13. – *Soient M un* H^*V-A-*module instable qui est de type fini comme* H^*V-*module et $i : M \to E$ une enveloppe injective (dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$). Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *le A-module sous-jacent à M est réduit ;*
(ii) *E est isomorphe à une somme directe de la forme*

$$\bigoplus_{W \in \mathcal{W}} (\mathrm{H}^*W)^{a_W}$$

avec $a_W \in \mathbb{N}$ (H^*W étant un H^*V-A-*module instable via l'homomorphisme canonique de* A-*algèbres instables* $\mathrm{H}^*V \to \mathrm{H}^*W$*).*

Démonstration de (ii)⇒(i). – Si (ii) est vérifiée alors le A-module instable sous-jacent à E est réduit (par exemple parce que les $\mathbb{F}_2$-algèbres H^*W sont réduites) et il en est donc de même pour M.

Démonstration de (i)⇒(ii). – On sait *a priori*, d'après 2.5, que E est isomorphe à une somme directe de la forme

$$\bigoplus_{(W,k) \in \mathcal{W} \times \mathbb{N}} (\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{J}_{V/W}(k))^{a_{W,k}}$$

avec $a_{W,k} \in \mathbb{N}$ et $a_{W,k} = 0$ pour k assez grand. Comme l'on a

$$\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{J}_{V/W}(0) \cong \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathbb{F}_2 \cong \mathrm{H}^*W,$$

il suffit de montrer que (i) implique $a_{W,k} = 0$ pour $k > 0$.

On dispose d'une inclusion canonique de H^*V-A-modules instables, disons $\iota_{V,k} : \Sigma^k\mathbb{F}_2 \hookrightarrow \mathrm{J}_V(k)$ (en fait $\mathrm{J}_V(k)$ est une enveloppe injective de $\Sigma^k\mathbb{F}_2$). En effet, on a par définition $\mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathcal{U}}(\Sigma^k\mathbb{F}_2, \mathrm{J}_V(k)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ et l'unique homomorphisme non nul de $\Sigma^k\mathbb{F}_2$ dans $\mathrm{J}_V(k)$ est nécessairement injectif. En appliquant le foncteur $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} -$ à l'inclusion canonique $\iota_{V/W,k}$, on obtient une inclusion de H^*V-A-modules instables, tout aussi canonique, $\Sigma^k\mathrm{H}^*W \hookrightarrow \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{J}_{V/W}(k)$ (en fait $\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \mathrm{J}_{V/W}(k)$ est une enveloppe injective de $\Sigma^k\mathrm{H}^*W$). Ce qui précède permet de conclure. Si l'on a $a_{W,k} \neq 0$, alors E contient un sous-module P isomorphe à $\Sigma^k\mathrm{H}^*W$; si M est réduit on a $i^{-1}(P) = 0$ pour $k > 0$ (puisque dans ce cas l'opération Sq_0 est nulle sur $i^{-1}(P)$) et donc $P = 0$ (propriété d'une enveloppe injective) ce qui force $a_{W,k} = 0$ pour $k > 0$. □

Fin de l'interlude linéaire. Revenons à la démonstration de 9.10. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal homogène de H^*V stable sous l'action de l'algèbre de Steenrod. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) l'idéal $\mathfrak{a}$ est radiciel ($\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$) ;
(ii) la $\mathbb{F}_2$-algèbre $\mathrm{H}^*V/\mathfrak{a}$ est réduite ;
(iii) le A-module instable $\mathrm{H}^*V/\mathfrak{a}$ est réduit.

(Pour (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) voir la discussion qui précède 9.13.)

Compte tenu du lemme 9.12, le cas particulier où $\mathfrak{a}$ est radiciel du théorème 9.10 implique le cas général ; on suppose donc $\mathfrak{a}$ radiciel. Dans ce cas, d'après la proposition 9.13, $\mathrm{H}^*V/\mathfrak{a}$ admet une enveloppe injective, dans la catégorie V_{tf}-$\mathcal{U}$, de la forme

$$i : \mathrm{H}^*V/\mathfrak{a} \to \mathrm{H}^*W_1 \oplus \mathrm{H}^*W_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{H}^*W_r$$

avec $W_1, W_2, \ldots, W_r$ une suite finie de sous-groupes de V.

Soient $q : \mathrm{H}^*V \to \mathrm{H}^*V/\mathfrak{a}$ l'homorphisme canonique de A-algèbres instables et $\pi_k : \mathrm{H}^*V/\mathfrak{a} \to \mathrm{H}^*W_k$ l'homomorphisme de H^*V-A-modules instables composé de i et de la projection sur le facteur H^*W_k. Le composé $\pi_k \circ q : \mathrm{H}^*V \to \mathrm{H}^*W_k$ coïncide avec l'homomorphisme de A-algèbres instables induit par l'inclusion, disons $j_k : W_k \hookrightarrow V$. Détaillons lourdement. Posons $\varphi_k := \pi_k \circ q$, puisque φ_k est un homomorphisme de H^*V-A-modules instables, on a $\varphi_k(a) = j_k^*(a)\varphi_k(1)$ pour tout a dans H^*V et donc $\varphi_k = \lambda\, j_k^*$ en posant $\lambda = \varphi_k(1)$; $\lambda = 0$ est interdit car φ_k est non nul (propriété d'enveloppe injective).

Arrivé là, on a déjà démontré le théorème de Serre. En effet, on a $\mathfrak{a} = \ker(i \circ q)$ et donc, d'après ce qui précède,

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{k=1}^{r} \mathcal{P}_{W_k}.$$

On peut « nettoyer » l'égalité ci-dessus de la façon suivante. Soit Max le sous-ensemble de $\{W_1, W_2, \ldots, W_r\}$ constitué des éléments maximaux pour l'inclusion alors on aussi

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{W \in Max} \mathcal{P}_W.$$

En fait ce nettoyage est inutile dans notre contexte. Considérons à nouveau l'enveloppe injective

$$i : \mathrm{H}^*V/\mathfrak{a} \to \mathrm{H}^*W_1 \oplus \mathrm{H}^*W_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{H}^*W_r := E.$$

Les propriétés d'enveloppe injective font que l'on a $W_k \not\subset W_l$ et $W_l \not\subset W_k$ pour $k \neq l$ (en termes plus pédants que la relation d'ordre sur $\{W_1, W_2, \ldots, W_r\}$ définie par l'inclusion est l'égalité). Détaillons. Supposons $W_k \subset W_l$, alors on a $\pi_k = \rho \circ \pi_l$, ρ désignant l'homomorphisme $\mathrm{H}^*W_l \to \mathrm{H}^*W_k$ induit par cette inclusion. Identifions H^*W_k à un sous-module de E ; l'égalité $\pi_k = \rho \circ \pi_l$ entraîne $i^{-1}(\mathrm{H}^*W_k) = 0$, contradiction. □

Commentaires. – 1) La démonstration que nous avons donnée du théorème 9.10 est bien moins « géodésique » que la démonstration originale de Serre ! Signalons cependant que notre méthode de « linéarisation » fournit des informations supplémentaires sur les idéaux satisfaisant les conditions du théorème.

2) On peut donner une démonstration du théorème 9.10 à l'aide de la partie II de [**25**]. En effet celle-ci implique que $\mathrm{H}^*V/\sqrt{\mathfrak{a}}$ se plonge comme A-algèbre instable dans un produit fini $\prod_k \mathrm{H}^*V_k$ et on conclut comme ci-dessus. Il est à signaler que la partie II de [**25**] se déduit, là encore par un « principe de linéarisation », de la partie I de cette référence qui traite des A-modules instables « aux nilpotents près ».

3) Nous avons supposé $\ell = 2$ afin que H^*V soit commutative et rester dans le confort douillet de l'algèbre commutative. Si l'on veut rester dans ce cadre pour $\ell > 2$, il faut remplacer H^*V par sa sous-algèbre, disons $\mathrm{P}V$, engendrée par le Bockstein des classes de degré 1 ($\mathrm{P}V$ est isomorphe à un anneau de polynômes, à coefficients dans $\mathbb{F}_\ell$, en n indéterminées de degré 2) et l'algèbre de Steenrod A par sa sous-algèbre, disons A′, engendrée par les opérations de Steenrod P^i. C'est ce que fait Serre dans [**40**].

4) Serre utilise le théorème 9.10 pour obtenir l'énoncé suivant :

Corollaire 9.14. – *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de H^*V vérifiant les hypothèses du théorème 9.10. Si $\mathfrak{a}$ est non nul alors il contient un produit d'éléments de $\mathrm{H}^1V - \{0\}$.*

Démonstration. – On reprend les notations de 9.10. Puisque $\mathfrak{a}$ est non nul, on a $W \neq V$ pour tout W dans $\mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$; il existe donc, pour tout W dans $\mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$, une forme linéaire u_W non nulle sur V et nulle sur W. On considère u_W comme un élément de $\mathrm{H}^1V - \{0\}$; par construction $\prod_{W \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}} u_W$ appartient à $\sqrt{\mathfrak{a}}$. Une puissance de ce produit appartient à $\mathfrak{a}$. □

On pose $\mathrm{c}_V := \prod_{u \in \mathrm{H}^1V - \{0\}} u$. Il est bien connu que l'énoncé ci-dessus conduit au suivant :

Proposition 9.15. – *Soit M un H^*V-A-module instable. Soit x un élément de M, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *x est un élément de torsion du H^*V-module sous-jacent à M ;*
(ii) *il existe un entier naturel m tel que l'on a $\mathrm{c}_V^m x = 0$.*

Démonstration de (i)⇒(ii). – Cette implication résulte de 9.14 et du lemme suivant dû à Landweber et Stong ([**30**, proposition 3]) :

LEMME 9.16. – *Soit* $\mathrm{Ann}(x) \subset \mathrm{H}^*V$ *l'idéal annulateur de* x. *Alors l'idéal* $\sqrt{\mathrm{Ann}(x)}$ *est stable sous l'action de* A.

Démonstration. – Soient a un élément de H^*V, x un élément de M et m un entier avec $2^m > |x|$ ($|x|$ désigne le degré de x). On a $\mathrm{Sq}^{2^m i}(a^{2^m} x) = (\mathrm{Sq}^i a)^{2^m} x$ pour tout entier $i \geq 0$. Cette identité montre que $a \in \sqrt{\mathrm{Ann}(x)}$ implique $\mathrm{Sq}^i a \in \sqrt{\mathrm{Ann}(x)}$. □

CHAPITRE 10

STRATÉGIES POUR $\ell > 2$

L'incorporation à notre mémoire de cette dernière section a été suggérée par le rapporteur ; nous y donnons quelques informations sur les modifications à apporter, pour $\ell > 2$, aux énoncés et démonstrations des sections 0 et 3 à 9 dans lesquelles nous avons supposé $\ell = 2$. Il est clair que cette section est une simple esquisse(1) et qu'elle est influencée par l'article [**2**] de Allday, Franz et Puppe.

Soient ℓ un nombre premier et V un ℓ-groupe abélien élémentaire ; on pose $n := \dim_{\mathbb{Z}/\ell} V$.

– Pour $\ell = 2$, H^*V est canoniquement isomorphe, en tant qu'algèbre $\mathbb{N}$-graduée, à l'algèbre symétrique $\mathrm{Sym}(\mathrm{H}^1 V) \cong \mathrm{Sym}(V^*)$, la graduation de $\mathrm{Sym}(V^*)$ étant donnée par $(\mathrm{Sym}(V^*))_k = \mathrm{Sym}^k(V^*)$.

Il en résulte que H^*V est de dimension homologique n (au sens $\mathbb{N}$-gradué, voir par exemple [**5**, §8, n°7]).

– Pour $\ell > 2$, H^*V est canoniquement isomorphe, en tant qu'algèbre $\mathbb{N}$-graduée, au produit tensoriel de l'algèbre extérieure $\Lambda(\mathrm{H}^1 V) \cong \Lambda(V^*)$, la graduation de $\Lambda(V^*)$ étant donnée par $(\Lambda(V^*))_k = \Lambda^k(V^*)$, et de l'algèbre symétrique $\mathrm{Sym}(\beta \mathrm{H}^1 V) \cong \mathrm{Sym}(V^*)$ (β désigne ici le Bockstein $\mathrm{H}^1 V \to \mathrm{H}^2 V$ qui est injectif), la graduation de $\mathrm{Sym}(V^*)$ étant donnée par $(\mathrm{Sym}(V^*))_k = \mathrm{Sym}^{k/2}(V^*)$ pour k pair et $(\mathrm{Sym}(V^*))_k = 0$ pour k impair.

La dimension homologique de $\Lambda(V^*)$ est $+\infty$. Par exemple, pour $n = 1$, la résolution projective minimale de $\mathbb{F}_\ell$ (la structure de $\Lambda(V^*)$-module de $\mathbb{F}_\ell$ étant donnée par l'augmentation $\varepsilon : \Lambda(V^*) \to \mathbb{F}_\ell$) est de la forme $\mathbb{F}_\ell \xleftarrow{\varepsilon} L_0 \leftarrow L_1 \leftarrow \cdots \leftarrow L_p \leftarrow \cdots$ avec $L_p = \Lambda(V^*)$ pour tout p dans $\mathbb{N}$, l'homomorphisme $L_p \leftarrow L_{p+1}$ étant la multiplication par le générateur canonique de $\mathrm{H}^1 V$. Il en résulte que la dimension homologique de H^*V est $+\infty$ (bien que celle du « facteur » $\mathrm{Sym}(V^*)$ soit encore n).

Pour tenir compte de ce « défaut de régularité » de H^*V pour $\ell > 2$, il faut modifier certains des énoncés que nous avons pour $\ell = 2$ et adapter leurs démonstrations. Nous donnons trois exemples ci-après.

(1) Ou plutôt un programme.

Au préalable, pour allèger, nous introduisons les notations suivantes dans le cas $\ell > 2$:

– La sous-A-algèbre instable de H^*V engendrée par H^1V est notée ΛV (on se rappellera que ΛV est, comme H^*V, « contravariante en V »).

– La sous-A-algèbre instable de H^*V engendrée par $\beta\mathrm{H}^1V$ est notée $\mathrm{P}V$ (P est pour « partie polynômiale », $\mathrm{P}V$ est « contravariante en V ») ; l'idéal d'augmentation de $\mathrm{P}V$ est noté $\widetilde{\mathrm{P}}V$.

On fera en outre les observations suivantes :

– La A-algèbre instable ΛV est un quotient de H^*V. On dispose en effet d'un isomorphisme canonique de A-algèbres instables $\Lambda V \cong \mathrm{H}^*V/\widetilde{\mathrm{P}}V\,\mathrm{H}^*V$.

– Par contre la A-algèbre instable $\mathrm{P}V$ n'est pas un quotient de H^*V car tout homomorphisme de A-algèbres instables de H^*V dans $\mathrm{P}V$ est trivial (se factorise à travers $\mathbb{F}_\ell$). On constate donc que l'isomorphisme canonique d'algèbres $\mathbb{N}$-graduées $\mathrm{H}^*V \cong \Lambda V \otimes \mathrm{P}V$ évoqué plus haut ne peut être un isomorphisme de A-algèbres instables.

Passons maintenant aux exemples promis.

Premier exemple. – On définit le complexe coaugmenté $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}X$ pour tout ℓ par les mêmes formules que pour $\ell = 2$. Le pendant dans le cas $\ell > 2$ du théorème 4.8 est le théorème suivant impliqué par [**2**, Theorem 8.5].

THÉORÈME 10.1 (Allday, Franz et Puppe). – *Soient ℓ un nombre premier impair, V un ℓ-groupe abélien élémentaire et X un V-CW-complexe fini.*

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *Le $\mathrm{P}V$-module sous-jacent à H^*_VX est libre.*
(ii) *Le complexe coaugmenté $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}}X$ est acyclique.*

Avant d'adapter la démonstration que nous avons donnée du théorème 4.8, commençons par faire l'observation suivante :

On a, pour tout H^*V-module $\mathbb{N}$-gradué M, un isomorphisme canonique

$$\Lambda V \otimes_{\mathrm{H}^*V} M \;\cong\; \mathbb{F}_\ell \otimes_{\mathrm{P}V} M$$

($\mathbb{F}_\ell$ étant un $\mathrm{P}V$-module via l'augmentation) et plus généralement

$$\mathrm{Tor}_p^{\mathrm{H}^*V}(\Lambda V, M) \;\cong\; \mathrm{Tor}_p^{\mathrm{P}V}(\mathbb{F}_\ell\, M)$$

pour tout entier naturel p.

Cette observation montre en particulier :

PROPOSITION 10.2. – *Soit M un H^*V-module $\mathbb{N}$-gradué. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *M est libre comme $\mathrm{P}V$-module ;*
(ii) $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{H}^*V}(\Lambda V, M) = 0$.

Pour adapter la démonstration que nous avons donnée de l'implication (ii)⇒(i) du théorème 4.8 il suffit de se convaincre de ce que l'on a

$$\mathrm{Tor}_p^{\mathrm{H}^*V}(\Lambda V, \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N) = 0$$

pour tout sous-groupe $W \subset V$ et tout H^*V/W-module $\mathbb{N}$-gradué N, sous l'hypothèse $p > \operatorname{codim} W$. Compte tenu de l'isomorphisme

$$\mathrm{Tor}_p^{\mathrm{H}^*V/W}(\Lambda(V/W), N) \;\cong\; \mathrm{Tor}_p^{\mathrm{P}(V/W)}(\mathbb{F}_\ell, N),$$

cette annulation résulte des deux points suivants :

– On a pour tout H^*V-module $\mathbb{N}$-gradué Q un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Tor}_p^{\mathrm{H}^*V}(Q, \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N) \;\cong\; \mathrm{Tor}_p^{\mathrm{H}^*V/W}(Q, N).$$

– En tant que H^*V/W-module $\mathbb{N}$-gradué, ΛV est isomorphe à une somme directe de suspensions (itérées) de $\Lambda(V/W)$.

Observons incidemment que la proposition 10.2 et les deux points ci-dessus donnent également :

Scholie 10.3. – *Soit N un H^*V/W-module $\mathbb{N}$-gradué. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *N est libre comme $\mathrm{P}(V/W)$-module ;*

(ii) *$\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} N$ est libre comme $\mathrm{P}V$-module.*

Passons maintenant à l'adaptation de la démonstration que nous avons donnée de l'implication (i)⇒(ii) du théorème 4.8. Cette démonstration se fait par récurrence sur la dimension de V et la clef de cette récurrence est la proposition 4.12 qui dit que si M est un H^*V-A-module instable libre comme H^*V-module alors, pour tout sous-groupe W de V, le H^*V/W-A-module instable $\mathrm{Fix}_{(V,W)}M$ est libre comme H^*V/W-module. La variante pour $\ell > 2$ de la proposition 4.12 est la suivante :

Proposition 10.4. – *Soient M un H^*V-A-module instable et W un sous-groupe de V ; si M est libre comme $\mathrm{P}V$-module, alors le H^*V/W-A-module instable $\mathrm{Fix}_{(V,W)}M$ est libre comme $\mathrm{P}(V/W)$-module.*

Démonstration. – C'est une variante de celle de la proposition 4.12. D'après le point (b) de 1.17 on dispose d'un isomorphisme de H^*V/W-A-modules instables

$$(*) \qquad \mathrm{Fix}_{(V,W)}\,\mathrm{Tor}_p^{\mathrm{H}^*V}(Q, M) \;\cong\; \mathrm{Tor}_p^{\mathrm{H}^*V/W}(\mathrm{Fix}_{(V,W)}Q, \mathrm{Fix}_{(V,W)}M)$$

pour tout H^*V-A-module instable Q et tout entier naturel p.

On prend $Q = \mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \Lambda(V/W)$ et $p = 1$. Le corollaire 1.26 dit que le H^*V/W-A-module instable $\mathrm{Fix}_{(V,W)}(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \Lambda(V/W))$ est isomorphe au H^*V/W-A-module instable $\Lambda(V/W)$. Compte tenu de la proposition 10.2, il faut montrer que le premier membre de l'isomorphisme (*) est nul pour notre choix de Q et de p. En fait le H^*V-A-module instable $\mathrm{Tor}_p^{\mathrm{H}^*V}(Q, M)$ est nul pour $p > 0$. Pour s'en convaincre on invoque à nouveau le fait que l'on a, pour tout H^*V-module $\mathbb{N}$-gradué

M et tout entier naturel p, des isomorphismes canoniques (disons de $\mathbb{F}_\ell$-espaces vectoriels $\mathbb{N}$-gradués)

$$\mathrm{Tor}_p^{\mathrm{H}^*V}(\mathrm{H}^*V \otimes_{\mathrm{H}^*V/W} \Lambda(V/W), M) \cong \mathrm{Tor}_p^{\mathrm{H}^*V/W}(\Lambda(V/W), M).$$

Remarque 10.5. – Allday, Franz et Puppe montrent dans **[2]** que l'on ne peut pas remplacer « libre comme PV-module » par « libre comme H^*V-module » dans la condition (i) du théorème 10.1. Pour cela ils considèrent, à la toute fin de leur article, l'exemple $X = \Sigma V$ avec $V = \mathbb{Z}/\ell$ (ΣV désignant la suspension de V vu comme un espace discret, munie de l'action évidente du groupe V) et constatent que $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}} X$ est acyclique alors que $\mathrm{H}^*_V X$ n'est pas libre comme H^*V-module.

Deuxième exemple. – On s'intéresse maintenant à l'énoncé 9.3. La version $\ell > 2$ de cet énoncé est la suivante :

Proposition 10.6. – *Soit M un* H^*V-A-*module instable qui est de type fini comme* H^*V-*module. La filtration de M définie en termes des foncteurs* Fix *et la filtration par la codimension du support du* PV-*module sous-jacent coïncident (en tant que filtrations par des sous-*PV-*modules).*

Précision et remarque. – – La filtration de M « définie en termes des foncteurs Fix » mentionnée ci-dessus est définie par les mêmes formules que dans le cas $\ell = 2$.

– Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) M est de type fini comme H^*V-module ;

(ii) M est de type fini comme PV-module.

La démonstration de la proposition 10.6 est *mutatis mutandis* la même que celle de la proposition 9.3 (rappelons que nous avons exposé la théorie des foncteurs Fix en section 1 et celle des $\mathcal{U}$-injectifs en section 2 sans restriction sur ℓ).

Troisième exemple. – Nous avons dégagé dans la sous-section 8.2 quelques points d'algèbre homologique concernant la catégorie abélienne $\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$ des foncteurs définis sur l'ensemble ordonné $\mathcal{W}$ des sous-groupes de V (vu comme une catégorie) et à valeurs dans la catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels. La sous-section 8.2 s'appuie sur la sous-section 8.1 dans laquelle nous avons supposé $\ell = 2$ pour ne pas avoir à nous préoccuper du signe qui apparaît dans la définition du décalage d'un complexe... mais ce signe disparaît quand on prend l'homologie si bien que l'on peut supposer ℓ arbitraire. La sous-section 8.2 sert essentiellement à la construction dans la sous-section 8.4 d'un bicomplexe $\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}M$ (définition 8.42) associé à tout H^*V-A-module instable M, bicomplexe qui joue un rôle crucial dans la démonstration de l'implication (iii)$\Rightarrow$(i) du théorème 5.20. Les propriétés de $\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}M$ (sous l'hypothèse M de type fini comme H^*V-module) listées dans la proposition 5.31 sont vérifiées après la définition 8.42. Pour $\ell > 2$ on doit remplacer dans l'énoncé de la propriété $(\mathcal{B}_2)$ (la dernière de la liste évoquée ci-dessus) « H^*V/W-module libre » par « $\mathrm{P}(V/W)$-module libre » (resp. « H^*V-module libre » par « PV-module libre ») ; pour sa vérification on peut invoquer la proposition 10.4 et l'implication (i)$\Rightarrow$(ii) du scholie 10.3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. ALLDAY, M. FRANZ & V. PUPPE – « Equivariant cohomology, syzygies and orbit structure », *Trans. Amer. Math. Soc.* **366** (2014), p. 6567–6589.

[2] ———, « Syzygies in equivariant cohomology in positive characteristic », *Forum Math.* **33** (2021), p. 547–567.

[3] M. K. ATIYAH & I. G. MACDONALD – *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, 1969.

[4] A. A. BEĬLINSON, J. BERNSTEIN & P. DELIGNE – « Faisceaux pervers », in *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, 1982, p. 5–171.

[5] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique*, Masson, 1980, Algèbre. Chapitre 10. Algèbre homologique.

[6] ———, *Éléments de mathématique*, Masson, 1998, Algèbre commutative. Chapitre 10, Profondeur, régularité, dualité.

[7] ———, *Éléments de mathématique. Algèbre commutative. Chapitres 8 et 9*, Springer, 2006, Reprint of the 1983 original.

[8] D. BOURGUIBA, S. HAMMOUDA & S. ZARATI – « Profondeur et cohomologie équivariante », in *Trends in African diaspora mathematics research*, Nova Sci. Publ., Huntington, NY, 2007, p. 11–21.

[9] D. BOURGUIBA & S. ZARATI – « Depth and the Steenrod algebra », *Invent. math.* **128** (1997), p. 589–602.

[10] M. P. BRODMANN & R. Y. SHARP – *Local cohomology*, second éd., Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 136, Cambridge Univ. Press, 2013.

[11] W. BRUNS & J. HERZOG – *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 39, Cambridge Univ. Press, 1993.

[12] V. M. BUCHSTABER & T. E. PANOV – *Torus actions and their applications in topology and combinatorics*, University Lecture Series, vol. 24, Amer. Math. Soc., 2002.

[13] H. Cartan & S. Eilenberg – *Homological algebra*, Princeton Univ. Press, 1956.

[14] M. W. Davis & T. Januszkiewicz – « Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions », *Duke Math. J.* **62** (1991), p. 417–451.

[15] T. tom Dieck – *Transformation groups*, De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 8, Walter de Gruyter & Co., 1987.

[16] W. G. Dwyer & C. W. Wilkerson – « Smith theory and the functor T », *Comment. Math. Helv.* **66** (1991), p. 1–17.

[17] J. Folkman – « The homology groups of a lattice », *J. Math. Mech.* **15** (1966), p. 631–636.

[18] P. Gabriel – « Des catégories abéliennes », *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), p. 323–448.

[19] N. D. H. Hai – « Stanley-Reisner rings and the occurrence of the Steinberg representation in the hit problem », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **360** (2022), p. 1009–1026.

[20] N. D. H. Hai, L. Schwartz & T. N. Nam – « La fonction génératrice de Minc et une "conjecture de Segal" pour certains spectres de Thom », *Adv. Math.* **225** (2010), p. 1431–1460.

[21] R. Hartshorne – *Local cohomology*, Lecture Notes in Math., vol. 41, Springer, 1967.

[22] A. Hatcher – *Algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, 2002.

[23] H.-W. Henn – « Commutative algebra of unstable K-modules, Lannes' T-functor and equivariant mod-p cohomology », *J. reine angew. Math.* **478** (1996), p. 189–215.

[24] ______, « Centralizers of elementary abelian p-subgroups, the Borel construction of the singular locus and applications to the cohomology of discrete groups », *Topology* **36** (1997), p. 271–286.

[25] H.-W. Henn, J. Lannes & L. Schwartz – « The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects », *Amer. J. Math.* **115** (1993), p. 1053–1106.

[26] S. Illman – « Smooth equivariant triangulations of G-manifolds for G a finite group », *Math. Ann.* **233** (1978), p. 199–220.

[27] M. Inoue – « $\mathscr{A}$-generators of the cohomology of the Steinberg summand $M(n)$ », in *Recent progress in homotopy theory (Baltimore, MD, 2000)*, Contemp. Math., vol. 293, Amer. Math. Soc., 2002, p. 125–139.

[28] B. Iversen – *Cohomology of sheaves*, Universitext, Springer, 1986.

[29] S. Jackowski & J. McClure – « Homotopy decomposition of classifying spaces via elementary abelian subgroups », *Topology* **31** (1992), p. 113–132.

[30] P. S. Landweber & R. E. Stong – « The depth of rings of invariants over finite fields », in *Number theory (New York, 1984–1985)*, Lecture Notes in Math., vol. 1240, Springer, 1987, p. 259–274.

[31] J. Lannes – « Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **75** (1992), p. 135–244.

[32] J. Lannes & S. Zarati – « Sur les $\mathscr{U}$-injectifs », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **19** (1986), p. 303–333.

[33] ———, « Théorie de Smith algébrique et classification des H^*V-$\mathscr{U}$-injectifs », *Bull. Soc. Math. France* **123** (1995), p. 189–223.

[34] ———, « Tor- et Ext-dimensions des H^*V-A-modules instables qui sont de type fini comme H^*V-modules », in *Algebraic topology : new trends in localization and periodicity (Sant Feliu de Guíxols, 1994)*, Progr. Math., vol. 136, Birkhäuser, 1996, p. 241–253.

[35] A. T. Lundell & S. Weingram – *The topology of CW complexes*, The University Series in Higher Mathematics, Van Nostrand Reinhold Co., 1969.

[36] G. Lusztig – *The discrete series of GL_n over a finite field*, Annals of Math. Studies, No. 81, Princeton Univ. Press ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974.

[37] S. Mac Lane – *Categories for the working mathematician*, second éd., Graduate Texts in Math., vol. 5, Springer, 1998.

[38] B. Oliver – « Higher limits via Steinberg representations », *Comm. Algebra* **22** (1994), p. 1381–1393.

[39] D. Quillen – « The spectrum of an equivariant cohomology ring. I, II », *Ann. of Math.* **94** (1971), p. 549–572, 573–602.

[40] J-P. Serre – « Sur la dimension cohomologique des groupes profinis », *Topology* **3** (1965), p. 413–420.

[41] C. A. Weibel – *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 38, Cambridge Univ. Press, 1994.

[42] O. Zariski & P. Samuel – *Commutative algebra, Volume I*, The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand Co., 1958.

INDEX

A, l'algèbre de Steenrod modulo 2, x
A-module instable, x
$\mathrm{B}^{\bullet,\bullet}M$, 56, 121
codim W, la dimension de V/W, ix
$\mathrm{Ch}^{\geq 0}(\mathcal{A})$, la catégorie des complexes de cochaînes dont les termes sont des objets de la catégorie abélienne $\mathcal{A}$, 59
$\mathrm{C}^{\bullet}M$, le complexe de cochaines associé au H^*V-A-module instable M, xii
$\mathrm{C}^{\bullet}_{\mathrm{utop}}X$, 64
$\mathrm{C}^{\bullet}_{\mathrm{top}}X$, le complexe topologique, x
$\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}M$, le complexe coaugmenté de cochaines associé au H^*V-A-module instable M, xii
$\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{alg}}X$, le complexe algébrique coaugmenté, xii
$\widetilde{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{top}}X$, le complexe topologique coaugmenté, x
$\mathrm{dp}_V M$, la dimension projective du H^*V-module M, 28
$\mathcal{E}$, la catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels, xvi
$\mathcal{E}^{\mathcal{W}}$, la catégorie des foncteurs définis sur $\mathcal{W}$ et à valeurs dans $\mathcal{E}$, xvi
e-fini, 47
$\mathrm{EFix}_{(V,W)}$, 4
$\mathrm{Fix}_{(V,W)}$, xi, 1
$\mathrm{H}^*(V;\mathbb{F}_2) = \mathrm{H}^*V$, la cohomologie modulo 2 du groupe V , x
H^*_c, la cohomologie modulo 2 à support compact, xiii
$\mathrm{H}^*_V(-;\mathbb{F}_2) = \mathrm{H}^*_V(-)$, la cohomologie V-équivariante modulo 2, x
$\mathrm{J}_V(k)$, 15
ℓ, un nombre premier, ℓ est arbitraire dans les sections 1, 2 et 10, $\ell = 2$ dans toutes les autres sections, x
$\mathrm{M}(V,h)$, xiv
$\eta_{(V,W)}$, xii
$\mathrm{Pf}_V M$, la « partie finie » du H^*V-module M, xii
Ψ_M, 23
$\widehat{\Psi}_M$, 25, 81, 117
$\mathrm{R}^p\mathrm{Pf}_{V/W}$, le p-ième foncteur dérivé à droite de l'endofoncteur $\mathrm{Pf}_{V/W}$, xii
$\Sigma^s E$, la suspension s-ième de E, x
$\mathrm{Sing}_V X$, « partie singulière » de l'action de V sur X, ix
St_V, représentation de Steinberg modulo 2 de $\mathrm{GL}(V)$, 86, 100
St^*_V, $\mathbb{F}_2[\mathrm{GL}(V)]$-module à droite dual de St_V, xiv
H^*V-j-syzygie, xiv
$(V_{\mathrm{tf}}$-$\mathcal{U})$-j-syzygie, xv
$\tau_V(M)$, 29
$\mathcal{U}$, la catégorie des A-modules instables, xi
V, un 2-groupe abélien élémentaire, ix
V-$\mathcal{U}$, la catégorie des H^*V-A-modules instables, xi
V_{tf}-$\mathcal{U}$, la sous-catégorie de V-$\mathcal{U}$ dont les objets sont de type fini comme H^*V-modules, xi
$\mathcal{W}$, l'ensemble ordonné par inclusion des sous-espaces W de V, xvi

Série MÉMOIRES DE LA S.M.F.

2024

180. J. FRAHM – *Conformally invariant differential operators on Heisenberg groups and minimal representations*

2023

179. D. CALAQUE & M. GONZALEZ – *Ellipsitomic associators*
178. G. LELLOUCH – *Sur les ensembles de rotation des homéomorphismes de surface de genre ≥ 2*
177. C. ARHANCET & C. KRIEGLER – *Projections, multipliers and decomposable maps on noncommutative L^p-spaces*
176. É. GAUDRON & G. RÉMOND – *Nouveaux théorèmes d'isogénie*

2022

175. R. OLLIVIER & P. SCHNEIDER – *On the pro-p Iwahori Hecke Ext-algebra of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$*
174. R. CARLES & C. CHEVERRY – *Constructive and destructive interferences in nonlinear hyperbolic equations*
173. C. PARK & Z. QIAN – *On mod p local-global compatibility for $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$ in the ordinary case*
172. L. BIGORGNE – *Asymptotic properties of small data solutions of the Vlasov-Maxwell system in high dimensions*

2021

171. K. COULIBALY-PASQUIER & L. MICLO – *On the evolution by duality of domains on manifolds*
170. A. ARABIA – *Espaces de configuration généralisés. Espaces topologiques i-acycliques. Suites spectrales basiques*
169. C. ERIGNOU – *Hydrodynamic limit for an active exclusion process*
168. V. A. DOLGUSHEV – *Stable Formality Quasi-isomorphisms for Hochschild Cochains*

2020

167. D. BENOIS – *p-adic height and p-adic Hodge theory*
166. Y. ALMOG & B. HELFFER – *The spectrum of a Schrödinger operator in a wire-like domain with a purely imaginary degenerate potential in the semiclassical limit*
165. D. ARA & G. MALTSINIOTIS – *Joint et tranches pour les ∞-catégories strictes*
164. S. GHAZOUANI & L. PIRIO – *Moduli spaces of flat tori and elliptic hypergeometric functions*

2019

163. D. XU – *Lifting the Cartier transform of Ogus-Vologodsky module p^n*
162. J.-H. CHIENG, C.-Y. HSIAO & I-H. TSAI – *Heat kernel asymptotics, local index theorem and trace integrals for Cauchy-Riemann manifolds with S^1 action*
161. F. JAUBERTEAU, Y. ROLLIN & S. TAPIE – *Discrete geometry and isotropic surfaces*
160. P. VIDOTTO – *Ergodic properties of some negatively curved manifolds with infinite measure*

2018

159. L. POSITSELSKI – *Weakly curved A_∞-algebras over a topological local ring*
158. T. LUPU – *Poisson ensembles of loops of one-dimensional diffusions*
157. M. SPITZWECK – *A commutative $\mathbb{P}^1$-spectrum representing motivic cohomology over Dedekind domains*
156. C. SABBAH – *Irregular Hodge Theory*

2017

155. Y. DING – *Formes modulaires p-adiques sur les courbes de Shimura unitaires et compatibilité local-global*
154. G. MASSUYEAU, V. TURAEV – *Brackets in the Pontryagin algebras of manifolds*
153. M.P. GUALDANI, S. MISCHLER, C. MOUHOT – *Factorization of non-symmetric operators and exponential H-theorem*
152. M. MACULAN – *Diophantine applications of geometric invariant theory*
151. T. SCHOENEBERG – *Semisimple Lie algebras and their classification over $\mathfrak{p}$-adic fields*
150. P.G. LE FLOCH , Y. MA – *The mathematical validity of the $f(R)$ theory of modified gravity*

2016

149. R. BEUZART-PLESSIS – *La conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées des groupes unitaires*
148. M. MOKHTAR-KHARROUBI – *Compactness properties of perturbed sub-stochastic C_0-semigroups on $L^1(\mu)$ with applications to discreteness and spectral gaps*
147. Y. CHITOUR, P. KOKKONEN – *Rolling of manifolds and controllability in dimension three*
146. N. KARALIOLIOS – *Global aspects of the reducibility of quasiperiodic cocycles in compact Lie groups*
145. V. BONNAILLIE-NOËL, M. DAUGE, N. POPOFF – *Ground state energy of the magnetic Laplacian on corner domains*
144. P. AUSCHER, S. STAHLHUT – *Functional calculus for first order systems of Dirac type and boundary value problems*

2015

143. R. DANCHIN, P.B. MUCHA – *Critical functional framework and maximal regularity in action on systems of incompressible flows*
142. J. AYOUB – *Motifs des variétés analytiques rigides*
140/141. Y. LU, B. TEXIER – *A stability criterion for high-frequency oscillations*

2014

138/139. T. MOCHIZUKI – *Holonomic D-modules with Betti structures*
137. P. SEIDEL – *Abstract analogues of flux as symplectic invariants*
136. J. SJÖSTRAND – *Weyl law for semi-classical resonances with randomly perturbed potentials*

2013

135. L. PRELLI – *Microlocalization of subanalytic sheaves*
134. P. BERGER – *Persistence of stratification of normally expanded laminations*
133. L. DESIDERI – *Problème de Plateau, équations fuchsiennes et problème de Riemann Hilbert*
132. X. BRESSAUD, N. FOURNIER – *One-dimensional general forest fire processes*

2012

130/131. Y. NAKKAJIMA – *Weight filtration and slope filtration on the rigid cohomology of a variety in characteristic $p > 0$*
129. W. A STEINMETZ-ZIKESCH – *Algèbres de Lie de dimension infinie et théorie de la descente*
128. D. DOLGOPYAT – *Repulsion from resonances*

2011

127. B. LE STUM – *The overconvergent site*
125/126. J. BERTIN, M. ROMAGNY – *Champs de Hurwitz*
124. G. HENNIART, B. LEMAIRE – *Changement de base et induction automorphe pour GL_n en caractéristique non nulle*

Mémoires de la S.M.F.

Instructions aux auteurs / *Instructions to Authors*

Les *Mémoires* de la SMF publient, en français ou en anglais, des articles longs de recherche ou des monographies de la plus grande qualité qui font au moins 80 pages. Les *Mémoires* sont le supplément du *Bulletin* de la SMF et couvrent l'ensemble des mathématiques. Son comité de rédaction est commun avec celui du *Bulletin*.
Le manuscrit doit être envoyé au format pdf au comité de rédaction, à l'adresse électronique `memoires@smf.emath.fr` Les articles acceptés doivent être composés en LaTeXavec la classe `smfart` ou `smfbook`, disponible sur le site de la SMF `http://smf.emath.fr/` ou avec toute classe standard.

In the Mémoires of the SMF are published, in French or in English, long research articles or monographs of the highest mathematical quality, that are at least 80 pages long. Articles in all areas of mathematics are considered. The Mémoires are the supplement of the Bulletin of the SMF. They share the same editorial board.
The manuscript must be sent in pdf format to the editorial board to the email address `memoires@smf.emath.fr`*. The accepted articles must be composed in LaTeXwith the* `smfart` *or the* `smfbook` *class available on the SMF website* `http://smf.emath.fr/` *or with any standard class.*

Soient V un 2-groupe abélien élémentaire et X un V-CW-complexe fini

Dans ce mémoire nous étudions deux complexes de modules sur A, l'algèbre de Steenrod modulo 2, munis d'une action compatible de H^*V, la cohomologie modulo 2 de V, complexes tous deux associés à X. Le premier, que nous appelons le « complexe topologique », est défini à l'aide de la filtration par les orbites de X. Le second, que nous appelons le « complexe algébrique », est défini en termes de la structure de H^*V-A-module instable dont est munie $\mathrm{H}^*_V X$, la cohomologie modulo 2 équivariante de X (ce qui signifie que nous pouvons remplacer dans cette définition $\mathrm{H}^*_V X$ par un H^*V-A-module instable arbitraire). Ces deux complexes sont de longeur $\dim_{\mathbb{Z}/2} V$ et peuvent être coaugmentés par $\mathrm{H}^*_V X$; nous construisons en outre un morphisme κ du complexe algébrique vers le complexe topologique compatible avec la coaugmentation.

Nous montrons en particulier que ces deux complexes coaugmentés sont acycliques si et seulement si $\mathrm{H}^*_V X$ est libre comme H^*V-module. Dans ce cas κ est un isomorphisme.

Let V be an elementary abelian 2-group and X be a finite V-CW-complex.

In this memoir we study two cochain complexes of modules over the mod2 *Steenrod algebra* A *equipped with a compatible action of* H^*V*, the* mod 2 *cohomology of V, both associated with X. The first, which we call the "topological complex," is defined using the orbit filtration of X. The second, which we call the "algebraic complex," is defined in terms of the unstable* H^*V-A-*module structure of* $\mathrm{H}^*_V X$*, the* mod2 *equivariant cohomology of X (which means that we can replace, in the definition of the algebraic complex,* $\mathrm{H}^*_V X$ *with any unstable* H^*V-A-*module). Both complexes are of length* $\dim_{\mathbb{Z}/2} V$ *and can be coaugmented over* $\mathrm{H}^*_V X$*; furthermore we construct a morphism κ from the algebraic complex into the topological complex, compatible with the coaugmentation.*

We show in particular that both coaugmented complexes are acyclic if and only if $\mathrm{H}^*_V X$ *is free as an* H^*V*-module. In this case κ is an isomorphism.*