

**DU RÔLE DE L'ENSEIGNEMENT DANS LA RECHERCHE
D'UN UNIVERSITAIRE MATHÉMATICIEN
SOUS LA TROISIÈME RÉPUBLIQUE :
LE CAS DE L'AXIOMATISATION DES PROBABILITÉS
DE MAURICE FRÉCHET (1929–1930)**

Matthias Cléry

Résumé. — Lors de son cours de l'année 1929–1930 à la chaire de calcul des probabilités et physique mathématique à Paris, Maurice Fréchet propose une axiomatisation des probabilités mobilisant le concept de fonction additive d'ensembles sur des familles additives d'ensembles. Cet article analyse les conditions (institutionnelles, pédagogiques et mathématiques) qui président à la formulation de cette axiomatisation et y met en évidence la participation conjointe et étroite de l'enseignement et de la recherche.

Abstract (The Role of Teaching in the Research of a Mathematical Scholar During the Third Republic: The Case of Maurice Fréchet's Axiomatization of Probability (1929–1930))

During his 1929–1930 course at the Chair of Probability Calculus and Mathematical Physics in Paris, Maurice Fréchet proposed an axiomatisation of probability using the concept of additive functions of sets on additive families of sets. This article analyses the conditions (institutional, pedagogical and mathematical) that led to the formulation of this axiomatisation and highlights the close and joint involvement of teaching and research.

Article reçu le 28 mars 2024, revision reçue le 6 novembre 2025, accepté pour publication le 19 décembre 2025.

M. Cléry, (1) Comité pour l'histoire du CNRS, CNRS ; (2) IDHES-Paris 8.

Courrier électronique : `matthias.clery@cnrs.fr`

Classification mathématique par sujets (2010) : 01A60, 60A05, 97–03.

Mots clefs : Axiomes de la théorie des probabilités, Maurice Fréchet, mathématiques du xx^e siècle, Institut Henri Poincaré, faculté des sciences de Paris, additivité dénombrable.

Key words and phrases. — Axioms of probability theory, Maurice Fréchet, 20th century mathematic, Institut Henri Poincaré, faculté des sciences de Paris, finitely enumerable additivity.

INTRODUCTION

Lors de son cours à la chaire de calcul des probabilités et de physique mathématiques (CPPM) de l'année universitaire 1929–1930, Maurice Fréchet (1878–1973) présente une axiomatisation des probabilités. Dès 1920, il avait consacré ponctuellement des enseignements de probabilité sans y proposer d'axiomatisation. Nommé maître de conférences à la chaire de CPPM le 23 octobre 1928 (AN¹, F/17/25320) dans le tout nouvel Institut Henri Poincaré (IHP), créé le 9 juillet (AN, 20010498/130), il présente cette axiomatisation dans un cours profondément remanié. De plus, il la présente à ses étudiants à la veille de débats internationaux sur ce sujet à l'IHP, avec les conférences de Richard von Mises (1883–1953) en 1931, de Francesco Paolo Cantelli (1875–1966) en 1933 et de Bruno de Finetti (1906–1985) en 1935. Fréchet exerça en outre une influence sur l'axiomatisation des probabilités, aujourd'hui considérée comme définitive, et élaborée par Andreï A. Kolmogorov (1903–1987) en 1933 [Kolmogorov 1933; Shafer & Vovk 2006a]. Finalement, dans son premier fascicule du *Traité du calcul des probabilités* de 1937 [Fréchet 1937], il se distancie de toutes ces tentatives et reprend celle présentée en 1929 qui n'avait jusqu'alors jamais été publiée. Si les axiomatisations, notamment celles de von Mises, Finetti et Kolmogorov, ont déjà été étudiées en détail², il n'en est pas de même pour celle que Fréchet proposa dans son cours de 1929, laissant donc en suspens une série d'interrogations : pourquoi Fréchet propose-t-il une axiomatisation des probabilités? Pourquoi dans un cours, à la chaire de CPPM et en 1929? Comment envisage-t-il l'axiomatisation des probabilités? Et, finalement, comment Fréchet axiomatise-t-il les probabilités?

Pour identifier et analyser les conditions qui président à la formulation de Fréchet de cette axiomatisation dans le cadre de son enseignement à la chaire de CPPM, je me suis inspiré de l'appel lancé par Bruno Belhoste [Belhoste 1998a] « pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques »³. Produite dans le contexte d'un cours, il

¹ Archives nationales.

² Voir par exemple [von Plato 1994; Shafer & Vovk 2006a; Siegmund-Schultze 2004b] ainsi que [Verburgt 2015, 414–468] pour une présentation de ces axiomatisations ou les débats qu'elles suscitèrent.

³ Cet appel a reçu de nombreuses réponses comme le montre par exemple la préface de [Gispert 2015] et la bibliographie *infra*. À l'échelle internationale, on peut également mentionner [Warwick 2003] sur le cas de la physique mathématique à Cambridge ou [Kaiser 2005] sur les relations entre enseignement et pratique scientifique.

s'agit de comprendre comment l'enseignement et la recherche participent de cette définition axiomatique, et ainsi dépasser « l'idée fausse que la production mathématique peut être séparée *a priori* par l'historien [ou l'historienne] des conditions de sa reproduction » [Belhoste 1998a, p. 289] ; en particulier, pour l'axiomatisation de Fréchet, la condition de reproduction de son axiomatisation est précisément celle de sa production. J'ai donc mené mes recherches suivant trois axes.

Tout d'abord, il s'agit d'identifier la place qu'occupe la chaire de CPPM dans l'espace universitaire et dans la carrière de Fréchet. Sous la Troisième République, un nouveau système universitaire est mis en place par une série de réformes menées entre 1880 et 1904⁴. Ces réformes visent notamment à faire des facultés des sciences des lieux de recherches scientifiques, tout en maintenant leur mission de formation intellectuelle des aspirants à l'enseignement secondaire. Dans ces circonstances, l'enseignement reste le principal facteur structurant le champ mathématique universitaire et les carrières qui s'y tracent. Après avoir caractérisé la singularité de la chaire de CPPM au sein du système universitaire mathématique, l'analyse des mécanismes de sélection qui permettent à Fréchet d'y accéder rend compte des dispositions acquises dans sa trajectoire qui en font un candidat de premier rang pour cette chaire. La rencontre entre Fréchet et cette chaire définit un espace des possibles dans lequel se situe son axiomatisation des probabilités.

Ensuite, comme le rappelle Belhoste [Belhoste 1998a, p. 295], l'activité scientifique et professorale des universitaires mathématiciens est aussi régulée par des représentations. Il s'agit alors de comprendre comment Fréchet conçoit et oriente son activité mathématique, dans sa recherche et son enseignement. Il s'avère que sa nomination à Strasbourg⁵ l'encourage à expliciter sa conception de la recherche et de l'enseignement, et en particulier le rôle de l'axiomatisation dans l'une et l'autre. En outre, à Strasbourg, Fréchet engage une réorientation de son activité universitaire vers le calcul des probabilités [Fréchet & Halbwachs 2019] en en faisant un sujet d'enseignement et de recherches mathématiques. Fréchet s'engage dans les probabilités en s'enracinant dans les applications mais en se dirigeant vers la théorie qui, suite à sa nomination à l'IHP et son cours de 1929, prend nettement le dessus.

⁴ Sur l'université mise en place sous la Troisième République, on peut consulter notamment [Luc et al. 2020] et les références *infra* ; pour les mathématiques, voir [Gispert 1989a] et [Gispert 2015].

⁵ Sur Fréchet à l'université de Strasbourg, voir notamment [Mazliak 2010a ; Siegmund-Schultze 2005a].

Il reste alors à comprendre comment Fréchet met en pratique ces représentations à la chaire de calcul des probabilités pour formuler cette définition axiomatique des probabilités. Comme le rappelle Belhoste, « compte tenu du rôle joué par l'activité didactique dans le champ disciplinaire des mathématiques, on ne s'étonnera pas de voir les pratiques d'enseignement agir sur et interférer avec les pratiques de recherches » [Belhoste 1998a, p. 298]. En dépliant l'axiomatisation des probabilités formulée par Fréchet au premier semestre de l'année 1929–1930, il s'agit de mettre en lumière comment il met en pratique sa conception du lien entre enseignement et recherche et comment intervient l'axiomatisation. Mise ainsi à plat, cette axiomatisation témoigne de l'importante porosité dans l'activité mathématique de Fréchet entre enseignement et recherche qu'il s'agit de caractériser. Enfin, c'est aussi par la pratique de l'enseignement qu'une telle axiomatisation est susceptible d'opérer une transformation des représentations au sein du champ probabiliste sur le temps long; transformations que j'esquisse brièvement.

1. L'ACCÈS À LA SINGULIÈRE CHAIRE DE CPPM : L'EXPÉRIENCE DE FRÉCHET DE LA MÉCANIQUE DU CHAMP UNIVERSITAIRE MATHÉMATIQUE FRANÇAIS

La chaire de CPPM occupe une place unique dans le champ universitaire mathématique français au cours de l'entre-deux-guerres et plus encore suite à la création de l'IHP en 1928. Sa position singulière au sein de l'institution tient à la spécificité de son enseignement portant sur l'actualité de la recherche probabiliste internationale. Dans ces circonstances, l'accès à la maîtrise de conférences de CPPM est le produit d'un processus de sélection dont Maurice Fréchet sort comme l'incontestable candidat idéal par ses qualités d'enseignant et par les dispositions sociales qu'il a acquises au cours de sa trajectoire universitaire.

1.1. *Une chaire unique au sein des universités de la Troisième République : un enseignement de la recherche probabiliste internationale (1928–1939)*

Cantonnées à la collation des grades et à leur préparation pendant le XIX^e siècle, les facultés des sciences sont dotées d'une mission de recherche par des réformes universitaires au tournant du XX^e siècle. Impulsées par le ministre de l'Instruction publique Jules Ferry (1832–1893)

dans une circulaire du 8 mai 1880 [de Beauchamp 1884, p. 461], réclamant que seules les thèses présentant des faits scientifiques nouveaux soient autorisées à être soutenues, la mission de recherche des facultés est mise sur les épaules des professeurs dans une circulaire du 18 février 1883. Le ministre Jules Duvaux (1827–1902) y rappelle que, outre la préparation aux grades, les professeurs « ont d'autres obligations envers l'État » : faire de la recherche et former à la recherche [de Beauchamp 1884, p. 705–706]. Laisseée d'abord à l'initiative des professeurs, l'arrêté du 18 juin 1904 [Généres 1909, p. 615–616] instituant des diplômes d'études supérieures dans les facultés des sciences tente d'encadrer cette formation à la recherche, ce qui, dans le cas des mathématiques, est réduit à l'obtention d'un certificat d'études supérieures de géométrie supérieure, d'analyse supérieure, de mécanique céleste, de mécanique physique et expérimentale ou enfin de physique mathématique (devenu à Paris en 1926, calcul des probabilités et physique mathématique).

Cet arrêté de 1904 cristallise vraisemblablement un état de fait depuis (au moins) la réforme de la licence ès sciences de 1896⁶. Le décret du 22 janvier 1896 [Généres 1898, p. 556–557] modifie la collation de ce grade désormais délivré après l'obtention de trois certificats d'études supérieures librement choisis par l'étudiant, sauf pour les aspirants aux fonctions de l'enseignement secondaire public qui, en mathématique, sont limités aux certificats de calcul différentiel et intégral, de mécanique rationnelle, d'astronomie ou un autre de l'ordre des sciences mathématiques. L'arrêté de 1904 fixe ainsi une hiérarchie entre des certificats de licence et des certificats de doctorat qui s'instaure dans les facultés, surtout à Paris, et les enseignements qui y sont faits ; une distinction dont témoigne, par exemple, Henri Lebesgue lors du conseil de faculté du 24 janvier 1920 :

M. Lebesgue pense qu'on doit distinguer entre l'enseignement des mathématiques fait en vue de la licence et l'enseignement fait en vue du doctorat. [...] Ce n'est [...] que dans 2 ou 3 chaires qu'on s'occupe de mathématiques vivantes, qu'on apprend à travailler, qu'on enseigne des sujets qui peuvent fournir matière à des thèses. (AN AJ/16/5123, p. 293–294)

Cette hiérarchie des enseignements mathématiques contribue à une hiérarchie entre les facultés des sciences en France. Par exemple, lorsque Fréchet est nommé à Rennes (1908) puis à Poitiers (1909), ces facultés ne comptent que deux chaires de mathématiques (calcul différentiel et intégral et mécanique rationnelle). Faute d'un autre enseignement de

⁶ Sur la licence ès sciences, on pourra consulter [Verschuieren 2023]

mathématique régulier, la formation mathématique y est incomplète, même pour la licence. Nommé à Strasbourg en 1918, cette université se distingue rapidement des autres universités de province par sa dotation⁷ : avec 3 maîtrises de conférences et 5 chaires couvrant un enseignement mathématique de service (mathématiques générales), les trois enseignements de licence (calcul différentiel et intégral, mécanique rationnelle, astronomie) et un enseignement de recherche (analyse supérieure), l'université de Strasbourg se place devant Bordeaux (6 chaires), Toulouse (4 chaires, 1 maîtrise de conférences, 1 chargé de cours), Lille (3 chaires, 2 maîtrises de conférences) ou encore Nancy (3 chaires, 1 chargé de cours) (*Annuaire de l'Instruction publique*, 1922). Mais elle reste incomparable avec celle de Paris qui compte 9 chaires (dont celle de CPPM), 6 maîtrises de conférences et 1 chargé de cours en 1922, permettant d'offrir une formation complète de licence et de recherche.

La chaire de CPPM s'inscrit ainsi dans l'espace universitaire français comme une chaire d'enseignement à la recherche ; une caractéristique que la création de l'IHP en 1928 aiguise. Cet institut de faculté, dont la création fut impulsée en 1926 par Borel dans le but de développer conjointement l'enseignement et la recherche en calcul des probabilités, est doté de moyens pour animer une dynamique dans ce domaine. Il obtient le financement d'un poste supplémentaire pour cette chaire dont la création est motivée par le fait que « les meilleurs scientifiques, qui n'accordent aujourd'hui qu'un tiers, voire moins à la recherche ou à la direction des recherches d'étudiants [...] pourraient accorder tout leur temps si une chaire leur était attribuée » [Siegmond-Schultze 2001, p. 254]. L'enjeu est ainsi d'ouvrir des postes permettant à son titulaire de consacrer son temps, personnel et pédagogique, à la recherche. En outre, l'IHP est doté de moyens financiers pour organiser des conférences pensées et réalisées comme des vecteurs de communications internationales : l'institut de faculté devient ainsi un centre probabiliste international. Ces conférences s'adressent aux scientifiques et aux étudiants qui s'y voient préparés par les enseignements de la chaire de CPPM. Finalement, la chaire de CPPM se voit ainsi dotée d'une mission de recherche renforcée et internationalisée dans un domaine, les probabilités, en étroite association avec l'enseignement [Cléry 2020].

Unique en son genre, la chaire de CPPM, comme les autres chaires d'enseignement de la recherche mathématique, nombreuses à Paris mais rares

⁷ Sur l'université de Strasbourg, voir Crawford & Olff-Nathan [2005] ; Olivier-Utard [2005 ; 2010a ; 2015].

dans les facultés de province, sont accessibles après un processus de sélection qui, comme le montre le cas de Fréchet, fait intervenir continuellement l'enseignement.

1.2. L'enseignement : un moteur de l'accession de Fréchet à une chaire de recherche

La nomination de Fréchet à Paris en 1928 n'est pas documentée directement : les PV du Conseil de la faculté de l'année 1928 sont manquants aux archives nationales et absents de ses dossiers de carrière (AN F/17/25320, AJ/16/5738, AJ/16/5991). Ceci étant, dans son discours d'inauguration du bâtiment IHP (AJ/16/5775), le doyen de la faculté des sciences Charles Maurain justifie cette nomination à un de ces « enseignements nouveaux » en mentionnant que « l'enseignement élevé qu'il a donné sur le Calcul des probabilités a été très remarqué ». L'enseignement constitue, et la carrière de Fréchet le montre, un moteur dans l'ascension au sein des hiérarchies universitaires. L'accumulation primitive des titres obtenus par Fréchet rappelle l'ascendant de l'enseignement sur la recherche : l'entrée à l'ENS (1900), la licence ès sciences (1902), l'agrégation de mathématiques (1903) assurent une carrière dans l'enseignement secondaire, et celui de docteur ès sciences (1906) ouvre, lui, la possibilité d'une carrière universitaire.

Le dossier de carrière (AN F/17/25320) de Fréchet met en évidence que la première nomination à une chaire est fondamentalement motivée par les qualités d'enseignant du candidat. Les deux années dans le secondaire (Besançon en 1906 puis Nantes en 1907), puis à l'université (Rennes comme maître de conférences en 1908, Poitiers comme chargé de cours en 1909), apparaissent comme un moyen pour l'administration centrale à Paris d'évaluer les talents pédagogiques du jeune mathématicien. Les fiches individuelles rédigées dans le cadre des inspections consignent systématiquement ses qualités d'enseignant ; les rapports de février 1907 se contentent ainsi de mentionner qu'il est un « bon mathématicien » mais soulignent les qualités de ses exposés, son incarnation de l'autorité et signalent le caractère « exact », « ferme » et « consciencieux » du professeur.

Ces commentaires sur les qualités d'enseignant sont manifestement lus et mobilisés par les patrons mathématiques de l'époque [Gispert & Leloup 2009a]. Dans le dossier de Fréchet, Paul Appell (1855–1930) apparaît comme un faiseur de carrière. En tant que président du jury d'agrégation, Appell approuve en 1903 le vœu du jeune Fréchet de rester à Paris pour

y faire une thèse, le jugeant « bon mathématicien », et lui offrant ainsi un soutien primordial pour envisager une carrière universitaire. En 1908 puis en 1909, Appell (alors doyen de la faculté des sciences de Paris depuis 1903) propose au Directeur de l'Instruction publique de nommer Fréchet à Rennes puis Poitiers. Laconique en 1908, Appell affirme en 1909 que Fréchet est un excellent professeur, d'un caractère « consciencieux, ferme et sûr ».

Comme le signale le discours de Maurain, l'attention portée aux qualités d'enseignant de Fréchet ne s'arrête pas une fois nommé à une chaire. Titulaire de la chaire de mécanique rationnelle à Poitiers entre 1910 et 1918, puis d'analyse supérieure à Strasbourg entre 1919 et 1928, les doyens soulignent l'exactitude et le zèle du professeur qui s'investit non seulement dans la préparation des certificats dont il a la charge mais aussi dans la préparation des agrégatifs, seul à Poitiers ou en collectif à Strasbourg. À Strasbourg, le doyen souligne en 1919 les « heureuses initiatives pour le développement de l'enseignement des mathématiques » prises par ce nouveau professeur. Le doyen strasbourgeois signale un professeur dévoué à son enseignement et au recrutement d'étudiants et le qualifie d'« excellent professeur » (sans mention de son travail de recherche) en 1922. Finalement à Paris, le doyen Maurain le juge « excellent professeur et mathématicien éminent ». Deux qualités qui lui font dire que Fréchet a été nommé « assez tard » à Paris et qu'il serait « désirable qu'il pût bénéficier d'une titularisation personnelle » en 1931, alors que Fréchet est encore professeur sans chaire ; une titularisation dont Maurain se félicite en 1936 pour les mêmes motifs.

Sur l'ensemble des rapports conservés dans son dossier de carrière (AN, F/17/25320), les appréciations sur ses qualités d'enseignant tendent à devenir progressivement laconiques au fur et à mesure de son ascension des hiérarchies universitaires, signalant que sur ce point Fréchet n'a, dès le milieu des années 1920, plus à faire ses preuves. En parallèle, les commentaires (quand il y en a) sur son travail de mathématicien se résument à des appréciations comme « bon ou excellent mathématicien » ou encore « mathématicien estimé ou éminent ». Pour l'administration universitaire, le moteur de la carrière universitaire n'est pas la recherche, c'est la capacité à être un bon enseignant. Fréchet accède ainsi à une première chaire d'enseignement de la recherche à Strasbourg, et à une seconde à Paris, grâce à ses qualités remarquées, consignées et mobilisées d'enseignant universitaire.

1.3. *L'acquisition de dispositions précieuses pour la chaire de CPPM : Fréchet animateur de collectifs de recherches internationaux à Strasbourg*

Fréchet acquiert au cours de sa carrière, et en particulier à Strasbourg, les qualités requises pour seconder Borel à la chaire de CPPM au sein de l'IHP.

En premier lieu, Fréchet réussit à s'imposer comme un acteur important de la scène mathématique internationale. Cette internationalisation de Fréchet est soutenue à la fois par ses travaux de recherche et par le contexte décisif de Strasbourg. En effet, les premiers contacts mathématiques internationaux de Fréchet se font lorsqu'il est élève de la rue d'Ulm avec des étudiants étasuniens [Taylor 1982a ; 1985a]. Une connexion particulière outre-atlantique qu'il entretient en publiant des articles dans des journaux mathématiques étasuniens. Cette internationalisation portée par ses travaux d'analyse, suspendue pendant la Grande Guerre, reprend vigoureusement une fois arrivé à Strasbourg. Fréchet élargit ses contacts, notamment en Europe centrale et de l'Est, autour de questions de topologie et d'analyse. Il fait également des voyages à l'étranger : en Suisse, aux États-Unis d'Amérique, au Canada, aux Pays-Bas, en Belgique, en Tchécoslovaquie, en Pologne et finalement en septembre 1928 en Italie au Congrès international des mathématiciens de Bologne⁸ ; une présence à l'internationale qui passe également par des publications, notamment dans des périodiques polonais et soviétiques [Arboleda 1979a ; 1981a ; Taylor 1985a]. Dans le même temps, l'Institut de mathématique de Strasbourg dirigé par Fréchet depuis 1920, fait venir des mathématiciens étrangers : Théophile de Donder (1872–1957) de l'université de Bruxelles, Waclaw Sierpinski (1882–1969) de l'université de Varsovie, Nikolaï M. Krylov (1879–1955) de l'Académie des sciences d'Ukraine et John Whitehead (1861–1947) doyen de l'école d'ingénieurs de la Johns Hopkins University (Baltimore, ÉUA). Si à Poitiers, c'est par son initiative personnelle et ses travaux mathématiques que Fréchet réussit à exister timidement sur la scène internationale, l'université de Strasbourg mène, elle, une politique volontariste de communications scientifiques internationales que Fréchet sait saisir pour s'y rendre plus visible.

À l'échelle internationale, la recherche mathématique apparaît comme plus valorisée pour y exister, sans pour autant effacer totalement la dimension universitaire. En 1914, Fréchet est nommé pour l'année universitaire

⁸ Voir les rapports des doyens de la faculté des sciences de Strasbourg publiés dans les *Travaux de l'Université de Strasbourg*, Imprimerie Alsacienne, Strasbourg ou le *Bulletin de la Société des Amis de l'Université de Strasbourg*, Strasbourg.

1914–1915 professeur de mathématiques à l'université de l'Illinois ; nomination restée sans suite à cause du déclenchement de la guerre. Pendant le second semestre de l'année 1923–1924, il se voit attribuer deux cours à l'université de Chicago, dont un de recherche sur la « Théorie des ensembles abstraits ». En outre, un des vecteurs de l'internationalisation de Fréchet est la promotion de l'université de Strasbourg et de sa formation mathématique ; comme l'illustre notamment sa correspondance avec le mathématicien tchèque Bohuslav Hostinsky [Havlová et al. 2005].

En outre, dans sa période strasbourgeoise, Fréchet acquiert deux dispositions sociales décisives pour l'IHP en 1928. Nommer professeur d'analyse supérieure (une chaire d'enseignement de recherche) et directeur de l'Institut de mathématiques, il fait la démonstration de sa capacité à diriger un collectif de recherche et d'assurer un enseignement de recherche.

À Strasbourg, Fréchet bénéficie d'un contexte particulièrement favorable pour assurer des « cours de recherche » à la chaire d'analyse supérieure dont « le titulaire s'efforcer[a] de développer chaque année quelques parties nouvelles de la science et d'attirer l'attention sur quelques problèmes à résoudre » [Fréchet 1920a, p. 340]. L'activité d'enseignement de Fréchet, telle qu'elle est documentée dans *L'Enseignement mathématique* (1919, 1920 et 1923⁹) et dans les rapports des doyens de la faculté des sciences de Strasbourg, signalent que le professeur d'analyse supérieure change chaque année de sujet en lien avec ses propres recherches.

Plus encore, les rapports des doyens signalent la dimension collective de cet enseignement à la recherche dont Fréchet témoigne dès 1919 : « unanimes à penser qu'il ne leur suffirait pas de contribuer à l'avancement de la science par leurs recherches personnelles, menées à côté, mais en dehors, de leur enseignement » [Fréchet 1920a, p. 340], il affirme que tous les enseignants de mathématiques participeront à des cours de recherche. Cet aspect collectif est systématiquement mentionné et valorisé par les doyens de la faculté des sciences dans leurs rapports annuels, dans lesquels il mentionne parfois des descriptifs de ces cours¹⁰.

À Strasbourg, Fréchet fait ainsi la preuve d'être un excellent enseignant de la recherche mathématique et de sa capacité à organiser un collectif

⁹ Il s'agit des seules années de la période entre 1918 et 1928 pour lesquelles le programme des cours de mathématique de Strasbourg sont publiés.

¹⁰ On peut ajouter que les annonces publiées en 1919 et 1920 dans *L'Enseignement mathématique* mentionnent également l'organisation d'un « colloque mathématique mensuel » destiné aux professeurs et aux étudiants, sans que nous ayons trouvé de preuve de sa tenue.

pour animer une activité de recherche, en lien étroit avec l'enseignement et l'international, à rebours d'une représentation de la recherche mathématique à la fois personnelle et extérieure à l'enseignement. Il acquiert ces dispositions sociales grâce à une expérience du champ mathématique universitaire en accédant à un poste de professeur d'analyse supérieure et de directeur de l'Institut de mathématiques, porté par ses qualités d'enseignant et, sur la scène internationale, par ses recherches.

2. ENSEIGNER LA RECHERCHE MATHÉMATIQUE SELON FRÉCHET : CADRE INSTITUTIONNEL, CALCUL DES PROBABILITÉS ET (DÉS)AXIOMATISATION DES MATHÉMATIQUES

Dans une conception très libérale, les réformes universitaires visant à faire de la recherche et la formation à celle-ci une « obligation envers l'État » pour les universitaires donnent un cadre assez vague et reposant explicitement sur l'initiative personnelle. À Strasbourg, Fréchet dispose donc de marges de liberté pour la recherche et son enseignement suivant des représentations dont il témoigne publiquement, si ce n'est explicitement, entre 1918 et 1928 et qui articulent une conception du cadre institutionnel nécessaire à la recherche et son enseignement, une place pour le calcul des probabilités et un rôle de l'axiomatisation dans la recherche et l'enseignement des mathématiques.

2.1. *Les cadres institutionnels de l'enseignement (et) de la recherche : un cursus mathématique idéal dans un centre mathématique de province (1918–1928)*

Si Fréchet accepte de « quitter [sa] chaire à la tranquille université de Poitiers, si propice au recueillement » (AAS¹¹, 67 J 1189) pour celle de Strasbourg, c'est qu'il perçoit l'occasion de concrétiser un idéal dont il donne un aperçu dans le brouillon d'une lettre adressée au doyen de la faculté des sciences de Strasbourg en 1927 :

En dehors du centre mondial qu'est Paris, il restait alors à créer en province un centre de recherche mathématique susceptible d'attirer et de retenir ceux des travailleurs qui redoutent l'agitation de la métropole ou craignent de s'y trouver isolés. Dans un tel centre il devait être possible de préparer l'agrégation, de soutenir un doctorat, de suivre des cours de recherche. Mais surtout, les étudiants devaient être à même d'y entrer en contact personnel facile avec un nombre de mathématiciens. Et ceux-ci, sans être nécessairement les plus

¹¹ Archives de l'Académie des sciences, Fonds Fréchet.

grands, [devaient] avoir au moins une notoriété internationale suffisante et une grande activité scientifique. [...] Les moyens ayant été réunis, il a été possible, dans la période qui vient de s'écouler, de s'approcher assez près de l'idéal que je m'étais formé. (AAS, 67 J 1189)

Cet idéal de centre de recherche mathématique lui semble en fait réalisable à Strasbourg dès 1919.

En premier lieu, dans sa leçon d'ouverture du cours d'analyse du 17 novembre 1919¹², Fréchet présente sa conception du cursus mathématique universitaire. Il insiste sur l'importance à ses yeux qu'un étudiant acquiert une connaissance générale mathématique, consacrée par la licence et l'agrégation, avant de se « frotte[r] à un problème de son crû », par un diplôme d'études supérieures voire une thèse, et faire ainsi l'expérience de la recherche qu'il n'aura plus la possibilité de mener une fois sorti de l'université. Un tel cursus propose donc un compromis entre le modèle allemand – jugé excessivement tourné vers la recherche – et français, en ajoutant un niveau d'étude spécialisée en mettant ainsi à profit les réformes de 1896 et 1904, et qui peut être intégralement réalisé à Strasbourg.

En second lieu, l'université de Strasbourg offre la possibilité d'un encadrement des étudiants excellent à deux titres : quantitatif et qualitatif. D'une part, le taux d'encadrement dans cette université s'avère exceptionnel en France. Dans un brouillon de discours fait à la Société franco-écossaise en avril 1920 (AAS 67 J 859), Fréchet mentionne que le nombre d'étudiants à Strasbourg (246 à la faculté des sciences en 1920, *Annuaire statistique*, 1921) est inférieur à celui de Paris (2.821), Toulouse (926), Lyon (656) et Bordeaux (369) et se risque à affirmer qu'il est équivalent à d'autres universités allemandes. Mieux dotée en postes d'enseignement, Fréchet peut conclure que l'université de Strasbourg permet à ses étudiants d'avoir des contacts plus faciles avec les professeurs. Au passage, il se montre cinglant, affirmant que « ce ne sont pas les universités de province qui sont petites, c'est l'université de Paris qui est trop grosse. » D'autre part, Fréchet mentionne que les enseignants recrutés sont capables de faire connaître les méthodes françaises et les sujets d'actualité de la recherche mathématique. En effet, en 1920, le corps enseignant est recruté parmi l'avant-garde mathématique normalienne : Arnaud Denjoy (1884–1974) à la chaire de mathématiques générales, Georges Valiron (1884–1955) à celle de calcul différentiel et intégral, Henri Villat

¹² Cette leçon d'ouverture du cours d'analyse supérieure du 17 novembre 1919 est publiée en 1920 dans la *Revue du Mois* [Fréchet 1920a].

(1879–1972) à celle de mécanique et Ernest Esclangon (1876–1954) à celle d’astronomie auxquels s’ajoutent Joseph Pérès (1890–1962), Louis Antoine (1888–1971) et René Thiry (1886–1968) pour les maîtrises de conférences.

Dans le brouillon de sa lettre au doyen de 1927, Fréchet invoque d’ailleurs ces deux derniers points (la formation à la recherche et l’équipe d’encadrement) pour justifier la présentation de sa démission de directeur de l’Institut de mathématiques. Fréchet constate que s’il a réussi à s’approcher de son idéal, il ne l’a pas atteint : les moyens pour attirer de jeunes étudiants pour des doctorats sont insuffisants pour contrer la concurrence parisienne et le recrutement de Georges Cerf (1888–1979) lui paraît ne pas correspondre aux exigences scientifiques requises concernant le corps enseignant. Comme le mentionne sa fille Hélène Lederer, « déçu, [Fréchet] se décida à répondre à l’appel d’Émile Borel » [Taylor 1985a, p. 286].

Si Fréchet ne mâche pas ses mots contre la faculté des sciences de Paris, il accepte pourtant avec « joie » (AAS, 67 J 1189, Lettre au doyen de la faculté des sciences de Strasbourg, 8 novembre 1928) sa nomination à Paris. Certes, cette nomination renouvelle ses perspectives professionnelles, mais surtout, la construction du bâtiment IHP transforme radicalement les conditions de travail pour les mathématiciens de la faculté des sciences de la Capitale. Le département de mathématiques occupe un bâtiment, surnommé la « maison des mathématiciens » par Maurain, qui offre un espace suffisant pour accueillir l’ensemble de son activité d’enseignement et de recherche. Dans ces conditions, ce centre mathématique universitaire réalise l’idéal de Fréchet : un lieu où sont formés des étudiants à la recherche mathématique, en entrant facilement en contact avec des professeurs et maîtres de conférences à même de faire connaître les sujets d’actualité de la recherche, bénéficiant eux-mêmes d’une reconnaissance internationale et auteurs de travaux de recherches importants.

Dans le cas des probabilités, la création de l’IHP et l’arrivée de Fréchet à la chaire de CPPM conduit à des transformations notables [Cléry 2020 ; Siegmund-Schultze 2001]. Ainsi, en 1930, le certificat de CPPM devient un certificat à 3 options (compléments théoriques, statistique, physique mathématique) qui cristallisent la spécialisation de la chaire de CPPM vers les probabilités et son lien direct avec la recherche contemporaine notamment par le programme de la première option intégrant des sujets d’actualité, au demeurant présentés par Fréchet dans son cours : les modes de convergences probabilistes, les chaînes de Markov, les variables aléatoires... Dans le même temps, ce certificat se voit doté d’une épreuve de travaux

pratiques contribuant simultanément à augmenter le temps pédagogique et à rendre plus facile le contact entre Fréchet et ses étudiants. Enfin, le réseau probabiliste de Fréchet, construit notamment lors du Congrès de Bologne de septembre 1928, est immédiatement et durablement mobilisé pour les conférences.

2.2. *Le calcul des probabilités : un sujet d'enseignements universitaires et de recherches mathématiques*

Sa nomination comme maître de conférences à la chaire de CPPM marque un tournant dans son activité pédagogique et scientifique : Fréchet s'y spécialise dans le domaine des probabilités. Comme nous l'avons mentionné, Maurain met en avant l'enseignement probabiliste de Fréchet pour justifier en 1928 son recrutement. Ce dernier commence effectivement à enseigner les probabilités à l'université de Strasbourg dès le premier semestre de l'année universitaire 1920.

L'enseignement et la recherche probabiliste de Fréchet à Strasbourg sont d'abord marqués par son attachement aux applications. Comme d'autres universitaires, Fréchet assure à partir de 1920 un cours au sein de l'Institut d'enseignement commercial supérieur créé sous l'impulsion de la chambre de commerce de Strasbourg [Fréchet & Halbwachs 2019]. Selon lui [Fréchet 1933], ce cours de « statistique et assurance » le conduit à s'intéresser aux mathématiques du hasard et le convainc de consacrer certains cours de sa chaire d'analyse supérieure au calcul des probabilités ; des enseignements de probabilité représentatifs de l'activité de recherche de Fréchet.

Les titres des leçons signalent que les probabilités occupent une place ponctuelle dans ses enseignements et s'enracinent dans les applications. Ainsi, pendant l'année 1920–1921, il fait un cours sur les « éléments du calculs des probabilités » et l'« application du calcul des probabilités » en parallèle de leçons sur des « notions sur les équations intégrales » et les « fonctions de lignes » (*L'Enseignement mathématique*, 21, p. 145). Trois ans plus tard, il fait un cours sur la « théorie des erreurs d'observations » et sur la « notion de dimension et d'intégrales dans les espaces abstraits » (*Travaux de l'Université de Strasbourg*, 1925, p. 81). Il faut encore attendre trois ans pour que Fréchet fasse à nouveau des leçons sur la « théorie élémentaires des probabilités » en parallèle d'autres portant « sur l'interpolation et l'approximation des fonctions » (*Bulletin de la Société des amis de l'Université de Strasbourg*, 16, p. 72). Enfin, après une série de conférences en Tchécoslovaquie où il échange avec Hostinský, Fréchet consacre son cours de

1927–1928, à « la théorie analytique des probabilités et [à l']économie mathématique » (*Bulletin de la Société des amis de l'Université de Strasbourg*, 18, p. 71).

Les travaux de Fréchet dans sa période strasbourgeoise maintiennent en effet une place importante à l'analyse [Arboleda 1979a; 1981a; Taylor 1985a] jusqu'à la publication de son livre *Les Espaces abstraits* [Fréchet 1928b] mais laissent une place croissante aux mathématiques du hasard prenant racines dans les applications et s'inscrivant à l'international. Par exemple, au Congrès international des mathématiciens de Toronto en 1924, il fait une conférence sur les mathématiques actuarielles. En fait, la publication du *Calcul des probabilités à la portée de tous* [Fréchet & Halbwachs 1924] conclut quelques recherches mathématiques à destination des praticiens [Fréchet 1923b; 1924a; 1928a]. Cette attention pour les applications reste toutefois constante chez Fréchet qui poursuit notamment des publications sur des questions de mathématiques en économie jusqu'en 1928 [Fréchet 1926a; 1928c;d] puis plus tard en statistique [Armatte 2001a; Bru & Hertz 2001a]. L'année universitaire 1923–1924 amorce un tournant dans les publications de Fréchet qui prennent une couleur plus théorique, provoquée par la publication d'une axiomatisation de la théorie des erreurs par Mikhail F. Soubbotine (1893–1966) qui suscite une réaction immédiate, lui inspirant vraisemblablement son cours à Strasbourg, et durable [Lévy 2014; Cléry 2020; Hertz 1997]. Fréchet engage une controverse avec Soubbotine rendue publique par des articles dans le *Matematicheskii Sbornik* (*Recueil mathématique*) à Moscou [Fréchet 1924b; 1925b; Soubbotine 1923a] et des notes dans les *CRAS* [Fréchet 1925a; Soubbotine 1925a], et dans laquelle il implique Paul Lévy¹³. Les critiques de Fréchet visent d'abord le résultat mathématique, mais plus encore, le choix même des axiomes de l'astronome. Il critique ainsi le caractère *ad hoc* de cette construction, qui cherche à obtenir la loi gaussienne comme cas particulier des lois d'erreurs, et se rallie à l'avis de Lévy pour qui « une théorie construite sur des axiomes “ne vaut quelque chose que si des raisons de bon sens incontestables nous obligent à considérer ces axiomes comme exacts en pratique” » [Fréchet 1925b, p. 710]. Fréchet revient sur la théorie des erreurs en 1927–1928, cette fois en développant une nouvelle critique¹⁴, celle de l'additivité des erreurs [Fréchet 1928e],

¹³ Voir les lettres 9 (16 octobre 1925, p. 71) à 14 (30 novembre 1925, p. 75) dans [Lévy 2014].

¹⁴ Dans [Fréchet 1928f], il affirme qu'« en étudiant les récents travaux sur la théorie des erreurs d'observation, les doutes que m'avait laissé l'exposition classique de cette théorie, se sont réveillés. J'avais eu l'occasion de préciser quelques objections

qui le conduit à l'étude de la loi de probabilité de l'écart maximum des erreurs [Fréchet 1927a ; 1928f ; Hertz 1997].

L'orientation probabiliste de Fréchet se fait plus fermement internationale en septembre 1928, au Congrès de Bologne [Bru 2003a]. Il préside la séance du 8 septembre de la section IV(a) consacrée aux probabilités et à la statistique. Il participe également à une discussion avec Cantelli, Evgueni E. Slutsky (1880–1948), Aleksandr Y. Khintchine (1894–1959), Guido Castelnuovo (1865–1952) et Jerzy Neyman (1894–1981) suite à l'exposé du 4 septembre de Carlo A. dell'Agnola (1871–1956) sur la question de la convergence d'une suite de variables aléatoires vers une variable aléatoire limite. Le lendemain, il intervient dans une discussion, avec Paul Lévy et Neyman, suite à l'exposé de Pólya concernant des propriétés de la loi de Gauss. Le 8 septembre, il participe à une discussion, avec Cantelli, Slutsky, Edward C. Molina (1877–1964), Friedrich M. Urban (1878–1964), Louis-Gustave Du Pasquier (1876–1957) et René Risser (1869–1958), suite à l'exposé de Darmon sur l'étude statistique des séries temporelles.

Les recherches probabilistes de Fréchet montrent une sophistication mathématique croissante qui s'associe à une distanciation progressive des applications également visible dans son enseignement. Le « résumé du cours de calcul des probabilités » (AAS, 67 J 888), vraisemblablement de son cours de 1920–1921, montre de nombreuses ressemblances avec le contenu du *Calcul des probabilités à la portée de tous* co-écrit avec le sociologue Maurice Halbwachs (1877–1945) publié en 1924 [Fréchet & Halbwachs 1924 ; 2019]. En particulier, il ne mentionne pas le calcul intégral, même dans la partie sur les probabilités géométriques, et reste globalement dans un cadre discret. Le contenu s'ancre dans une conception concrète des probabilités, par exemple et en premier lieu, en définissant la probabilité d'un événement comme la valeur limite dont diffère peu la plupart des fréquences dans différents groupes de nombreuses épreuves.

Le « résumé du cours sur la théorie analytique des probabilités (1927–1928) » (AAS, 67 J 1198) marque un saut qualitatif net. En particulier, Fréchet donne trois définitions à la notion de probabilité : la probabilité comme quantité physique mesurée à l'aide de la fréquence, la probabilité comme rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas total, la probabilité comme nombre de l'intervalle unité valant 0 pour un événement impossible et 1 pour un événement certain. Il aborde la notion de « convergence au sens de la théorie des probabilités » introduite par

lors d'une conférence que j'avais eu l'honneur de faire au Colloque Mathématique de Berne, en 1922. De nouvelles objections me sont venues à l'esprit que je compte exposer dans un autre Recueil. » (p. 93)

Cantelli en 1916, les inégalités de Bienaymé-Tchebychev et de Markov, et les notions de « variables aléatoires » et de « densité de probabilité » qui conduit au calcul des moments d'une loi à l'aide de l'intégrale de Stieltjes. Le cours se termine sur l'étude des comportements asymptotiques de suites de variables aléatoires : d'abord dans le cadre classique (indépendant et de même loi), puis dans le cadre du battage des cartes [Mazliak 2015a]. Dans cette dernière partie, Fréchet fait explicitement référence à Bohuslav Hostinský et à Jacques Hadamard qui vivent leur « printemps ergodique » selon l'expression de Bernard Bru [Bru 2003a, p. 160]. Ce résumé marque ainsi une montée en sophistication mathématique, tant dans les concepts mobilisés que dans les sujets abordés qui reprennent l'actualité immédiate de la recherche internationale, notamment en relation avec les travaux d'Hostinský et de Cantelli.

Manifestement, l'activité d'enseignement et de recherche probabiliste de Fréchet attire l'attention d'Émile Borel qui, depuis son transfert (à sa demande) à la chaire de CPPM et son élection à l'Académie des sciences en 1920, multiplie les initiatives pour encourager et susciter des travaux en probabilités. Le 14 décembre 1925, la Commission du Prix Montyon de Statistique, pour laquelle Borel est rapporteur, décerne son prix à Fréchet pour « l'ensemble de ses travaux sur le calcul des probabilités » (*Comptes rendus hebdomadaire de l'Académie des sciences de Paris*, t. 181, p. 1000). Dans la foulée, Borel demande à Fréchet de rédiger un fascicule pour son *Traité du calcul des probabilités et de ses applications* consacré aux développements théoriques récents; fascicule dont Borel se réservait la rédaction dans le plan initial du traité [Bustamante et al. 2015]. Fréchet fait immédiatement publier une note dans *L'Enseignement mathématique* [Fréchet 1926b] pour demander qu'on lui communique des références (et mieux encore, un résumé) des travaux théoriques en probabilités qui méritent d'être rapportés. Finalement, au début de l'année universitaire 1928–1929, Borel fait appel à Fréchet pour le seconder à la chaire de CPPM. Ces marques de reconnaissance de Borel sont autant d'encouragements à s'investir sur les aspects les plus théoriques et mathématiques du calcul des probabilités; ce que fait Fréchet.

Ses recherches et ses enseignements marquent alors un tournant vers les aspects théoriques des probabilités [Cléry 2020]. Les publications de Fréchet entre 1929 et 1931 se concentrent principalement sur les modes de convergence probabilistes et la distance entre deux variables aléatoires et participent d'un transfert mathématique de ce qu'il appelle l'« analyse générale » au calcul des probabilités. Par ailleurs, sa relation scientifique avec Bohuslav Hostinský [Havlová et al. 2005] l'encourage à s'intéresser

aux chaînes de Markov sur lesquelles il publie entre 1932 et 1935, en proposant une classification de ces chaînes dans le cas des espaces d'états finis et continus, mobilisant pour ces dernières la théorie des équations intégrales de Fredholm. Lors de ces cours à la chaire de CPPM, Fréchet présente donc les résultats de ses recherches en cours. À partir de 1935, malgré son transfert sur d'autres enseignements, Fréchet poursuit des recherches probabilistes sur les processus markoviens en lien avec l'équation de Chapman-Kolmogorov jusqu'à la fin des années 1930. Des sujets de recherches qu'il présente dans certains de ses cours.

2.3. De l'« analyse » d'Arbogast à la « désaxiomatisation » de Fréchet : pratique de l'enseignement et de la recherche mathématique

L'implication de Fréchet dans l'enseignement de la recherche, notamment probabiliste, s'appuie sur des réflexions pédagogiques, rapprochant étroitement démarche pédagogique et démarche de recherche, qu'il explicite pendant sa période strasbourgeoise.

Tout d'abord, Fréchet profite de la première leçon à la chaire d'Analyse supérieure à Strasbourg en 1919 pour présenter des réflexions pédagogiques. Il présente ainsi, dans la troisième partie de cette leçon, les considérations pédagogiques du mathématicien alsacien Louis-François-Antoine Arbogast (1759–1803). Celui-ci, selon Fréchet, défend l'idée que « la méthode qui nous fait arriver aux découvertes est aussi celle qui est la plus propre à les communiquer aux autres » [Fréchet 1920a, p. 358], sans pour autant emprunter une approche historique qui ferait prendre à l'étudiant les détours de la démarche mathématique, mais en privilégiant un chemin plus court rendu possible par les connaissances actuelles. Cette méthode qu'Arbogast appelle « l'analyse », est une critique de la méthode qui présente la science « comme une révélation divine, au moyen d'une suite de lemmes, de théorèmes, de corollaires chacun parfaitement démontrés mais dont la suite se déroule suivant une loi mystérieuse et inaccessible » [Fréchet 1920a]. Au contraire, selon Fréchet, il s'agit d'expliquer les difficultés posées par un problème pour justifier l'introduction des notions et les résultats mathématiques.

Ces réflexions de 1919 sont formulées plus directement comme une critique de la méthode axiomatique dans l'enseignement et dans la recherche lors d'une conférence à Berne en 1925, intitulée « sur une désaxiomatisation de la science » [Fréchet 1925c]. Fréchet y souligne que la méthode axiomatique, modelée sur les *Éléments* d'Euclide, dans

l'enseignement des mathématiques, présente cette discipline par un enchaînement certes rigoureusement logique de définitions, lemmes et théorèmes, mais aussi comme une révélation. Il réaffirme la nécessité de mettre en lumière la démarche mathématique permettant de surmonter les problèmes et les difficultés par une « succession d'approximations ». Cette démarche n'exclut pas le recours à une approche axiomatique mais, selon lui, interdit son usage exclusif. En outre, son propos, qui illustre le projet de désaxiomatisation par des exemples pris dans la recherche et dans l'enseignement, suggère que cette méthode établit une certaine porosité entre les deux, voire que l'entrée de la recherche dans l'enseignement est au cœur même de cette pratique pédagogique qu'il affirme avoir mise en œuvre au cours de sa carrière d'enseignant.

Si la méthode axiomatique ne devrait pas être l'unique méthode d'enseignement et de recherche, c'est que Fréchet en fait un temps dans la démarche mathématique. Selon lui, le procédé d'axiomatisation consiste à substituer une « définition logique qui est une combinaison de notions fondamentales » à une « définition imposée par l'expérience » [Fréchet 1925c, p. 4]. Loin de vouloir rejeter cette méthode, il affirme la nécessité de « continu[er] à déterminer celles des notions introduites par l'expérience dont la définition peut être déduite sous forme logique de concepts fondamentaux et à essayer de prouver logiquement les lois d'observations en partant d'hypothèses convenables » [Fréchet 1925c, p. 3]. Il reconnaît d'ailleurs s'en être servi et que ce procédé permet d'obtenir des théories générales par suppression d'axiomes ou des résultats plus précis par ajout. Fréchet alerte néanmoins sur le risque que les résultats ainsi obtenus ne soient plus conformes aux réalités observables, en prenant l'exemple de la définition de la longueur, et la nécessité d'une vérification expérimentale appelant ainsi à un mouvement de balancier entre axiomatisation et désaxiomatisation. Ce constat lui semble d'autant plus grave, que certaines définitions mathématiques, comme celle de la tangente, semblent sans lien évident avec leur pendant empirique, et destinées à servir l'usage mathématique et logique. Ce faisant, Fréchet, tout en affirmant les avantages et la nécessité de la méthode axiomatique, alerte sur les risques d'une science mathématique sans lien intuitif avec un usage concret de ses résultats.

Bien que son propos à Berne soit principalement construit sur la géométrie, Fréchet conclut que ces critiques « pourraient être renouvelées dans bien d'autres branches des Mathématiques; en particulier en Mécanique et dans la Théorie des Probabilités. » [Fréchet 1925c, p. 9]. En l'absence de références, il est difficile de savoir à quelles tentatives d'axiomatisation il pense précisément. Ceci étant, le parcours de Fréchet au sein du système

universitaire l'encourage à se spécialiser toujours plus dans le domaine des probabilités, le conduisant, dans son cours de l'année 1929–1930, à proposer une définition axiomatique des probabilités.

3. PRATIQUES MATHÉMATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT UNIVERSITAIRE ET LA RECHERCHE : LE CAS DE L'AXIOMATISATION DES PROBABILITÉS DANS LE COURS DE FRÉCHET DE 1929–1930

L'enseignement de Fréchet à la chaire de CPPM de l'année 1929–1930, dans lequel il énonce une définition axiomatique des probabilités, apparaît comme un moment de bascule où se cristallisent des choix mathématiques. Tout d'abord, ce cours illustre la volonté de Fréchet de tenir des deux mains les développements mathématiques et les liens avec les applications, et ainsi d'articuler l'axiomatisation et la désaxiomatisation des sciences. Ensuite, pour la première fois, l'additivité dénombrable des probabilités (ou σ -additivité) fait l'objet d'une réflexion de Fréchet qui précipite une formulation axiomatique. Enfin, parce que le contenu des cours et des publications de Fréchet sur l'additivité dénombrable des probabilités révèle une porosité de ses pratiques dans l'enseignement et la recherche.

Il existe plusieurs traces des cours magistraux de Fréchet dans les archives conservées à l'Académie des sciences. Il y apparaît notamment qu'au cours de l'année 1928–1929, Fréchet reproduit le contenu du cours fait à Strasbourg l'année précédente, avec une modification du plan. Il existe également des notes, sous la forme de brouillons difficiles à interpréter du fait des nombreuses parties barrées, d'une numérotation redondante et non datée des pages qui semblent superposer plusieurs versions et fait perdre la continuité des leçons (AAS 67 J 863). À l'inverse, les notes de Jean-Louis Destouches (ASU, Destouches¹⁵) du cours de l'année 1929–1930 présentent un contenu clair, en grande partie conforme à ce qu'on trouve, modifiée à la marge, dans le premier volume des *Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités* publié en 1937 [Fréchet 1937, p. 1–28].

¹⁵ Archives de Sorbonne Université, bibliothèque MIR, Fonds Jean-Louis Destouches, Notes manuscrites de Jean-Louis Destouches : Cours de M. Fréchet : La loi des grands nombres, 1^{er} semestre, 1929–1930.

3.1. *Un moment de bascule : axiomatisation et désaxiomatisation des probabilités*

Le choix de proposer une définition axiomatique, dans la perspective tracée dans sa conférence de Berne, apparaît, dans la carrière mathématique de Fréchet, comme un moment de bascule en fixant les bases axiomatiques permettant de futurs développements théoriques et appliqués, en tirant profit des connaissances acquises par les domaines empiriques (la statistique et l'actuariat).

Dans le premier fascicule de ses *Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités*, Fréchet propose la définition axiomatique suivante :

On associe à la catégorie C d'épreuves envisagées, une certaine famille $\mathcal{F}$ d'événements fortuits « probabilisables » (par analogie avec l'expression « mesurable ») sur C.

I. Cette famille constituera un « corps » d'événements. Autrement dit : 1° elle devra comprendre les contraires respectifs des événements qui la constituent ; 2° si des événements fortuits $E_1, E_2, \dots$, formant une suite finie ou infinie appartiennent à la famille $\mathcal{F}$, celle-ci devra contenir aussi l'événement consistant dans la réalisation de l'un au moins des événements $E_1, E_2, \dots$ (Il résulte de ces deux conditions que $\mathcal{F}$ comprend la certitude et l'impossibilité.)

II. À chaque événement E de $\mathcal{F}$, un nombre $p(E) \geq 0$, appelé probabilité de E sur C est attaché de sorte que, avec les notations du §I précédent, l'on ait, si $E_1, E_2, \dots$, sont incompatibles,

$$(1) \quad p(E_1) + p(E_2) + \dots + p(E_n) + \dots = p(E_1 \text{ ou } E_2 \text{ ou } \dots \text{ ou } E_n \text{ ou } \dots)$$

et que la probabilité de la certitude soit égale à l'unité. [Fréchet 1937, p. 22]

Cette définition est déjà explicitée dans les notes de Destouches de 1929–1930 (ASU, Destouches, p. 14), sans toutefois mentionner la catégorie d'épreuves. Une notion que Fréchet tente de définir en 1937 par :

une catégorie d'épreuves est l'ensemble des épreuves consistant dans la réalisation d'un phénomène déterminé et dans l'observation des caractéristiques du résultat de l'épreuve [Fréchet 1937, p. 8–9].

Signe que les travaux probabilistes de Fréchet s'appuient en premier lieu sur les applications, cette attention aux catégories d'épreuves remonte au moins à 1924 [Fréchet & Halbwachs 1924]. Fréchet n'en donne cependant pas de définition, estimant que cette notion est « claire par elle-même » [Fréchet 1937, p. 8–9] et il s'attache plutôt à illustrer l'importance de bien définir la catégorie d'épreuves dans des contextes pratiques ou concrets, et son influence sur les valeurs des probabilités. Il reprend en 1937 un exemple, similaire à celui donné en 1924 [Fréchet & Halbwachs

1924, p. 10–11], avec la probabilité de décès d'un homme : il signale qu'en multipliant les caractéristiques prises en compte, la taille de l'échantillon d'observation pour établir cette probabilité peut devenir insuffisante.

La mention en 1937 de la catégorie d'épreuves renvoie en fait à une définition empirique des probabilités, mentionnée aussi dans les notes de Destouches (ASU, Destouches, p. 11), et s'appuyant sur ce qu'il appelle la loi du hasard :

Les fréquences d'un événement fortuit E dans des groupes comprenant chacun de nombreuses épreuves appartenant toutes à une même catégorie C sont les valeurs expérimentales d'une même constante physique déterminée par la nature de l'événement E et par la catégorie C. [...] C'est cette constante physique que nous appellerons la probabilité de l'événement fortuit E, dans la catégorie d'épreuves C. [Fréchet 1937, p. 5]

La présence simultanée d'une définition empirique et d'une définition axiomatique, et la mention des catégories d'épreuves dans la seconde comme point de contact avec la première, signale cette volonté de tenir simultanément les développements mathématiques et l'applicabilité empirique, rejoignant ainsi son projet d'articuler une axiomatisation et une désaxiomatisation des sciences en l'appliquant ici aux probabilités ; un projet élaboré dans son cours de 1929–1930 et maintenu jusqu'en 1937.

3.2. *Le calcul des probabilités : « une branche de l'analyse générale »*

Les notes de cours de Destouches de l'année 1929–1930 ne mentionnent aucune autre tentative d'axiomatisation. En revanche, dans son fascicule de 1937, Fréchet cite et discute brièvement certaines propositions d'axiomatisation qui furent notamment présentées à l'IHP.

Le projet d'une axiomatisation des probabilités au plus proche des applications n'est pas nouveau en 1929. Une tentative fut formulée par Richard von Mises en 1919 [von Mises 1919b] qu'il présente à l'IHP en mars 1931 ; suivant une approche originale, la théorie des collectifs propose une axiomatisation des suites aléatoires, plutôt que des probabilités elles-mêmes, reposant sur deux axiomes¹⁶. Le premier axiome demande la convergence de la suite des fréquences d'un événement vers la probabilité de l'événement et le second demande l'invariance de cette probabilité par sélection d'une sous-suite définie indépendamment des éléments de la suite (illustré par l'expression d'« impossibilité d'un système de jeu »

¹⁶ Voir notamment von Plato [1994] ; Siegmund-Schultze [2006a] ainsi que Verburgt [2015, 414–468]. Il est à noter que von Mises place son axiomatisation dans le programme défini par David Hilbert sur lequel on pourra consulter Corry [1997].

et censé rendre compte du caractère aléatoire de la suite). Fréchet mentionne explicitement cette théorie dans son fascicule de 1937, en relatant brièvement les critiques qu'elle a suscitées sur sa cohérence logique¹⁷. Il signale néanmoins que « l'on doit voir avec sympathie l'effort qu'il a fait pour harmoniser la théorie et la pratique » [Fréchet 1937, p. 3] mais poursuit en signalant les critiques émanant de Khintchine, Cantelli et Arthur H. Copeland (1898–1970) et les efforts pour la corriger menés par Copeland et Abraham Wald (1902–1950). Notons en outre que la critique de la théorie des collectifs conduit Jean Ville, doctorant sous la direction de Fréchet, à élaborer le concept de martingale [Shafer 2022a]. Fréchet conclut finalement que les difficultés posées par cette théorie ne permettent pas de l'adopter.

En 1937, Fréchet rejette également les autres tentatives cherchant à formuler les probabilités en termes de mesure. Il mentionne la formulation de Cantelli, présentée à l'IHP en 1932 [Cantelli 1935a], et d'Andreï N. Kolmogorov (1903–1987) [Kolmogorov 1933], que Fréchet avait rencontré en 1931 [Lévy 2014] puis en 1935 [Cléry & Perfettini 2016a]. Il ne mentionne pas d'autres tentatives, comme celle d'Hugo Steinhaus (1887–1972) [Steinhaus 1923a] et d'Antoine Łomnicki (1881–1941) [Łomnicki 1923a] qui publièrent leur axiomatisation dans le même numéro de *Fundamenta Mathematicae* de 1923 dans lequel il avait publié la première partie de son mémoire sur les familles et fonctions additives d'ensembles abstraits [Fréchet 1923b]. On pourrait également ajouter la définition des probabilités en utilisant la notion de mesure par Felix Hausdorff (1868–1942) dont le *Grundzüge der Mengenlehre* [Barone & Novikoff 1978a; Hausdorff 1914] éclipsa rapidement les travaux de Fréchet d'avant guerre, causant peut-être une certaine frustration chez le mathématicien français [Taylor 1982a]. L'ensemble de ces tentatives, mentionnées ou non, fait l'objet d'un rejet collectif :

On doit noter une tendance, dans ces dernières années, à modeler la théorie des probabilités sur la théorie de la mesure. À vrai dire, ce n'est pas la notion de mesure d'un ensemble, c'est plutôt la notion de fonction additive (non négative) d'ensembles, qui est propre, en raison du théorème (ou du postulat) des probabilités totales à représenter une probabilité soit continue, soit discontinue. [Fréchet 1937, p. 6]

Cette dernière critique s'inscrit dans une certaine représentation de la structure des savoirs mathématiques. Depuis les années 1920, Fréchet

¹⁷ Sur les critiques adressées à la théorie de von Mises voir notamment [Siegmund-Schultze 2004a; 2006a; 2010a].

défend sur la scène internationale l'idée de développer une discipline qu'il appelle l'« analyse générale », laquelle prend en charge l'étude de fonctions d'une variable indépendamment de la nature de cette variable [Fréchet 1928b]. Or « $p(E)$ [est une fonction] dont la variable n'est pas numérique, même [différente] de celle du calcul fonctionnelle [et] encore plus générale : E est un événement fortuit. La théorie des probabilités est une branche de l'Analyse générale. » (ASU, Destouches, p. 14). Il ajoute ainsi en 1937 que la théorie des fonctions additives non-négatives d'ensembles permet d'unifier la théorie des probabilités (cas continu et discontinu) tout en concédant qu'un « changement de variables transformant une fonction additive (non négative) d'ensembles dans la mesure de l'ensemble transformé » [Fréchet 1937, p. 6] est possible dans le cas continu, sans donner d'exemple pour illustrer et clarifier cette affirmation qu'il attribue à Borel sans référence.

Les recherches de Fréchet sur les fonctions additives d'ensembles s'inscrivent dans le prolongement d'un article de Lebesgue publié en 1910. Dans cet article [Lebesgue 1910a], ce dernier met clairement en évidence que, pour une fonction donnée, son intégrale dans un ensemble définit une fonction additive d'ensembles au sens restreint (fini) et complet (dénombrable), à variation bornée et absolument continue. Il montre en outre que l'hypothèse d'additivité dénombrable est une conséquence de l'additivité finie conjointe à l'absolue continuité. Cet article est à la base de deux publications de Charles de la Vallée Poussin (1866–1962) [de la Vallée Poussin 1915a ; 1916] dans lesquelles celui-ci souligne que la notion de fonction additive d'ensembles est l'apport majeur de Lebesgue dans cet article de 1910. Le mathématicien belge se propose donc de développer le plus possible cette notion dans les deux premières parties de son fascicule, mais, tout en se restreignant à des familles additives d'ensembles (familles closes d'ensembles), il ne définit pas exclusivement ces fonctions sur de telles familles. En outre, le mathématicien belge reste dans un cadre géométrique ; la famille close d'ensembles qu'il envisage dans $\mathbf{R}^n$ est ainsi construite à partir des pavés de cet espace.

Dans un article de 1915, Fréchet, qui mentionne Lebesgue et cite la Vallée Poussin, avance sur deux fronts : d'une part en ne définissant ces fonctions que sur des familles additives d'ensembles et en proposant une approche abstraite. En fait, cet article porte sur la théorie de l'intégration et est inspiré par un article de Johann Radon (1887–1956) [Radon 1913a] publié en 1913 qui propose une définition de l'intégrale que Fréchet juge être une « sorte de fusion de l'intégrale de M. Lebesgue et de l'intégrale de Stieltjes » [Fréchet 1915a, p. 248]. Si Radon cherche à définir son

intégrale pour des fonctions en dimension finie quelconque, Fréchet voit dans cette définition un moyen simple d'étendre l'intégration au domaine fonctionnel et d'en donner une construction abstraite. Reprenant une approche analogue à la construction de l'intégrale de Riemann par les sommes de Darboux, Fréchet définit ainsi l'intégrale $\int_E F(A)df(e)$ d'une fonctionnelle $F(A)$ par rapport à la fonction additive d'ensembles $f(e)$ relativement à la famille additive d'ensembles $\mathcal{F}$. Dans ce contexte, Fréchet fait une présentation brève de la notion de famille et de fonction additive d'ensembles qu'il développe dans des publications entre 1922 et 1924 [Fréchet 1922a; 1923a; 1924c], dans son cours de l'année 1921–1922 à Strasbourg [Fréchet 1923a; 1924c], dans un exposé lors d'un colloque de mathématiques à Zurich et dans un séminaire à Berne [Fréchet 1922a].

Dans ces circonstances, l'axiomatisation des probabilités s'apparente à une déclinaison de la définition des fonctions additives d'ensembles sur une famille additive d'ensembles qu'en donne Fréchet. Dans les notes de 1929 comme dans le fascicule de 1937, Fréchet passe totalement sous silence ce substrat mathématique. Pourtant, sa conception des fonctions additives d'ensembles (qui correspond aujourd'hui à la théorie abstraite de la mesure) conditionne une axiomatisation en deux parties, associant une famille d'événements close par union disjointe dénombrable et par passage au complémentaire avec une probabilité conçue comme une fonction additive d'ensembles.

3.3. *La porosité des pratiques et des savoirs entre l'enseignement et la recherche : l'extension de l'additivité du cas fini au cas dénombrable*

L'axiomatisation proposée par Fréchet découle du positionnement du calcul des probabilités vis-à-vis de l'analyse générale, et est justifiée par l'analogie entre mesure et probabilités. Ceci étant, Fréchet, suivant sa méthode pédagogique, introduit cette axiomatisation dans son cours comme une réponse à un problème dont il présente les difficultés.

Dans son cours de 1929, Fréchet martèle que l'additivité dénombrable n'est pas une conséquence logique de l'additivité finie. Cette affirmation intervient après une présentation d'extensions des deux propriétés élémentaires des probabilités : le principe des probabilités totales ($P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$ pour deux événements incompatibles A et B) et conjuguées ($P(A \text{ et } B) = P(A)P(B)$ pour deux événements indépendants A et B). Ces extensions portent sur le cas d'un nombre fini quelconque d'événements qui le conduisent *in fine* au cas d'un nombre dénombrable d'événements. Fréchet illustre les problèmes que posent

cette extension de l'additivité au cas dénombrable par des exemples, en 1929 comme en 1937. Le premier exemple consiste à considérer une variable aléatoire de la demi-droite réelle positive suivant une loi uniforme. En notant p_n la probabilité de l'événement $X \in [n; n + 1[$, il remarque que pour tout entier n , et par additivité finie, la probabilité p que $X \in [0; n + 1[$ vérifie $p = np_0$ et $0 \leq np_0 \leq 1$ est vérifiée pour tout entier n , donc $p_0 = 0$. Dans le même temps la probabilité que $X \in [0; +\infty[$ est nécessairement égale à 1. L'additivité dénombrable conduirait donc à l'égalité $1 = 0 + 0 + \dots$. Le second exemple mobilisé reprend le même principe, non plus sur une demi-droite, mais sur un segment et il renvoie immédiatement aux articles de Vitali [1905a], Banach [1923a] et Banach & Kuratowski [1929a] pour illustrer la même contradiction. Dans ce premier temps, Fréchet mobilise ainsi la recherche comme moyen d'illustrer un problème : celui de choisir ou non l'additivité dénombrable comme propriété fondamentale des probabilités en soulignant que le choix de l'additivité dénombrable pour les mesures conduit à admettre l'existence d'ensembles non-mesurables, justifiant leur restriction à une famille additive d'ensembles dits « mesurables ».

Fréchet approfondit le problème dans le cadre probabiliste en mentionnant les publications des années 1928, 1929 et 1930 dans les *Rendiconti Istituto Lombardo di Scienze e Lettere* de Bruno de Finetti qui « agite » à nouveau le débat en interrogeant : « Y a-t-il lieu d'admettre [le] principe [d'additivité dénombrable] ? En l'appliquant, on arrive à des contradictions. » (ASU, Destouches, p. 10). Ces travaux de Finetti conduisent Fréchet à expliciter l'alternative tripartite suivante : ou bien rejeter l'additivité dénombrable ; ou bien vérifier au cas par cas sa validité ; ou bien l'accepter comme axiome (et donc admettre l'existence d'événements non probabilisables).

En 1937, Fréchet justifie le choix théorique de la troisième proposition, et ainsi la définition axiomatique qu'il énonce, par trois affirmations : tout d'abord, elle est commode dans la théorie ; ensuite elle ne conduit pas à une contradiction logique ; enfin elle n'est pas en contradiction avec l'expérience. Sur ce dernier argument, mobilisant une approche empirique, Fréchet donne plusieurs justifications. Il remarque d'abord qu'en pratique on ne peut faire qu'un nombre fini de répétitions. Comme l'additivité dénombrable implique le cas fini, on comprend qu'il ne restreint pas l'applicabilité empirique des probabilités avec cet axiome. Il ajoute que la définition empirique des probabilités (comme constante physique mesurée par la fréquence) vérifie le principe d'additivité dénombrable ; en considérant un événement E réalisé par l'un des événements $(E_i)_{i \geq 1}$ qui

se produisent respectivement r et r_i fois dans un groupe de n épreuves, alors $r_i = 0$ à partir d'un certain rang m et la fréquence f de E vérifie bien l'égalité $f = \sum_{i \geq 1} f_i$ puisque les fréquences f_i sont nécessairement nulles à partir du même rang m (ASU, Destouches, p. 12; [Fréchet 1937, p. 19–20]). Dans ces conditions, il est naturel de conclure que les probabilités vérifient le principe d'additivité dénombrable; « c'est pourtant délica[t] et scabreu[x] » (ASU, Destouches, p. 12). Fréchet mentionne le problème analogue – qui souligne incidemment la différence entre mesure et probabilité – pour les mesures empiriques (ASU, Destouches, p. 13; [Fréchet 1937, p. 21]). Une mesure empirique μ d'un intervalle I de longueur ℓ vérifie $\mu = \ell + \varepsilon$ où ε est l'erreur de mesure, et si on partitionne I par une famille d'intervalles I_k de longueurs ℓ_k , le principe d'additivité finie nécessiterait de vérifier $|\mu - \sum_{k=1}^n \mu_k| \leq (n+1)\omega$ en notant ω le maximum des erreurs, mais « lorsque la suite des intervalles est infinie, on ne voit pas bien en quoi peut consister la vérification » [Fréchet 1937, p. 21].

En outre, Fréchet critique en 1929 un des exemples avancés par Finetti pour critiquer l'hypothèse d'additivité dénombrable. Ce dernier avait proposé de considérer une variable aléatoire entière suivant une loi uniforme. Fréchet signale, dans les notes de Destouches, que s'il est tout à fait possible d'envisager théoriquement une telle variable aléatoire, « il est précisément difficile d'imaginer des épreuves matériellement réalisables » qui satisfassent à une telle condition et d'ajouter : « la difficulté de Finetti est théorique et ne se présentera jamais » (ASU, Destouches, p. 12). De sorte qu'en pratique, une telle situation ne pourrait pas se présenter. Finalement admettre l'additivité dénombrable ne conduit qu'à une seule restriction : certains événements peuvent ne pas être associés à une probabilité.

La contemporanéité des articles de Finetti et du cours de Fréchet réduit à son minimum la séparation temporelle entre la recherche et l'enseignement. Plus encore, ce que ne mentionne pas Fréchet (ni en 1929, ni en 1937), c'est qu'il engage une controverse avec ce probabiliste italien qui le conduit à affiner les choix théoriques qu'il exprime finalement par cette alternative tripartite dans son cours de 1929.

Le point de départ de la controverse engagée par Fréchet est l'article de Finetti dans lequel il aborde la question de l'additivité dénombrable en lien avec des questions de comportement asymptotique de fonctions de répartition¹⁸, publié quelques semaines après la publication d'un

¹⁸ Sur le point de vue de Finetti sur les fondements des probabilités voir [Cifarelli & Regazzini 1996a; von Plato 1994]; sur l'origine de son opposition à l'additivité dénombrable voir [Regazzini 2013a].

article de Fréchet consacré aux modes de convergence en probabilités [Fréchet 1930c]. La controverse recouvre trois publications de de Finetti [1930a;b;c] et deux de Fréchet [1930a;b] dans le *Reale Istituto Lombardo di Scienze e lettere*.

Dans ce premier article [de Finetti 1930a], Bruno de Finetti montre que la convergence d'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ vers une variable aléatoire X , n'implique pas la convergence de la loi (fonction de répartition) de X_n vers la loi X . Finetti pointe, à juste titre, les problèmes posés par les sauts de cette fonction de répartition. En particulier, il considère une variable aléatoire dont la loi vérifie les trois conditions : $P(X < \xi) = 0$, $P(X < \xi) = 1/2$, $P(X < \xi) = 1$ selon que $\xi < 0$, $\xi = 0$, $\xi > 0$. Dans ces conditions, $P(|X| \geq \varepsilon) = 0$, quelque soit $\varepsilon > 0$. « Peut-on, interroge-t-il, pour autant affirmer que $P(X = 0) = 1$? »¹⁹ Il considère alors une variable aléatoire X prennent ses valeurs, avec la même probabilité, dans l'ensemble des valeurs d'une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ positive et convergente vers 0, « quelque soit ε , la probabilité que $|X| < \varepsilon$ est toujours 1, parce que les cas favorables sont en nombre infini [...] tandis que ceux qui sont défavorables sont en nombre fini. Et pourtant $X \neq 0$. » [de Finetti 1930a, p. 225] Il conclut de cet exemple que « l'erreur généralement commise consiste à oublier que le théorème des probabilités totales ne vaut que pour une somme finie de probabilités. » [de Finetti 1930a, p. 225] Et d'ajouter que le même malentendu conduit à affirmer que la fonction de répartition a les valeurs limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$; or considérant une variable aléatoire comme étant un « entier positif choisi au hasard » (tous les entiers étant également probables), la fonction de distribution est $\Phi(\xi) = 0$, car quelle que soit la taille de ξ , seul un nombre fini d'entiers positifs est inférieur à ξ , et les plus grands sont en nombre infini » [de Finetti 1930a, p. 226].

C'est dans ce passage que Fréchet identifie une « rencontre en quelques points avec les sujets [qu'il a] exposés dans [ses cours] de 1929 et 1930 et résumés dans un mémoire de *Metron* [Fréchet 1930c] sous presse. » [Fréchet 1930a, p. 237] Fréchet signale que Finetti n'envisage qu'un seul terme de l'alternative : « si [les exemples de Finetti] ont un sens, l'extension [du théorème des probabilités totales au cas dénombrable] susdite n'est pas admissible. Il reste utile de signaler la seconde alternative : savoir que ses exemples n'ont plus de sens dans les cas où la même extension est légitime. » Dans le cas en effet, où l'additivité dénombrable est considérée comme vraie, le fait de supposer une variable aléatoire prenant ses valeurs

¹⁹ Les traductions de l'italien sont de moi.

dans un ensemble infini dénombrable suivant une loi uniforme n'a pas de sens. Ce qui conduit Fréchet, comme dans son cours, à signaler qu'un problème similaire existe pour la théorie de la mesure (mentionnant Vitali et Lebesgue) et l'amenant à l'affirmation que : « si on adopte une définition de la probabilité où l'extension du théorème des probabilités totales est admise par définition, il y aura des événements qui ont une probabilité déterminée et d'autres qui n'en auront pas. » [Fréchet 1930a, p. 238]

Dès lors le débat est ouvert entre les deux probabilistes français et italiens qui seront conduit à affiner leur position, irréconciliables. Pour Finetti, la position prise par Fréchet est purement formelle et revient à se « [limiter] volontairement à considérer le cas des lois sommables [i.e. les probabilités vérifiant l'additivité dénombrable], sans [se] soucier de savoir si les autres sont aussi admissibles » [de Finetti 1930b, p. 241]. Il va jusqu'à affirmer que face aux problèmes posés par l'additivité dénombrable, « les auteurs pensent qu'ils peuvent en disposer comme bon leur semble, à la seconde où cela leur semble plus commode » [de Finetti 1930b, p. 240]. C'est d'ailleurs à ce titre qu'il rejette l'analogie avec le problème de la mesure que mobilise Fréchet [de Finetti 1930b, p. 240, 242–243]. Pour le probabiliste italien, « il ne suffit pas que ces propriétés soient possibles, mais il faut que, pour le sens même du problème, elles se révèlent nécessaires » [de Finetti 1930b, p. 240], ajoutant que « pour répondre, d'une manière ou d'une autre, à la question, il faut partir de la signification conceptuelle du problème et faire un raisonnement rigoureux, et non déjà établir une convention injustifiée » [de Finetti 1930b, p. 241] ; ce qui conduit le probabiliste italien à multiplier les exemples plus ou moins sophistiqués.

Ces exemples reposent sur un cas général qui cristallise l'opposition entre les deux mathématiciens. Pour Finetti, la propriété d'additivité dénombrable « qui semble si naturelle en se limitant à la considérer d'un point de vue formel et algorithmique, [est] au contraire très bizarre » [de Finetti 1930b, p. 241] puisqu'« elle reviendrait [...] à exclure que l'on puisse penser des événements incompatibles infinis également probables. [...] Et ceci sans qu'on en voie d'autre raison que le désir de se sauver de quelques difficultés » [de Finetti 1930b, p. 241]. En outre, Finetti a une seconde objection : « dire que la limite d'une loi de probabilité est une loi de probabilité [lui] semble une notion intuitive qu'[il] aurai[t] quelques difficultés à abandonner, bien qu'elle n'ait pas une valeur logique. » [de Finetti 1930c, p. 256] En somme, Finetti tient fermement sa position : « je dis qu'il est tout à fait possible de respecter le principe complet des probabilités [...] mais que sont également acceptables les lois

de probabilités qui satisfont seulement le principe restreint. » [de Finetti 1930c, p. 251]

En réaction, Fréchet met en avant que sa réponse n'est pas seulement formelle, mais aussi pragmatique et concrète. Le probabiliste français rejoint Finetti sur le fait « qu'on ne saurait éluder une difficulté de principe par une convention » [Fréchet 1930b, p. 249]. Tout d'abord, il réaffirme que la solution au problème posé par l'extension de l'additivité dénombrable consiste « à n'appliquer le principe complet des probabilités totales qu'à une classe déterminée d'événements fortuits [qu'il] propose d'appeler événements "probabilisables" par analogie avec le mot "mesurables" » [Fréchet 1930b, p. 247]. Il considère que l'objection qui lui est faite est alors de savoir « si l'on n'est pas dans la nécessité pratique de [considérer les événements non-probabilisables] bien qu'ils donnent lieu à des raisonnements et à des formules moins simples » [Fréchet 1930b, p. 248]. Il remarque que dans la théorie de la mesure « tous les ensembles linéaires rencontrés par les mathématiciens sont des ensembles mesurables. Quant aux physiciens, ils seraient sans doute unanimes à déclarer qu'ils se contentent d'ensembles linéaires beaucoup plus simples » [Fréchet 1930b, p. 248].

Fréchet pointe, implicitement, le caractère théorique et *ad hoc* des exemples opposés par Finetti. Dans cette ligne d'idée, à la critique faite par Finetti de la légitimité pour les probabilités des exemples tirés de la théorie de la mesure, Fréchet répond que le concept de mesure provient de celle de longueur : une notion tout à fait physique. Ou encore, se faisant « plus royaliste que le roi », il ne manque pas de souligner le paradoxe à exiger qu'une suite de lois de probabilité tende vers une loi de probabilité et que « si cela est incommode cela ne suffit pas pour le nier » [Fréchet 1930b, p. 250]. Pour Fréchet, « si on adopte le point de vue axiomatique, la solution est immédiate qui consiste à poser comme postulat le principe des probabilités totales sous sa forme complète » [Fréchet 1930b, p. 249] et ajoute que « si l'on adopte la définition empirique de la probabilité comme nous l'avons précisée M. Halbwachs et moi, dans notre petit livre [Fréchet & Halbwachs 1924], on peut démontrer le principe complet des probabilités totales » [Fréchet 1930b, p. 249]. D'un point de vue concret, donc, pour Fréchet, la propriété d'additivité dénombrable est parfaitement valide.

Cette passe d'armes, sans consensus final, entre Finetti et Fréchet permet à ce dernier d'affiner l'alternative qu'il présente dans son cours. La position du probabiliste italien permet au français d'identifier deux options : rejeter totalement l'additivité dénombrable ou la vérifier au cas par cas. Fréchet ajoute la sienne : adopter l'additivité dénombrable en

acceptant l'existence d'événements non probabilisables. Ainsi, à la présentation, disons, problématisée dans son cours de l'hypothèse d'additivité dénombrable correspond une pratique de la controverse dans la recherche faisant émerger des options théoriques, dont celle du choix d'une axiomatisation.

3.4. *Sur les traces d'une reproduction sociale locale par l'enseignement*

L'axiomatisation proposée par Fréchet constitue un marqueur dans sa façon de faire des probabilités qui s'appuie sur une approche abstraite de l'analyse, son « analyse générale ». Dans cette perspective, le rôle de socialisation des savoirs que constitue l'enseignement invite à interroger la pérennité d'une telle approche au sein du champ probabiliste parisien en s'intéressant aux postes d'enseignement qui s'y inscrivent. Or, le processus de renouvellement du champ probabiliste parisien s'inscrit dans un temps long. Le nombre limité de places d'enseignant en 1939 – deux à la faculté des sciences de Paris, une à l'ISUP, une à l'École polytechnique – et leur occupation par Borel (jusqu'en 1941), Fréchet (jusqu'en 1949), Darmois (jusqu'en 1958) et Paul Lévy (jusqu'en 1959) ne permet d'espérer une amorce de renouvellement générationnel qu'à partir des années 1950 et à la faveur d'une augmentation de postes.

Sur la période entre les années universitaires 1929 et 1932, au cours de laquelle enseigne Fréchet à la chaire de CPPM, les registres des examens comptabilisent 222 étudiants inscrits à l'examen. Ceci étant, pour le champ probabiliste, l'enjeu réside avant tout dans le sous-groupe des doctorants en stochastique. Durant cette période, Jean Ville, Michel Loève (1907–1979) et Daniel Dugué (1912–1987) sont inscrits aux examens du certificat de CPPM.

Parmi ces trois doctorants dans les années 1930, Daniel Dugué est certainement celui dont la carrière parisienne joue un rôle important dans le champ probabiliste parisien, notamment parce qu'il est nommé directeur de l'ISUP, suite au départ à la retraite de Georges Darmois ; poste qu'il occupe jusqu'à son départ à la retraite en 1981. Or Dugué, dont la thèse s'inscrit dans la lignée des travaux de Fréchet sur les modes de convergence, rédige une notice nécrologique sur son ancien professeur de probabilités dans la *Revue internationale de Statistique* [Dugué 1974a]. Cette notice témoigne de l'empreinte laissée par Fréchet sur cette génération de stochasticiens formée à l'IHP. En effet, Dugué y rappelle l'importance accordée par Fréchet à l'analyse abstraite et son usage en probabilités, ainsi que le caractère moderne de son enseignement dans le sens où Fréchet introduit

une présentation axiomatique en lien avec des problèmes mathématiques et les applications.

Notons qu'un autre témoignage de l'influence de Fréchet sur cette jeune génération de mathématiciens quant au rapprochement entre analyse générale et calcul des probabilités est donné au Collège de France par Szolem Mandelbrojt (1899–1983) qui propose en 1946 la création d'une chaire d'Analyse générale et calcul des probabilités [Mandelbrojt 1946a]. Cette influence semble néanmoins s'étioler avec le temps ; dans sa notice nécrologique de 1973 [Mandelbrojt 1973a], Mandelbrojt insiste également sur l'importance du travail d'abstraction mené par Fréchet et l'élaboration de son analyse générale, mais affirme désormais que ses travaux de calcul des probabilités revêtent plutôt un « caractère d'analyse classique ».

Le successeur le plus direct de Fréchet semble être Robert Fortet (1912–1998). En effet, bien que ce dernier n'ait jamais été inscrit aux examens du certificat de CPPM, il rédige une thèse sous la direction de Fréchet sur les processus markoviens dans le prolongement des travaux de son professeur. Surtout, Fortet est appelé par Fréchet à remplacer Darmois entre 1943 et 1945 et même lui succède comme professeur à la chaire de CPPM en 1960.

Le cours de Fortet de 1943 intitulé *Éléments de calcul des probabilités* [Fortet 1943], aborde dans son premier chapitre l'axiomatisation des probabilités. Cette partie montre que Fortet a pleinement incorporé l'axiomatisation proposée par Fréchet. Fortet place, en introduction, l'axiomatisation des probabilités comme le produit du travail mathématique, résultant d'un travail d'abstraction de faits empiriques. Le premier chapitre s'ouvre ensuite sur de longs développements sur la notion d'épreuve aléatoire qui lui permet d'introduire l'ensemble ε des issues d'une épreuve et ϕ l'ensemble des événements liés à cette épreuve. En mobilisant le vocabulaire ensembliste, Fortet introduit la structure de famille additive d'ensembles, puis la notion de probabilité comme une fonction additive d'ensembles, d'abord dans le cas fini puis dans le cas dénombrable, définie sur la famille additive d'ensembles des événements.

La présentation pédagogique de ces idées est visiblement distincte de celle de Fréchet ; le texte de Fortet sépare par des discussions, suivant une progression du fini au continu, la définition de la famille additive des événements de l'axiomatisation des probabilités perdant l'unité de l'axiomatisation en deux parties de Fréchet. On peut ajouter que Fortet ne rentre pas dans autant de détails que son aîné ; il se contente par exemple d'affirmer que dans le cas d'un nombre infini dénombrable d'événements – utile du point de vu mathématique – l'intuition nous fait défaut conduisant à

adopter une convention (l'additivité dénombrable) commode et approuvée par la presque unanimité des probabilistes modernes. Enfin, Fortet ne mentionne les événements non-probabilisables qu'une fois arrivé aux probabilités continues et restreint, comme Fréchet, la probabilité à une famille d'événements probabilisables. Ainsi, malgré des différences dans le déroulé de l'exposé, Fortet reprend les éléments essentiels de l'axiomatisation présentée par Fréchet en 1929 et publiée en 1937.

Ce processus de reproduction sociale et sa temporalité, qui permet à l'axiomatisation élaborée par Fréchet de perdurer par l'intermédiaire de Fortet, joue certainement un rôle dans la réception des probabilistes parisiens des *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* de 1933 et sa reconnaissance comme la référence classique présentant l'axiomatisation définitive des probabilités contemporaines. À Paris, il faut vraisemblablement attendre la nouvelle génération de Jacques Neveu (1932–2016) et Paul-André Meyer (1934–2003), à partir de 1970, pour que cet opuscule bénéficie pleinement d'une telle reconnaissance.

Pourtant Fréchet eut une influence auprès du mathématicien soviétique Andreï Kolmogorov [Shafer & Vovk 2006a]. Ces deux mathématiciens ont peut-être échangé sur l'axiomatisation des probabilités en 1931 ; c'est peut-être à cette occasion que Fréchet parle du fascicule qu'il rédige et sera finalement publié en 1937 que Kolmogorov cite dans sa bibliographie [Kolmogorov 1933, p. 62]. Au demeurant, Kolmogorov dans ses *Grundbegriffe* ne cache pas l'influence qu'a exercé Fréchet sur cette publication. Dans son introduction, l'auteur y signale que l'axiomatisation des probabilités est rendue possible par l'analogie existante entre probabilité et mesure et par le travail de Fréchet d'abstraction de la notion de mesure et d'intégrale [Kolmogorov 1933, p.iii] et précise sa référence à l'article de Fréchet de 1915 [Fréchet 1915a] quelques pages plus loin [Kolmogorov 1933, p. 33]. Kolmogorov présente également une démarche pour lier cette définition axiomatique avec le monde réel [Kolmogorov 1933, p. 3–5] en opérant une synthèse des visions de Borel, Fréchet et von Mises [Shafer & Vovk 2006a]. Ceci étant, formulée dans le langage de la théorie (certes abstraite) de la mesure, l'axiomatisation de Kolmogorov est, comme nous l'avons vu, rejetée par Fréchet et visiblement par Fortet.

CONCLUSION

La définition axiomatique des probabilités présentée par Fréchet dans son cours de l'année 1929–1930 cristallise des effets conjoints et complexes de l'enseignement et de la recherche.

En premier lieu, cette axiomatisation des probabilités est un produit des effets du champ mathématique universitaire sur l'activité scientifique et professorale de Fréchet. L'enseignement joue un rôle déterminant dans les processus de sélection qui permettent à Fréchet d'accéder à des enseignements de la recherche, d'abord à Strasbourg dans un contexte lui permettant d'acquérir des dispositions – associant étroitement l'animation d'un collectif de recherche internationalisé et l'enseignement – décisives pour une nomination à la chaire de CPPM en 1928 pour assurer un enseignement de la recherche probabiliste internationale. Ces dispositions sont mobilisées à même l'axiomatisation des probabilités, avec un enseignement de ses recherches, actuelles et passées, en analyse et en probabilité, et inscrites dans un espace géographique européen.

En outre, cette axiomatisation est le résultat de pratiques guidées par des représentations qui établissent une homologie, et ainsi une porosité, entre enseignement et recherche. À la pratique d'une présentation problématisée dans son cours, reposant sur l'impossibilité de déduire l'additivité dénombrable de l'additivité finie, correspond une pratique de la controverse avec Bruno de Finetti sur la légitimité du choix de réclamer l'additivité dénombrable ; l'une et l'autre permettent de mettre en évidence une alternative théorique conduisant Fréchet à faire le choix d'une axiomatisation reposant sur une propriété fondamentale : l'additivité dénombrable. Cette propriété déclenche le choix de Fréchet d'axiomatiser les probabilités et établit définitivement une analogie avec la notion de mesure plaçant le calcul des probabilités comme une branche de l'analyse générale qui en dicte finalement la formulation en deux parties associant une famille additive d'ensembles et une fonction additive d'ensembles, le conduisant à rejeter en bloc les formulations assimilant les probabilités à une mesure, dont celle de Kolmogorov.

Enfin, cette axiomatisation est un produit conjoint de l'enseignement et de la recherche dans la carrière de Fréchet elle-même. L'axiomatisation qu'il propose au premier semestre de l'année 1929–1930 constitue un moment de bascule dans sa carrière probabiliste ; commencée à Strasbourg par des travaux et des enseignements aux prises avec les applications actuarielles, et se tournant résolument vers la théorie, sous les encouragements de Borel à partir de 1926, mais sans perdre de vue les applications. Cette axiomatisation est étroitement associée à une définition empirique, suivant une conception cherchant à maintenir un lien intuitif avec les usages concrets des mathématiques, s'inscrivant dans sa conception du rôle de l'axiomatisation dans l'enseignement et la recherche, et lui rendant sympathique la théorie des collectifs de von Mises dont les défauts théoriques la rendent néanmoins inacceptable.

Cette axiomatisation contribue à sédimenter une théorie des probabilités à partir d'une définition fondamentale de la notion de probabilité. Ainsi, si l'IHP rend possible la constitution d'un champ social consacré aux probabilités [Cléry 2020] à l'échelle locale, le cours de Fréchet participe d'une cristallisation progressive d'un domaine spécifique et structuré d'un ensemble de connaissances, socialisé par l'enseignement, contribuant à en faire une discipline stable d'enseignement et de recherche à la faculté des sciences de Paris et dont Fortet donne un premier témoignage.

RÉFÉRENCES

ARBOLEDA (Luis Carlos)

- [1979] Les débuts de l'école topologique soviétique : notes sur les lettres de Paul S. Alexandroff et Paul S. Urysohn à Maurice Fréchet, *Archive for History of Exact Sciences*, 20 (1979), p. 73–89.
- [1981] Les recherches de M. Fréchet, P. Alexandrov, W. Sierpinski et K. Kuratowski sur la théorie des types de dimensions et les débuts de la topologie générale, *Archive for History of Exact Sciences*, 24 (1981), p. 339–388.

ARMATTE (Michel)

- [2001] Maurice Fréchet : statisticien, enquêteur et agitateur public, *Revue d'histoire des mathématiques*, 7 (2001), p. 7–65.

BANACH (Stefan)

- [1923] Sur le problème de la mesure, *Fundamenta Mathematicae*, 4 (1923), p. 7–33.

BANACH (Stefan) & KURATOWSKI (Casimir)

- [1929] Sur une généralisation du problème de la mesure, *Fundamenta Mathematicae*, 14 (1929), p. 127–131.

LÉVY (Paul)

- [2014] *Paul Lévy and Maurice Fréchet : 50 Years of Correspondence in 107 Letters*, Londres : Springer, 2014.

BARONE (Jack) & NOVIKOFF (Albert)

- [1978] A History of the Axiomatic Formulation of Probability from Borel to Kolmogorov : Part I, *Archive for History of Exact Sciences*, 18(2) (1978), p. 123–190.

DE BEAUCHAMP (Arthur Marais), éd.

- [1884] *Recueil des lois et règlements sur l'enseignement supérieur (1875-1883)*, vol. 3, Paris : Typographie de Delalain Frères, 1884.

BELHOSTE (Bruno)

- [1998] Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques, *Revue d'histoire des mathématiques*, 4(2) (1998), p. 289–304.

BRU (Bernard)

- [2003] Souvenirs de Bologne, *Journal de la Société française de statistique*, 144(1-2) (2003), p. 135–226.

BRU (Bernard) & HERTZ (Sébastien)

- [2001] Maurice Fréchet, dans Heyde (Christopher C.) & Seneta (Eugene), éd., *Statisticians of the Centuries*, New-York : Springer, 2001, p. 331–333.

BUSTAMANTE (Martha-Cecilia), CLÉRY (Matthias) & MAZLIAK (Laurent)

- [2015] Le *Traité du calcul des probabilités et de ses applications* : étendue et limites d'un projet borélien de grande envergure (1921-1939), *North-Western European Journal of Mathematics*, 1 (2015), p. 111 – 167.

CANTELLI (Francesco Paolo)

- [1935] Considérations sur la convergence dans le calcul des probabilités, *Annales de l'IHP*, 5(1) (1935), p. 3–50.

CIFARELLI (Donato Michele) & REGAZZINI (Eugenio)

- [1996] De Finetti's Contribution to Probability and Statistics, *Statistical Science*, 11(4) (1996), p. 253–282.

CLÉRY (Matthias)

- [2020] *La théorie des probabilités à l'Institut Henri Poincaré (1918-1939) : construction d'un champ probabiliste parisien et pratique d'un transfert culturel*, Thèse, Université Paris Saclay, Orsay, 2020.

CLÉRY (Matthias) & PERFETTINI (Thomas)

- [2016] Le voyage de Fréchet en Europe de l'Est en 1935, *Images des mathématiques*, 2016 URL <https://images.math.cnrs.fr/Le-voyage-de-Maurice-Frechet-en-Europe-de-l-Est-en-1935.html>.

CORRY (Leo)

- [1997] David Hilbert and the Axiomatization of Physics, *Archive for History of Exact Sciences*, 51(2) (1997), p. 83–198.

CRAWFORD (Elisabeth) & OLFF-NATHAN (Josiane), éd.

- [2005] *La science sous influence : l'Université de Strasbourg, 1872-1945*, Strasbourg : La Nuée Bleue, 2005.

DUGUÉ (Daniel)

- [1974] Maurice Fréchet, 1878-1973, *International Statistical review*, 42(1) (1974), p. 113–114.

DE FINETTI (Bruno)

- [1930a] Sui passaggi al limite nel calcolo delle probabilità, *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, 63(2-5) (1930), p. 1–12.
 [1930b] A proposito dell'estensione del teorema delle probabilità totali alle classi numerabili, *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, 63(11-14) (1930), p. 239–243.
 [1930c] Ancora sull'estensione alle classi numerabili del teorema delle probabilità totali, *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, 63 (16-17) (1930), p. 251–257.

FORTET (Robert)

- [1943] *Éléments de calcul des probabilités*, Paris : Centre de documentation universitaire, Tournier & Constans, 1943.

FRÉCHET (Maurice)

- [1915] Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait, *Bulletin de la SMF*, 43 (1915), p. 248–265.
- [avril 1920] Les mathématiques à l'Université de Strasbourg, *La Revue du mois*, 1920, p. 337–362.
- [1922] Familles additives et fonctions additives d'ensembles abstraits, *L'Enseignement mathématiques*, 22 (1922), p. 113–129.
- [1923a] Des familles et fonctions additives d'ensembles abstraits, *Fundamentae mathematicae*, 4(1) (1923), p. 329–365.
- [1923b] Une expression élémentaire approchée de la loi des grands nombres, *Revue générale des sciences*, 34 (1923), p. 211–212.
- [1924a] Sur l'ajustement des tables de mortalité par la méthode de Tchebichef, dans *Congrès des sociétés savantes*, Dijon, 1924.
- [1928a] Sur une formule générale pour le calcul des primes pures d'assurances sur la vie, dans of Toronto Press (The University), éd., *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Toronto, August 11–16, 1924*, vol. 2, Toronto, 1928, p. 857–865.
- [1924b] Sur la loi des erreurs d'observation, *Société mathématiques de Moscou*, 32 (1924), p. 5–8.
- [1924c] Des familles et fonctions additives d'ensembles abstraits, *Fundamenta Mathematicae*, 5(1) (1924), p. 206–251.
- [1925a] Sur la loi des erreurs d'observation, *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences*, 181 (1925), p. 204–206.
- [1925b] Sur la loi des erreurs d'observation, *Société mathématiques de Moscou*, 32 (1925), p. 704–710.
- [1925c] *Sur les mathématiques en général : I. Sur une désaxiomatisation des sciences*, conférence faite à Berne en 1925 et reproduite dans *Les mathématiques et le concret*, Paris : Presses Universitaires de France, 1925, p. 1–10.
- [1926a] Une nouvelle représentation analytique de la répartition des revenus, *Bulletin de l'Institut International de statistique*, 22(3) (1926), p. 547–549.
- [1926b] Pour une bibliographie concernant les recherches théoriques modernes concernant le calcul des probabilités, *L'Enseignement mathématique*, 25 (1926), p. 293.
- [1927] Sur la loi de probabilité de l'écart maximum, *Société polonaise de mathématiques*, 6 (1927), p. 93–116.
- [1928b] *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme : introduction à l'analyse générale*, Paris : Gauthier-Villars, 1928.
- [1928c] Comparaison des divers indices proposés pour mesurer l'inégalité de la répartition des revenus, 1928; conférences faites à Bruxelles.
- [1928d] Sur l'existence d'un indice de désirabilité des biens indirects, *Comptes rendus hebdomadaire de l'Académie des sciences*, 187 (1928), p. 589.
- [1928e] Sur l'hypothèse de l'additivité des erreurs partielles, *Bulletin des sciences mathématiques*, 63 (1928), p. 203.
- [1928f] Sur la probabilité de l'écart maximum, *Annales de la société polonaise de mathématiques*, 6 (1928), p. 93–122.

- [1930a] Sur l'extension du théorème des probabilités totales au cas d'une suite infinie d'événements, *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, 63(11-15) (1930), p. 237–238.
 - [1930b] Sur l'extension du théorème des probabilités totales au cas d'une suite infinie d'événements, *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, 63(16-17) (1930), p. 247–250.
 - [1930c] Sur la convergence en probabilité, *Métron*, 8 (1930), p. 1–50.
 - [1933] *Notice sur les travaux scientifiques*, Paris : Hermann, 1933.
 - [1937] *Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités : généralité sur les probabilités, variables aléatoires*, Paris : Gauthier-Villars, 1937.
- FRÉCHET (Maurice) & HALBWACHS (Maurice)
- [1924] *Le Calcul des probabilités à la portée de Tous*, Paris : Dunod, 1924.
 - [2019] *Le calcul des probabilités à la portée de tous*, Strasbourg : Presses universitaires de Strasbourg, 2019.
- GÉNÉRÈS (Auguste), éd.
- [1898] *Recueil des lois et règlements sur l'enseignement supérieur (juin 1889-mai 1898)*, vol. 5, Paris : Typographie de Delalain Frères, 1898.
 - [1909] *Recueil des lois et règlements sur l'enseignement supérieur (juin 1898-janvier 1909)*, vol. 6, Paris : Delalain Frères, 1909.
- GISPERT (Hélène)
- [1989] L'enseignement scientifique supérieur et ses enseignants, 1860-1900 : les mathématiques, *Histoire de l'éducation*, 41 (1989), p. 47–78.
 - [2015] *La France mathématique de la III^e République avant la Grande guerre*, Marseille, Paris : Société mathématique de France, 2015.
- GISPERT (Hélène) & LELOUP (Juliette)
- [2009] Des patrons des mathématiques en France dans l'Entre-deux-guerres, *Revue d'histoire des sciences*, 62(1) (2009), p. 39–117.
- HAUSDORFF (Felix)
- [1914] *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig : Von Veit, 1914.
- HAVLOVÁ (Veonika), MAZLIAK (Laurent) & ŠIŠMA (Pavel)
- [2005] Les débuts des relations mathématiques franco-tchécoslovaques vu à travers la correspondance Hostinský-Fréchet, *Journal électronique d'histoire des probabilités et de la statistique*, 1(1) (2005) URL <https://www.jehps.net/Mars2005/HavlovaMazliakSisma.pdf>.
- HERTZ (Sébastien)
- [1997] *Emil Julius Gumbel (1861-1966) et la statistique des extrêmes*, Thèse, Université de Lyon-I, Lyon, 1997.
- KAISER (David), éd.
- [2005] *Pedagogy and the Practice of Science : Historical and Contemporary Perspectives*, Cambridge (Ma) et Londres : The MIT Press, 2005.
- KOLMOGOROV (Andrei Nikolaevich)
- [1933] *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin : Springer, 1933.

LEBESGUE (Henri)

- [1910] Sur l'intégration des fonctions discontinues, *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, 27 (1910), p. 361–450.

LÉVY (Paul)

- [1925] *Calcul des probabilités*, Paris : Gauthier-Villars, 1925.

ŁOMNICKI (Antoine)

- [1923] Nouveaux fondements du calcul des probabilités : définition de la probabilité fondée sur la théorie des ensembles, *Fundamenta Mathematicae*, 4 (1923), p. 34–71.

LUC (Jean-Noël), CONDETTE (Jean-François) & VERNEUIL (Yves)

- [2020] *Histoire de l'enseignement en France, XIX^e-XXI^e siècles*, Paris : Armand Colin, Armand Colin édition, 2020 URL <https://doi-org.accesdistant.bu.univ-paris8.fr/10.3917/arco.luc.2020.01>.

MANDELBROJT (Szolem)

- [1946] Proposition de création d'une chaire d'analyse générale et calcul des probabilités (1946), reproduite dans *Revue de synthèse*, 141 (3-4) (1946), p. 371–386.
- [5 novembre 1973] Notice nécrologique sur Maurice Fréchet, membre de la section de Géométrie, *Comptes rendus de l'Académie des sciences, vie académique*, 277 (73-76) (1973).

MAZLIAK (Laurent)

- [2010] La mission strasbourgeoise de Maurice Fréchet, dans *Image des mathématiques* CNRS, 2010 URL <https://images.math.cnrs.fr/La-mission-strasbourgeoise-de-Maurice-Frechet.html?lang=fr>.
- [2015] Poincaré's Odd, dans Duplantier (Bertrand) & Rivasseau (Vincent), éd., *Poincaré 1912-2012 : Poincaré Seminar 2012*, Bâle : Birkhäuser, 2015, p. 151–192.

VON MISES (Richard)

- [1919] Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Mathematische Zeitschrift*, 5 (52-99) (1919).

OLIVIER-UTARD (Françoise)

- [2005] L'université de Strasbourg : un double défi, face à l'Allemagne et face à la France, dans Crawford & Olff-Nathan [2005].
- [2010] L'université de Strasbourg de 1919 à 1939 : s'ouvrir à l'international mais ignorer l'Allemagne, *Les cahiers de Framespa*, 6 (2010) URL <http://framespa.revues.org/515>.
- [2015] *Une université idéale ? Histoire de l'université de Strasbourg de 1919 à 1939*, Strasbourg : Presses universitaires de Strasbourg, 2015.

VON PLATO (Jan)

- [1994] *Creating Modern Probability : Its Mathematics, Physics and Philosophy in Historical Perspective*, Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1994.

RADON (Johann)

- [1913] Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, *Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, Abteilung IIa*, 122 (1913), p. 1295–1438.

REGAZZINI (Eugenio)

- [2013] The Origins of de Finetti's Critique of Countable Additivity, dans Jones (Galin) & Shen (Wiaotong), éd., *Advances in Modern Statistical Theory and Applications : A Festschrift in honor of Morris L. Eaton* Institute of Mathematical Statistics, 2013, p. 63–82.

SHAFFER (Glenn)

- [2022] Did Jean Ville Invent Martingales?, dans Mazliak (Laurent) & Shaffer (Glenn), éd., *The splendors and miseries of martingales*, Cham : Birkhäuser, 2022, p. 107–122.

SHAFFER (Glenn) & VOVK (Vladimir)

- [2006] The Sources of Kolmogorov's "Grundbegriffe", *Statistical Science*, 21 (1) (2006), p. 70–98.

SIEGMUND-SCHULTZE (Reinhard)

- [2001] *Rockefeller and the Internationalization of Mathematics Between the Two World Wars*, Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser, 2001.
- [2004a] A Non-Conformist Longing for Unity in the Fractures of Modernity : Towards a Scientific Biography of Richard von Mises (1883-1953), *Science in Context*, 17 (3) (2004), p. 333–370.
- [2004b] Mathematicians Forced to Philosophize : An Introduction to Khinchin's Paper on von Mises' Theory of Probability, *Science in context*, 17 (3) (2004), p. 373–390.
- [2005] Maurice Fréchet à Strasbourg : les mathématiques entre nationalisme et internationalisme, entre application et abstraction, dans Crawford & Olf-Nathan [2005], p. 185–196.
- [2006] Probability in 1919/20 : the von Mises-Pólya-Controversy, *Archive for History of Exact Sciences*, 60 (2006), p. 431–515.
- [2010] Sets versus trial sequences, Hausdorff versus von Mises : "Pure" mathematics prevails in the foundations of probability around 1920, *Historia Mathematica*, 37 (2010), p. 204–241.

SOUBBOTINE (Mikhail F.)

- [1923] On the Law of Frequency of Error, *Recueil mathématique, Moscou*, 31 (2) (1923), p. 296 – 301.
- [1925] Sur la loi des erreurs d'observation, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 180 (1925), p. 1716 – 1719.

STEINHAUS (Hugo)

- [1923] Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure, *Fundamenta Mathematicae*, 4 (1923), p. 286–310.

TAYLOR (Angus Ellis)

- [1982] A Study of Maurice Fréchet, *Archive for History of Exact Sciences*, 27 (1982), p. 233–295.
- [1985] A Study of Maurice Fréchet, *Archive for History of Exact Sciences*, 34 (1985), p. 279–380.

DE LA VALLÉE POUSSIN (Charles)

- [1915] Sur l'intégrale de Lebesgue, *Transaction of the American Mathematical Society*, 16(4) (1915), p. 435–501.
- [1916] *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire*, Paris : Gauthier-Villars, 1916.

VERBURGT (Lukas M.)

- [2015] “A terrible piece of bad metaphysics”? Towards a history of abstraction in nineteenth- and early twentieth-century probability theory, mathematics and logic, Thèse, Universiteit Amsterdam, 2015.

VERSCHUEREN (Pierre)

- [2023] La licence ès sciences du menu au buffet, et retour (1896–1966), dans Thierry Kouarmé (Boris Noguès), Bruno Belhoste & Picard (Emmanuelle), éd., *Examens, grades et diplômes*, Paris : Éditions de la Sorbonne, 2023, p. 203–214 URL <https://doi.org/10.4000/13agy>.

VITALI (Giuseppe)

- [1905] *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Bologne : Tipografia Gamberini e Parmeggiani, 1905.

WARWICK (Andrew)

- [2003] *Masters of Theory : Cambridge and the Rise of Mathematical Physics*, Chicago et Londres : The University of Chicago Press, 2003.

